

heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Département Technologies Industrielles

Unité SES

Signaux et Systèmes

i nstitut d'
Automatisation
i ndustrielle



Prof. Freddy Mudry



*"La science, son goût est amer au début
mais à la fin, plus doux que le miel"*

(Plat à décor épigraphique
XI-XIIème siècle, Iran ou Transoxiane
Le Louvre - Arts de l'Islam)

Informations concernant l'unité d'enseignement Signaux et Systèmes

Prof. F. Mudry

Objectifs À l'issue de ce cours, l'étudiant sera en mesure de :

1. Évaluer les caractéristiques et les réponses temporelles d'un système analogique linéaire ou non.
2. Décrire le comportement des systèmes contre-réactionnés.
3. Maîtriser les séries de Fourier : représentations spectrales et calcul de la puissance.
4. Analyser et mettre en pratique les relations temps-fréquence.
5. Évaluer les effets de l'échantillonnage et de la quantification.
6. Évaluer et calculer le comportement d'un système numérique linéaire.

À l'issue des travaux pratiques en laboratoire, l'étudiant sera en outre capable de :

1. Maîtriser un outil de programmation tel que Matlab.
2. Simuler des systèmes analogiques linéaires ou non et apprécier leurs effets.
3. Synthétiser et analyser des signaux.
4. Visualiser, décrire et analyser le spectre d'un signal quelconque.
5. Écrire "en ligne" un rapport succinct mais complet de son travail.

Remarques

1. Le temps accordé pour les exposés et exercices du cours SES est de 4 périodes hebdomadaires pendant un trimestre. Durant le trimestre suivant, le cours de 5 périodes hebdomadaires est complété par un laboratoire de 3 périodes hebdomadaires.
2. Dans la mesure du possible, les cours et exercices sont donnés en alternance durant deux périodes.
3. Les corrigés d'exercices sont donnés dans un fascicule à part. Afin d'apprendre à résoudre les exercices proposés de manière personnelle et indépendante, celui-ci ne devrait pas être consulté pendant les séances d'exercices.
4. Les tests écrits sont constitués de problèmes similaires à ceux proposés comme exercices. Le seul document autorisé pour les TE est un formulaire manuscrit personnel.
5. L'examen de fin d'unité SES se fera sous forme écrite et durera deux heures.
6. Des informations complémentaires sont données dans la fiche de cours SES.

Programme Un temps total de 96 périodes est accordé à cette unité d'enseignement. La répartition et la progression du cours sont données dans le tableau ci-après. Il est bien clair que ce programme constitue une ligne directrice et que le rythme du cours peut être légèrement modifié selon les circonstances.

Semestres	Signaux et Systèmes	Périodes	Total	Semaines
Cours H06-07	Trimestre 2 : 4 pér. hebdo. = 32 périodes			
I	Analyse des systèmes linéaires	6	6	1.5
	Analyse des systèmes analogiques	8	14	3.5
	Éléments de régulation automatique	10	24	6
II	Analyse des signaux périodiques	4	28	7
	1 TE + correction	4	32	8
Cours E07	Trimestre 3 : 5 pér. hebdo. = 40 périodes			
II	Analyse des signaux périodiques (fin)	8	8	1.6
	Analyse des signaux non périodiques	4	12	2.4
	Éléments d'analyse spectrale numérique	4	16	3.2
III	Échantillonnage et reconstruction des signaux	8	24	4.8
	Signaux et systèmes numériques	12	36	7.2
	1 TE + correction	4	40	8
Labo E07	Trimestre 3 : 3 pér. hebdo. = 24 périodes			
IV	Simulation d'un système analogique	6	6	2
	Synthèse et analyse de signaux périodiques	6	12	4
	Numérisation des signaux analogiques	6	18	6
	Synthèse et réalisation de filtres numériques	6	24	8

TABLE 0.1.: Programme d'enseignement de l'unité SES

Bibliographie générale

Traitement des signaux

1. B.P. Lathi : *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley-Cambridge Press, 1998
2. B.P. Lathi : *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, 1992
3. F. de Coulon : *Théorie et traitement des signaux*, PPR, 1984
4. A. Spataru : *Fondements de la théorie de la transmission de l'information*, PPR, 1987
5. A.V. Oppenheim, A.S. Willsky : *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983

Traitement numérique des signaux

1. B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, J. Wiley, 1997
2. J.H. McClellan, R.W. Schafer, M.A. Yoder : *DSP First*, Prentice Hall, 1999
3. J.G. Proakis, D.G. Manolakis : *Digital Signal Processing*, MacMillan, 2ème édition, 1992
4. C.S. Burrus et al. : *Computer-Based Exercises for Signal Processing*, Prentice-Hall, 1994
5. V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS, 1997
6. E.C. Ifeachor, B.W. Jervis : *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1993

Filtres analogiques et numériques

1. M. Labarrère et al. : *Le filtrage et ses applications*, Cepadues Editions, 1982
2. R. Boîte, H. Leich : *Les filtres numériques*, Masson, 1980
3. R. Miquel : *Le filtrage numérique par microprocesseurs*, Editests, 1985
4. H. Lam : *Analog and Digital Filters*, Prentice Hall, 1979
5. T.W. Parks, C.S. Burrus : *Digital Filter Design*, J. Wiley, 1987
6. Ch.S. Williams : *Designing Digital Filters*, Prentice-Hall, 1986

Analyse spectrale numérique

1. Hewlett-Packard : *The Fundamentals of Signal Analysis*, Application Note 243, 1981
2. R.B. Randall : *Frequency Analysis*, Brüel-Kjaer, 1987
3. C.S. Burrus, T.W. Parks : *DFT / FFT and convolution algorithms*, J. Wiley, 1985
4. R.W. Ramirez : *The FFT Fundamentals and Concepts*, Prentice-Hall, 1985

Traitement de la parole

1. R. Boite et all : *Traitement de la parole*, PPUR, 2000
2. Deller, Proakis, Hansen : *Discrete Time Processing of Speech Signals*, Macmillan, 1993
3. S. Saito, K. Nakata : *Fundamentals of Speech Signal Processing*, Academic Press, 1985
4. L.R. Rabiner, R.W. Schafer : *Digital Signal Processing of Speech*, Prentice-Hall, 1978

Pour le plaisir des yeux et de l'esprit

1. Warusfel André : *Les nombres et leurs mystères*, Seuil 1961
2. Stewart Ian : *Does God Play Dice ? the new mathematics of chaos*, Penguin, 1989
3. Stewart Ian : *Dieu joue-t-il aux dés ? les nouvelles mathématiques du chaos*, Flammarion, 1993
4. Dunham William : *Euler, the master of us all*, The Mathematical Association of America, 1999
5. Maor Eli : *To Infinity and Beyond : a cultural history of the infinity*, Birkhäuser, 1986
6. Klein Etienne : *Il était sept fois la révolution - Albert Einstein et les autres*, Flammarion, 2005
7. Klein Etienne : *La physique quantique*, Dominos Flammarion, 1996
8. Hawking Stephen : *Une brève histoire du temps*, Flammarion, 1988
9. Reeves Hubert : *Malicorne : réflexions d'un observateur de la nature*, Seuil, 1990
10. ThuanTrinh Xuan : *Le chaos et l'harmonie : la fabrication du réel*, folio essais, Gallimard, 1998
11. Davis Ph.J, Hersh R. : *L'univers mathématique*, Bordas 1985
12. Ekeland Ivan : *Le Calcul, l'Imprévu : les figures du temps de Kepler à Thom*, Seuil, 1984
13. Conway John : *The Book of Numbers*, Copernicus, 1996
14. Fivaz Roland : *L'ordre et la volupté*, PPR 1989
15. Lesieur Marcel : *La turbulence*, Grenoble PUG 1994

Quelques adresses Internet

Démonstrations interactives

1. <http://www.jhu.edu/~signals/>
2. <http://image-1.rose-hulman.edu/~yoder/bookcd/visible/contents/cover.htm>
3. <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/home.text.htm>

Livre et divers

1. <http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>
2. <http://www.redcedar.com/learndsp.htm>
3. <http://www.dspguru.com/info/tutor/other.htm>

Logiciels gratuits

1. <http://www.sysquake.com>
2. <http://www.dspguru.com/sw/opendsp/mathclo.htm>
3. <http://www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.htm>

Table des matières

I. Étude des systèmes analogiques	1
1. Analyse des systèmes linéaires	3
1.1. La transformation de Laplace	3
1.1.1. Rappels mathématiques	3
1.1.2. Quelques exemples introductifs	5
1.1.3. Impédances et fonctions de transfert symboliques	11
1.2. Réponses temporelles vs pôles et zéros	11
1.2.1. Effets des pôles et zéros	11
1.2.2. Effet des conditions initiales	12
1.3. Analyse d'un système d'ordre 1	14
1.3.1. Fonction de transfert	14
1.3.2. Pôle et réponse transitoire	15
1.3.3. Réponse indicielle	15
1.4. Analyse d'un système d'ordre 2	17
1.4.1. Fonction de transfert	17
1.4.2. Pôles et réponse transitoire	19
1.4.3. Réponse indicielle d'un système d'ordre 2	20
1.5. Réponses temporelles des circuits linéaires	23
1.5.1. Représentation des quadripôles	23
1.5.2. Pôles d'un système et réponse temporelle	24
1.5.3. Évaluation du comportement temporel	25
1.5.4. Exemple	26
1.6. Réponse impulsionnelle d'un système	27
1.6.1. Remarques concernant l'impulsion de Dirac	28
1.6.2. Réponse impulsionnelle	29
1.7. Produit de convolution	32
1.7.1. Réponse temporelle des systèmes linéaires	32
1.7.2. Réponse d'un système causal	34
1.7.3. Convolution numérique	34
1.8. Exercices	37
2. Modélisation des systèmes analogiques	45
2.1. Système oscillant	45
2.1.1. Équations différentielles	45
2.1.2. Fonction de transfert	46
2.1.3. Conclusion	47

Table des matières

2.2.	Échangeur de chaleur	47
2.3.	Démarche associée à la modélisation	48
2.3.1.	Conclusion	52
2.4.	Un système non linéaire : le réservoir d'eau	54
2.4.1.	Équations	54
2.4.2.	Résolution numérique	56
2.4.3.	Linéarisation	57
2.4.4.	Fonction de transfert	59
2.4.5.	Conclusion	60
2.5.	Représentations des systèmes analogiques	60
2.6.	Un système électromécanique : le moteur DC	61
2.6.1.	Équations différentielles	62
2.6.2.	Fonction de transfert	66
2.6.3.	Temps caractéristiques	67
2.6.4.	Schéma fonctionnel	68
2.6.5.	Approximation d'ordre 1	69
2.6.6.	Effets d'un réducteur	69
2.7.	Comportement d'un moteur DC	71
2.7.1.	Paramètres d'un moteur	71
2.7.2.	Comportement statique	71
2.7.3.	Comportement dynamique	74
2.7.4.	Exemple	75
2.8.	Simulation d'un moteur DC	78
2.9.	Conclusion générale	83
2.10.	Exercices	84
3.	Éléments de régulation automatique	93
3.1.	Schémas fonctionnels	93
3.1.1.	Schéma à contre-réaction	93
3.1.2.	Schéma général d'un système asservi	94
3.1.3.	Fonctions de transfert d'un système asservi	96
3.2.	Analyse de systèmes simples	97
3.2.1.	Systèmes d'ordre 1	98
3.2.2.	Systèmes d'ordre 2	100
3.2.3.	Systèmes d'ordre supérieur à 2	103
3.2.4.	Conclusions	104
3.3.	Calcul d'un asservissement de position	106
3.4.	Étude d'un asservissement avec Matlab	110
3.5.	Une application : le circuit PLL	115
3.5.1.	Démodulation FM	116
3.5.2.	Description d'un circuit PLL	118
3.6.	Analyse du PLL en mode synchronisé	120
3.6.1.	Remarques importantes	121
3.6.2.	Choix du filtre	121
3.6.3.	Fonction de transfert en boucle ouverte	122
3.6.4.	Fonction de transfert en boucle fermée	122

3.6.5.	Calcul de ω_3 et ω_4	123
3.7.	Calcul d'un circuit PLL	125
3.7.1.	Schémas fonctionnel et de réalisation	125
3.7.2.	Détecteur de phase (XOR)	126
3.7.3.	Filtre à retard de phase	126
3.7.4.	Oscillateur	127
3.7.5.	PLL en boucle ouverte	127
3.7.6.	PLL en boucle fermée	128
3.7.7.	Calcul du filtre	129
3.8.	Simulation d'un circuit PLL	131
3.9.	Circuit PLL en mode non - synchronisé	131
3.10.	Exercices	133

II. Étude des signaux analogiques 141

4.	Analyse des signaux périodiques	143
4.1.	Introduction	143
4.2.	Deux représentations pour un seul signal	143
4.3.	Séries de Fourier	144
4.3.1.	Définition de la série de Fourier	144
4.3.2.	Série de Fourier en cosinus	147
4.3.3.	Série de Fourier complexe	148
4.3.4.	Relations entre les trois représentations de Fourier	149
4.4.	Théorème de la puissance ou de Parseval	149
4.5.	Spectres d'amplitudes et de phases	151
4.5.1.	Spectres unilatéraux et bilatéraux	151
4.5.2.	Coefficients spectraux et symétries des signaux	153
4.5.3.	Exemple de représentations spectrales d'un signal	153
4.6.	Suite d'impulsions	156
4.6.1.	Suite d'impulsions rectangulaires	156
4.6.2.	Suite d'impulsions triangulaires	158
4.6.3.	Suite d'exponentielles décroissantes	160
4.7.	Reconstruction des signaux	160
4.7.1.	Synthèse d'un signal	160
4.7.2.	Phénomène de Gibbs	162
4.7.3.	Importance de la phase	162
4.8.	Quelques théorèmes utiles	165
4.8.1.	Décalage temporel	165
4.8.2.	Modulation d'amplitude	165
4.8.3.	Rotation autour de l'ordonnée	166
4.9.	Calcul de quelques spectres	167
4.9.1.	Suite d'impulsions composites	167
4.9.2.	SIR décalée	169
4.10.	Réponse d'un système linéaire	171
4.10.1.	Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas	171

4.11. Réponse d'un système non-linéaire	174
4.11.1. Distorsion due à une diode	174
4.12. Exercices	177
5. Analyse des signaux non périodiques	189
5.1. Transformation de Fourier	189
5.1.1. Passage de la série à la transformation de Fourier	189
5.1.2. TF directe et inverse	191
5.1.3. Énergie d'un signal non permanent	192
5.1.4. Propriétés de la transformation de Fourier	192
5.2. Exemples de spectres continus	192
5.2.1. Spectre d'une impulsion rectangulaire	192
5.2.2. Spectres d'un sinus amorti	194
5.2.3. Spectres de deux impulsions rectangulaires	197
5.3. Calcul de quelques transformées	198
5.3.1. Exponentielle décroissante	198
5.3.2. Exponentielle décroissante symétrique	199
5.3.3. Signal constant unité	199
5.3.4. Saut unité	200
5.3.5. Phaseur	200
5.3.6. Signal sinusoïdal	202
5.3.7. Impulsion sinusoïdale	202
5.4. Quelques conclusions	204
5.4.1. TF des signaux périodiques	204
5.4.2. Relations avec la transformation de Laplace	204
5.5. Extension de la transformation de Fourier	205
5.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]	210
5.7. Exercices	213
6. Éléments d'analyse spectrale numérique	223
6.1. Passage de la TF à la TFD	223
6.1.1. Signaux continus non-périodiques (\Rightarrow TF)	224
6.1.2. Signaux discrets de durée infinie (\Rightarrow TFi)	224
6.1.3. Signaux discrets de durée finie (\Rightarrow TFf)	226
6.1.4. Discrétisation de la fréquence (\Rightarrow TFD)	227
6.2. Relations temps-fréquence	227
6.2.1. Analyse spectrale avec Matlab	230
6.2.2. Pulsation normalisée	230
6.3. Transformation de Fourier discrète	231
6.3.1. Définition de la TFD	231
6.3.2. TFD d'un signal périodique	232
6.3.3. TFD et FFT	232
6.4. Relations entre les domaines analogique et numérique	233
6.4.1. Calcul et analyse d'une TFD	235
6.5. Spectre d'une sinusoïde	237
6.5.1. Le nombre de périodes enregistrées est un entier	237
6.5.2. Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier	237

6.6.	Fenêtres d'observation	238
6.6.1.	Quatre fenêtres usuelles	238
6.6.2.	Effet d'une fenêtre	240
6.6.3.	Choix d'une fenêtre	240
6.6.4.	Fenêtrage et traitement d'images	242
6.7.	Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire	243
6.8.	Exemple 2 : reconstruction d'un signal	246
6.9.	Exemple 3 : analyse spectrale détaillée	248
6.9.1.	Données	248
6.9.2.	Signal temporel	249
6.9.3.	Paramètres d'acquisition	249
6.9.4.	Analyse spectrale	250
6.9.5.	Estimation des amplitudes	253
6.9.6.	Détail du calcul des signaux et des spectres	254
6.10.	Exercices	258
7.	Description et comparaison des signaux	265
7.1.	Classification des signaux	265
7.1.1.	Classification phénoménologique	265
7.1.2.	Énergie et puissance des signaux	266
7.2.	Quatre signaux types	268
7.2.1.	Signaux déterministes temporaires	269
7.2.2.	Signaux permanents périodiques	270
7.2.3.	Signaux permanents aléatoires	271
7.2.4.	Signaux permanents quasi-périodiques	271
7.3.	Comparaison des signaux	272
7.3.1.	Corrélation de signaux à énergie finie	272
7.3.2.	Corrélation de signaux à puissance finie	274
7.3.3.	Propriétés de l'autocorrélation	275
7.3.4.	Propriétés de l'intercorrélation	277
7.3.5.	Calcul numérique de la corrélation	278
7.3.6.	Exemples de corrélation	278
7.4.	Rapport signal sur bruit (SNR)	280
7.5.	Trois applications de la corrélation	281
7.5.1.	Le radar	281
7.5.2.	La mesure d'un débit	284
7.5.3.	La mesure du rythme cardiaque	285
7.6.	Description des signaux aléatoires	286
7.6.1.	Tension équivalente de bruit	290
7.7.	Systèmes linéaires et densités spectrales	291
7.7.1.	Signaux à énergie finie	291
7.7.2.	Signaux à puissance finie	292
7.8.	Signaux, spectres et statistique	292
7.9.	Quelques exemples	295
7.10.	Exercices	299

III. Étude des signaux et systèmes numériques	307
8. Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques	309
8.1. Introduction	309
8.2. Analyse temporelle	310
8.2.1. Types de signaux	310
8.2.2. Quantification d'un signal : exemple	311
8.2.3. Échantillonnage des signaux analogiques	312
8.3. Analyse fréquentielle	313
8.3.1. Spectre d'un peigne de Dirac	314
8.3.2. Spectre d'un signal échantillonné	315
8.4. Recouvrement spectral	315
8.4.1. Quelques exemples	318
8.5. Théorème de l'échantillonnage	325
8.5.1. Filtre antirecouvrement	326
8.5.2. Exemple	326
8.6. Quantification d'un signal échantillonné	328
8.6.1. Quantification uniforme	328
8.6.2. Bruit de quantification	329
8.6.3. Rapport signal sur bruit	331
8.6.4. SNR de quelques signaux	331
8.6.5. Non linéarité du convertisseur	333
8.6.6. Conclusion	334
8.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage	335
8.8. Reconstruction du signal	337
8.8.1. Convertisseur N-A	337
8.8.2. Interpolateur idéal	338
8.8.3. Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un CNA	339
8.8.4. Filtre de reconstruction ou de lissage	341
8.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N - N-A	341
8.9.1. Échantillonnage sans filtre antirecouvrement	341
8.9.2. Échantillonnage avec filtre antirecouvrement	341
8.9.3. Effet du convertisseur N-A	341
8.9.4. Reconstruction du signal analogique	344
8.9.5. Correcteur d'amplitude	344
8.10. Exercices	345
9. Description des signaux et systèmes numériques	351
9.1. Signaux numériques	351
9.1.1. Quelques signaux fondamentaux	352
9.1.2. Périodicité des signaux numériques	353
9.2. Systèmes numériques	355
9.2.1. Exemples de système numériques	355
9.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique	358
9.2.3. Propriétés des systèmes	358
9.2.4. Interconnexions des systèmes	362

9.2.5. Conclusions	363
9.3. Réponse impulsionnelle et produit de convolution	363
9.3.1. Systèmes causaux	365
9.3.2. Réalisation d'un produit convolution	366
9.3.3. Une application : l'interpolation numérique	369
9.4. Systèmes décrits par des équations récursives	370
9.4.1. Quelques exemples	373
9.5. Exercices	375
10. Réponses des systèmes numériques	379
10.1. Réponse temporelle des systèmes linéaires	379
10.1.1. Résolution d'une équation récursive	379
10.1.2. Solution de l'équation homogène	380
10.1.3. Solution particulière	380
10.1.4. Solution générale	381
10.1.5. Généralisation	381
10.2. Stabilité des systèmes numériques	383
10.3. Instants caractéristiques	383
10.4. Transformation en z	385
10.4.1. Définition	385
10.4.2. Calcul de quelques transformées	386
10.4.3. Quelques propriétés de la transformation en z	387
10.4.4. Équation aux différences et fonction de transfert	388
10.5. Réponse fréquentielle des systèmes LTI	389
10.5.1. Fonction de transfert et réponse fréquentielle	389
10.5.2. Pôles, zéros et réponse fréquentielle	390
10.5.3. TFD et réponse fréquentielle	392
10.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles	394
10.6.1. Moyenneur non causal	394
10.6.2. Moyenneur causal	394
10.6.3. Filtre passe-bas d'ordre 1	396
10.6.4. Filtre passe-bas d'ordre 2	399
10.7. Analyse et réalisation d'un filtre	401
10.7.1. Calcul de la réponse temporelle du filtre	401
10.7.2. Calcul de la réponse fréquentielle	403
10.7.3. Comment réaliser ce filtre?	404
10.8. Classification des systèmes numériques	406
10.8.1. Systèmes non récursifs (dits RIF, FIR ou MA)	407
10.8.2. Systèmes récursifs (dits RII, IIR ou ARMA)	407
10.8.3. Caractéristiques des filtres FIR et IIR	408
10.9. Exercices	409

IV. Analyse et Synthèse des Filtrés Numériques	415
11. Éléments de filtrage analogique	417
11.1. Introduction	417
11.1.1. Filtre idéal	417
11.1.2. Formes canoniques	417
11.1.3. Formes normalisées	418
11.1.4. Filtrés d'ordre 2	419
11.2. Filtrés optimums	420
11.2.1. Gabarit	420
11.2.2. Approximations	420
11.2.3. Temps de propagation	422
11.2.4. Quel filtré choisir ?	423
11.2.5. Illustration des réponses fréquentielles et temporelles	425
11.3. Filtrés de Butterworth	429
11.3.1. Tableau des polynômes de Butterworth	430
11.3.2. Ordre et pulsation caractéristique d'un filtré	430
11.3.3. Synthèse d'un filtré de Butterworth	433
11.4. Filtrés de Tchebycheff	436
11.4.1. Caractéristique des filtrés de Tchebycheff	436
11.4.2. Calcul de l'ordre d'un filtré de Tchebycheff	436
11.4.3. Tableau des polynômes de Tchebycheff	437
11.4.4. Synthèse d'un filtré de Tchebycheff	437
11.5. Filtrés de Bessel	440
11.5.1. Temps de propagation des filtrés passe-bas	442
11.5.2. Fonctions de transfert	443
11.5.3. Synthèse d'un filtré de Bessel	444
11.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle	446
11.7. Réalisations des filtrés analogiques	448
11.7.1. Filtrés normalisés	448
11.7.2. Transformations d'un filtré normalisé	450
11.7.3. Circuits de Sallen et Key à gain fixe	450
11.7.4. Circuits de Sallen et Key à gain variable	454
11.7.5. Exemple : réalisation d'un filtré passe-bande	456
11.8. Exercices	459
12. Synthèse des filtrés récurrents	465
12.1. Classification des systèmes numériques	465
12.1.1. Systèmes non récurrents (dits RIF, FIR ou MA)	465
12.1.2. Systèmes récurrents (dits RII, IIR ou ARMA)	465
12.1.3. Caractéristiques des filtrés FIR et IIR	466
12.2. Réponse fréquentielle d'un filtré numérique	466
12.3. Le problème de l'approximation	469
12.4. La transformation associée	470
12.4.1. Exemple de transformation associée	471
12.4.2. Modification de la transformation associée	474

12.5. La transformation bilinéaire	475
12.5.1. Introduction	475
12.5.2. Transformation bilinéaire d'une fonction de transfert	475
12.5.3. Exemple de transformation bilinéaire	476
12.6. Compensation de la distorsion des fréquences	478
12.7. Synthèse d'un filtre numérique récursif	480
12.8. Exercices	483
13. Synthèse des filtres non récursifs	485
13.1. Introduction	485
13.2. Spécifications	485
13.3. Propriétés des filtres RIF à phase linéaire	486
13.3.1. Réponses impulsionnelle et fréquentielle	486
13.4. Synthèse par fenêtrage	490
13.4.1. Principe du fenêtrage	490
13.4.2. Effet de la troncation	491
13.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales	493
13.5.1. Filtre passe-bas	493
13.5.2. Filtre passe-haut	496
13.5.3. Filtre passe-bande et réjecteur de bande	496
13.6. Caractéristiques de quelques fenêtres	498
13.6.1. Fenêtres analytiques	498
13.6.2. Fenêtre de Kaiser-Bessel	501
13.7. Conclusions sur l'usage des fenêtres	504
13.7.1. Propriétés et utilisation des fenêtres	504
13.7.2. Démarche pour calculer un filtre	506
13.8. Réalisation d'un filtre passe-bas	506
13.8.1. Préliminaires	506
13.8.2. Fenêtrage de Hamming	507
13.8.3. Fenêtrage de Kaiser	509
13.9. Réalisation d'un filtre passe-bande	510
13.10 Exercices	511
V. Applications du TdS	519
14. Analyse de la parole	521
14.1. Introduction	521
14.2. Analyse de la parole	521
14.2.1. Classification des phonèmes	521
14.2.2. Période des sons voisés	522
14.3. Acquisition et analyse avec CoolEdit	522
14.3.1. Paramètres pour l'enregistrement	522
14.3.2. Visualisation des signaux et de leur spectre	523
14.4. Analyse du signal acoustique avec Matlab	523
14.4.1. Lecture du fichier de données	523

Table des matières

14.4.2. Initialisation	523
14.4.3. Valeur efficace	525
14.4.4. Taux de passages par zéro	525
14.4.5. Spectre	525
14.5. Recherche du pitch	526
14.5.1. Filtrage du signal	526
14.5.2. Autocorrélation	527
14.6. Travail pratique	528
14.6.1. Avec CoolEdit :	528
14.6.2. Avec Matlab	529
15. Codage et décodage LPC de la parole	533
15.1. Introduction	533
15.2. Prédiction linéaire	533
15.2.1. Mesure de l'erreur de prédiction	533
15.2.2. Calcul des coefficients de prédiction linéaire	534
15.2.3. Interprétation de la prédiction linéaire	536
15.3. Modèle du conduit vocal	536
15.4. Analyse du signal	538
15.4.1. Initialisation	538
15.4.2. Spectre	538
15.5. Analyse LPC	539
15.5.1. Valeur efficace et gain	539
15.5.2. Fonction de transfert $H(z)$ du conduit vocal	540
15.5.3. Réponse fréquentielle du conduit vocal	541
15.6. Recherche du pitch	541
15.6.1. Filtrage du signal	541
15.6.2. Recherche du signal d'excitation $e[n]$	542
15.6.3. Autocorrélation de $e[n]$	542
15.6.4. Critères de décision	544
15.7. Synthèse d'un son	545
15.7.1. Signaux réel et synthétique	545
15.7.2. Mise en valeur des résultats	546
15.8. Travail pratique	548
15.8.1. Codage et décodage d'une phrase	548
15.8.2. Analyse des résultats	549
15.8.3. Analyse et amélioration de la synthèse	549
15.9. Minimisation de l'écart quadratique	550
16. Introduction au filtrage adaptatif	555
16.1. Notions de probabilités	555
16.1.1. Définitions de quelques estimateurs statistiques	555
16.1.2. Notation vectorielle	556
16.1.3. Fonction de répartition et densité de probabilités	557
16.1.4. Modèles statistiques	557
16.2. Régression linéaire	558
16.2.1. Mesure, modèle et écart	558

16.2.2. Minimisation de l'écart quadratique	560
16.2.3. Équations de la régression linéaire	561
16.3. Filtrage de Wiener	562
16.3.1. Définition du problème	562
16.3.2. Résolution au sens des moindres carrés	563
16.3.3. Description matricielle	565
16.3.4. Applications du filtrage de Wiener	566
16.4. Suppression d'une perturbation	567
16.4.1. Filtrage de Wiener classique	568
16.4.2. Remarque	568
16.5. Filtrage adaptatif	568
16.5.1. Algorithme récursif des moindres carrés (RLMS)	569
16.5.2. Algorithme récursif normalisé (NLMS)	572
16.6. Exercices	576

VI. Annexes 585

17. Formulaire Signaux et systèmes 587	
17.1. Systèmes analogiques	587
17.2. Signaux analogiques	588
17.3. Échantillonnage des signaux	589
17.4. Signaux et systèmes numériques	590
17.5. Analyse spectrale numérique	593

Première partie .
Étude des systèmes analogiques

1. Analyse des systèmes linéaires

L'analyse du comportement des systèmes linéaires se fait essentiellement avec la transformation de Laplace car celle-ci traite une classe de signaux plus large que ne l'autorise la transformation de Fourier. De plus, elle permet d'étudier des systèmes stables ou non par le fait que la variable de Laplace ($s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$) est définie dans l'ensemble du plan complexe. Enfin, par l'interprétation de la valeur des pôles de la fonction image $X(s)$, on prédit facilement la forme de la fonction originale $x(t)$.

1.1. La transformation de Laplace

1.1.1. Rappels mathématiques

Dans ce paragraphe, on se contente de rappeler quelques propriétés liées à la transformation de Laplace et utilisées dans l'analyse des systèmes linéaires. Pour toute information supplémentaire, on consultera avantageusement son cours de mathématiques.

Définition

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \text{ [1/sec]} \quad (1.1)$$

Dans l'analyse des signaux temporels, la variable s est appelée pulsation complexe et elle possède les unités [1/sec]. On notera que, si la variable $x(t)$ est une tension électrique alors son image $X(s)$ se mesure en [V · sec].

Linéarité

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s) \quad (1.2)$$

Dérivation

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(t=0) \quad (1.3)$$

Intégration

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(t) dt + x(t=0)\right) = \frac{X(s)}{s} + \frac{x(t=0)}{s} \quad (1.4)$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Retard

$$\mathcal{L}(x(t - t_0)) = e^{-s t_0} X(s) \quad (1.5)$$

Amortissement

$$\mathcal{L}(x(t) e^{-at}) = X(s + a) \quad (1.6)$$

Valeurs limites

$$x(t \rightarrow 0_+) = s X(s)|_{s \rightarrow \infty} \quad (1.7)$$

$$x(t \rightarrow \infty) = s X(s)|_{s \rightarrow 0} \quad (1.8)$$

Quelques transformées De l'ensemble des transformées de Laplace généralement proposées dans les formulaires mathématiques, on ne gardera que les plus fréquemment utilisées dans l'analyse des systèmes (tableau 1.1). La connaissance de celles-ci, associée aux propriétés rappelées plus haut, permettra de résoudre la plupart des problèmes.

$x(t)$	\leftrightarrow	$X(s)$
$\delta(t)$		1
$\epsilon(t)$		$\frac{1}{s}$
$at \cdot \epsilon(t)$		$\frac{a}{s^2}$
$\exp(-at) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{1}{s + a}$
$\sin(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

TABLE 1.1.: Quelques transformées de Laplace

Pôles et zéros Comme le montre le tableau des transformées, l'image $X(s)$ d'une fonction $x(t)$ est une fraction constituée de deux polynômes

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.9)$$

Les racines de ces polynômes sont importantes pour l'analyse de l'évolution des signaux ou du comportement des systèmes. On définit ainsi

1. Les **pôles** de $X(s)$ qui sont les racines du dénominateur $D(s)$; ils déterminent complètement la partie transitoire (oscillation et amortissement) des réponses temporelles.
2. Les **zéros** de $X(s)$ qui sont les racines du numérateur $N(s)$; leur effet n'intervient que sur les amplitudes des composantes temporelles des signaux $x(t)$.

1.1.2. Quelques exemples introductifs

Exemple 1

Connaissant l'image $I_1(s)$ d'un courant $i_1(t)$

$$I_1(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2}{(s + 3)(s + 4)} \quad (1.10)$$

on souhaite connaître $i_1(0+)$, $i_1(\infty)$ et $i_1(t)$.

Valeurs initiale et finale Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir

$$i_1(0+) = s I_1(s)|_{s \rightarrow \infty} = 0 [A]$$

$$i_1(\infty) = s I_1(s)|_{s \rightarrow 0} = 0 [A]$$

Recherche des pôles Les pôles sont les racines du dénominateur de la fonction-image $I_1(s)$. Dans ce cas, les pôles valent simplement

$$p_1 = -3 \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -4 \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$$

Évolution temporelle Le calcul de $i_1(t)$ se fait en décomposant la fonction $I_1(s)$ en somme de fractions simples faisant intervenir les pôles de $I_1(s)$. Dans ce cas, cette fonction se décompose en deux fractions d'ordre 1

$$I_1(s) = \frac{A_1}{s + 3} + \frac{A_2}{s + 4}$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Se souvenant des transformées élémentaires présentées plus haut, on voit que le courant $i_1(t)$ est décrit par la somme de deux exponentielles

$$i_1(t) = (A_1 \exp(-3t) + A_2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t)$$

que l'on écrira plus généralement sous la forme

$$i_1(t) = (A_1 \exp(-t/\tau_1) + A_2 \exp(-t/\tau_2)) \cdot \epsilon(t)$$

Cette écriture fait apparaître les constantes de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{3} [\text{sec}] \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{4} [\text{sec}]$$

Connaissant ces constantes de temps, on peut en déduire la durée t_{tr} du régime transitoire

$$t_{tr} \approx 5 \tau_{max} = 5 \frac{1}{3} \approx 2 [\text{sec}]$$

Les valeurs des coefficients A_1 et A_2 se trouvent par identification des coefficients des numérateurs :

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{2}{(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s + 4A_1 + 3A_2}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ 4A_1 + 3A_2 &= 2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A_1 = -A_2 &= 2 \\ I_1(s) &= \frac{2}{s+3} - \frac{2}{s+4} \end{aligned}$$

Le courant $i_1(t)$ correspondant à cette fonction-image $I_1(s)$ vaut donc

$$i_1(t) = (2 \exp(-3t) - 2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t) \quad (1.11)$$

Exemple 2

Connaissant l'image $I_2(s)$ d'un courant $i_2(t)$

$$I_2(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} \quad (1.12)$$

on désire calculer $i_2(0+)$, $i_2(\infty)$ et $i_2(t)$.

Valeurs initiale et finale Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir

$$i_2(0_+) = s I_2(s)|_{s \rightarrow \infty} = 1 [A]$$

$$i_2(\infty) = s I_2(s)|_{s \rightarrow 0} = 0 [A]$$

Recherche des pôles Les pôles de la fonction-image $I_2(s)$ sont évidemment les mêmes que dans l'exemple précédent

$$p_1 = -3 \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -4 \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$$

Évolution temporelle Comme les pôles de $I_2(s)$ sont les mêmes que ceux de l'exemple 1, la fonction $I_2(s)$ se décompose en deux fractions simples identiques aux précédentes :

$$I_2(s) = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4}$$

D'où

$$i_2(t) = (A_1 \exp(-3t) + A_2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t)$$

Comme les constantes de temps sont les mêmes que précédemment, la durée du régime transitoire n'est pas changée. Seules les valeurs des coefficients A_1 et A_2 vont distinguer ces deux réponses temporelles.

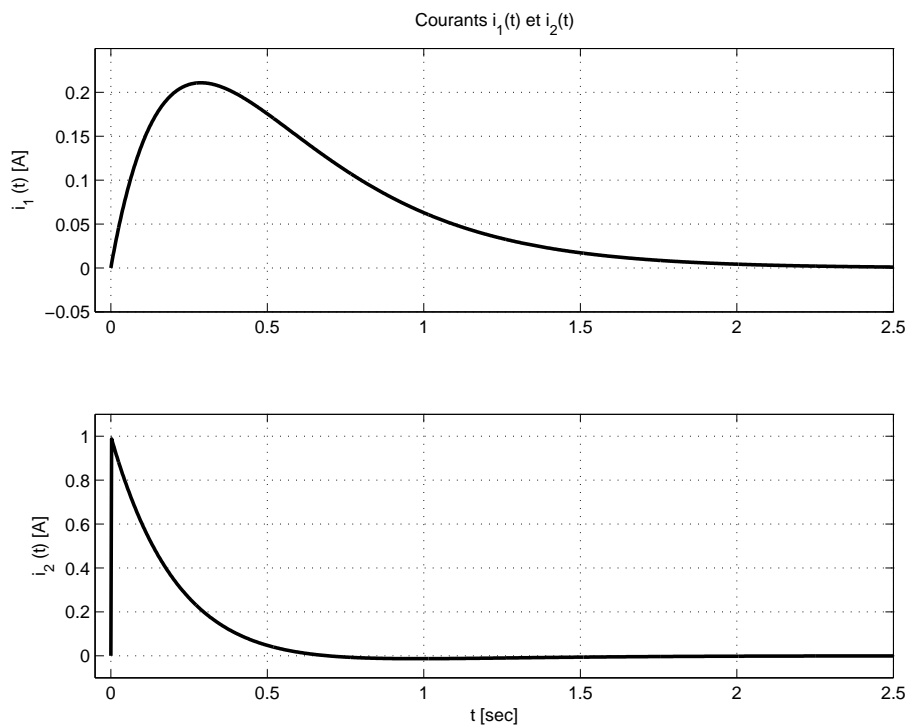


FIGURE 1.1.: Évolution des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

La réduction à un même dénominateur commun donne

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s + 4A_1 + 3A_2}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ 4A_1 + 3A_2 &= 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1 &= -1, & A_2 &= 2 \\ I_2(s) &= \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \end{aligned}$$

qui correspond au courant

$$i_2(t) = (-1 \exp(-3t) + 2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t) \quad (1.13)$$

Une illustration des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ est donnée dans la figure 1.1. Comme on l'a déjà dit, une modification du numérateur, c'est-à-dire des zéros de la fonction-image, ne modifie en rien les constantes de temps des exponentielles constitutives du signal ; seules leurs amplitudes sont changées.

Remarque Dans les expressions temporelles ci-dessus, on a pris soin, en utilisant la fonction $\epsilon(t)$, de toujours préciser que ces expressions étaient nulles pour $t < 0$. Afin d'alléger l'écriture des fonctions à venir, on admettra implicitement que toutes les expressions temporelles sont nulles pour $t < 0$.

Exemple 3

On désire connaître $i_3(0)$, $i_3(\infty)$ et $i_3(t)$ sachant que la fonction-image $I_3(s)$ vaut :

$$I_3(s) = \frac{2s^2 + 15s + 125}{s(s^2 + 10s + 125)} \quad (1.14)$$

Valeurs initiale et finale Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir immédiatement :

$$\begin{aligned} i_3(0) &= sI_3(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} = 2 [A] \\ i_3(\infty) &= sI_3(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = 1 [A] \end{aligned}$$

Recherche des pôles Les pôles sont les racines du dénominateur de la fonction-image $I_3(s)$ qui valent

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -5 \pm j10 \left[\frac{1}{sec} \right]$$

Évolution temporelle Le calcul du courant $i_3(t)$ se fait en décomposant la fonction $I_3(s)$ en somme d'éléments simples. Comme il y a trois pôles, la fonction $I_3(s)$ se décompose en trois termes :

$$I_3(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 5 + j10} + \frac{A_3}{s + 5 - j10} \quad \text{avec} \quad A_2 = A_3^*$$

Les deux dernières fractions se ramènent, par réduction à un même dénominateur commun, à une fraction quadratique de la forme :

$$I_3(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{B(s + 5) + C}{(s + 5)^2 + 10^2}$$

Utilisant le théorème de l'amortissement et le tableau des transformées élémentaires, on en déduit que la forme générale de $i_3(t)$ est

$$i_3(t) = A_1 + \exp(-5t) \left[B \cos(10t) + \frac{C}{10} \sin(10t) \right]$$

que l'on écrira de préférence sous la forme équivalente suivante

$$i_3(t) = A_1 + A_{23} \exp(-5t) \cdot \cos(10t + \alpha_{23})$$

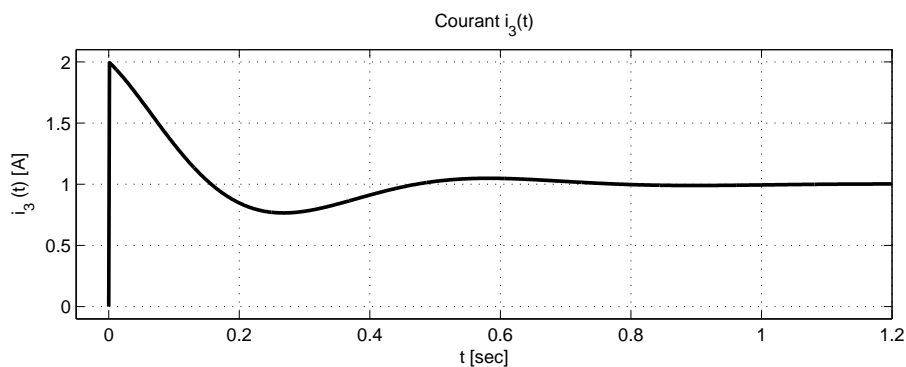


FIGURE 1.2.: Évolution du courant $i_3(t)$

Cette forme de $i_3(t)$ fait apparaître un amortissement de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{5} [sec]$$

et une oscillation de pulsation

$$\omega_p = 10 [rad/sec]$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Pour obtenir l'expression exacte du courant, il faut encore calculer les coefficients A , B et C . En identifiant les numérateurs de la fonction $I_3(s)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_3(s) &= \frac{2s^2 + 15s + 125}{s(s^2 + 10s + 125)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B(s + 5) + C}{(s + 5)^2 + 10^2} \\ &= \frac{(A + B)s^2 + (10A + 5B + C)s + 125A}{s(s^2 + 10s + 125)} \end{aligned}$$

d'où

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 0$$

Ce qui permet d'écrire $I_3(s)$ sous la forme

$$I_3(s) = \frac{1}{s} + \frac{s + 5}{(s + 5)^2 + 10}$$

Ce qui correspond au courant suivant

$$i_3(t) = 1 + \exp(-5t) \cos(10t) \quad (1.15)$$

Conclusions Ici également, la dynamique du signal est décrite par les pôles de la fonction-image. On en déduit en particulier :

– la durée du régime transitoire :

$$t_{tr} \approx 5\tau = 5/5 = 1 \text{ [sec]}$$

– la période de l'oscillation amortie :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{10} \approx 0,6 \text{ [sec]}$$

– le nombre de périodes visibles :

$$N_{osc} = \frac{t_{tr}}{T_p} = \frac{1 \text{ sec}}{0,6 \text{ sec}} \simeq 1,6 \text{ périodes}$$

On constate aussi que la présence de deux pôles conjugués complexes conduit à un trinôme s'écrivant sous la forme d'une somme de deux carrés parfaits

$$s^2 + 10s + 125 = (s + 5)^2 + 10^2$$

dans lesquels on trouve les parties réelle et imaginaire de la paire de pôles. On voit donc que la partie réelle des pôles (-5) entraîne un amortissement temporel correspondant à une translation dans le domaine complexe. Alors que la partie imaginaire ($\pm j10$) conduit à une oscillation impliquant une somme de deux carrés parfaits dans le domaine complexe.

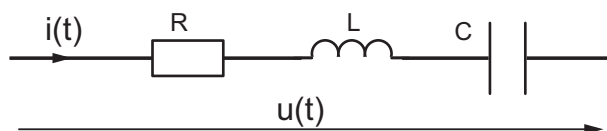


FIGURE 1.3.: Circuit RLC série

1.1.3. Impédances et fonctions de transfert symboliques

Tout circuit constitué de résistances, capacités et inductances peut être modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui représente ainsi un système linéaire et temporellement invariant (LTI).

Dans le cas d'un circuit RLC série à conditions initiales nulles (figure 1.3), l'équation différentielle pour $t \geq 0$ s'écrit

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.16)$$

Sa transformée de Laplace est

$$U(s) = RI(s) + L sI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

d'où

$$U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) = Z(s) I(s) \quad (1.17)$$

On retrouve ici la loi d'Ohm faisant apparaître l'impédance symbolique

$$Z(s) \equiv \frac{U(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (1.18)$$

similaire à l'impédance bien connue en régime sinusoïdal permanent

$$Z(j\omega) \equiv \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (1.19)$$

À partir de ceci, on voit que toutes les descriptions de circuits AC possèdent leur équivalent symbolique. En particulier, la règle du diviseur de tension est applicable et permet de calculer les fonctions de transfert de quadripôles

$$\left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \equiv G(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

1.2. Réponses temporelles vs pôles et zéros

1.2.1. Effets des pôles et zéros

En conclusion des exemples ci-dessus, on retiendra les points suivants :

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Une fonction-image $X(s)$ d'un signal $x(t)$ s'écrit sous la forme d'un rapport de deux polynômes

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.20)$$

2. Le *comportement temporel transitoire* est totalement déterminé par les *pôles* de la fonction $X(s)$ (racines du dénominateur).
3. À *chaque pôle correspond une exponentielle* dont l'exposant est le pôle p_k multiplié par le temps t .
4. La forme générale de la fonction temporelle est donc déterminée par les pôles

$$x(t) = \sum A_k \exp(+p_k t) \quad (1.21)$$

5. Les *constantes de temps* dépendent de la *partie réelle* des pôles

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.22)$$

6. Les *périodes des oscillations* sont fixées par la *partie imaginaire* des pôles

$$T_{pk} = \frac{2\pi}{|Im(p_k)|} \quad (1.23)$$

7. Les racines du numérateur de la fonction-image sont appelées les *zéros de la fonction*; leur effet n'intervient qu'au niveau des amplitudes des fonctions temporelles, mais pas du tout sur les paramètres dynamiques.
8. Les *systèmes stables* sont caractérisés par des pôles à *partie réelle négative*.

Une illustration tirée de [2] montre le comportement des systèmes suivant l'emplacement de leurs pôles dans le plan complexe (figure 1.4).

1.2.2. Effet des conditions initiales

Considérons comme exemple le circuit RLC série pour lequel les conditions initiales (CI) ne sont pas nulles et calculons l'évolution du courant qui le traverse. Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle de ce circuit s'écrit

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0)$$

Sa transformée de Laplace vaut

$$U(s) = RI(s) + L(sI(s) - i_L(0)) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_C(0)}{s}$$

Regroupant les facteurs de la fonction $I(s)$, on obtient

$$U(s) + L i_L(0) - \frac{u_C(0)}{s} = I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) = I(s) \frac{1 + sRC + s^2LC}{sC}$$

1.2. Réponses temporelles vs pôles et zéros

Type de pôle	Plan complexe $s = \sigma \pm j\omega_0$	Graphe de la réponse impulsionnelle	Remarques
Réel négatif			Asymptotiquement stable
Réel positif			Instable
Nul (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Complexe conjugué Partie réelle négative			Asymptotiquement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 2)			Instable
Complexe conjugué Partie réelle positive			Instable
Nuls (Multiplicité = 2)			Instable

FIGURE 1.4.: Position des pôles et réponses temporelles [2]

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

On voit ainsi que les conditions initiales jouent le rôle de sources de tension décrivant l'état du système en l'instant $t = 0$. De cette équation, on peut tirer le courant

$$I(s) = \frac{sC}{1 + sRC + s^2LC} U(s) + \frac{sLC i_L(0) - C u_C(0)}{1 + sRC + s^2LC}$$

On constate alors que les dénominateurs des deux fractions sont les mêmes et qu'ils ne dépendent pas des conditions initiales. On en déduit que les pôles de la fonction, donc la dynamique de la réponse temporelle, sont indépendants des conditions initiales. Seules les amplitudes des fonctions temporelles seront modifiées par celles-ci.

Plus généralement, on dira que la réponse d'un système est décrite par la somme de deux termes faisant intervenir le signal d'entrée $X(s)$, le système $G(s) = N(s)/D(s)$ et ses conditions initiales

$$Y(s) = X(s) \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{P(s; CI)}{D(s)} \quad (1.24)$$

où :

- $P(s; CI)$ est un polynôme dont les coefficients dépendent directement des CI et qui s'annule si celles-ci sont nulles ;
- $N(s)$ et $D(s)$ sont le numérateur et dénominateur de la fonction décrivant le système.

Ce résultat est important car il montre que la connaissance des pôles du système, c'est-à-dire du dénominateur de la fonction $G(s)$ décrivant le système suffit pour prévoir le comportement temporel de celui-ci.

1.3. Analyse d'un système d'ordre 1

1.3.1. Fonction de transfert

L'exemple type d'un système d'ordre 1 est le filtre passe-bas RC (figure 1.5). Dans le cas où le courant de sortie du quadripôle RC est nul, le quadripôle est décrit par l'équation différentielle suivante (CI nulle)

$$u_1(t) = R i(t) + u_2(t) \quad \text{avec} \quad u_2(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.25)$$

La transformation de Laplace de ces deux équations donne

$$U_1(s) = R I(s) + U_2(s) \quad \text{avec} \quad U_2(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

Tirant le courant $I(s) = sC U_2(s)$ de la deuxième équation et le portant dans la première, il vient

$$U_1(s) = sRC U_2(s) + U_2(s)$$

Sachant la fonction de transfert d'un quadripôle est définie comme le rapport des tensions sortie/entrée, on retrouve la fonction de transfert bien connue du circuit RC

$$G(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (1.26)$$

dont la constante de temps $\tau = RC$ détermine la dynamique du circuit.

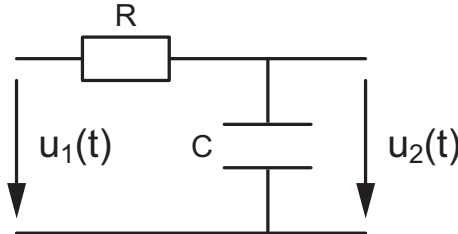


FIGURE 1.5.: Circuit élémentaire d'ordre 1

De manière générale, un système d'ordre 1 est représenté par une fonction de transfert de la forme

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (1.27)$$

dont la description se fera de préférence dans une des deux formes canoniques suivantes

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_1 s} \quad (\text{forme de Bode}) \quad (1.28)$$

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + 1/\tau_2}{s + 1/\tau_1} = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + \omega_2}{s + \omega_1} \quad (\text{forme de Laplace}) \quad (1.29)$$

avec

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_0} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{b_1}{b_0}$$

1.3.2. Pôle et réponse transitoire

Un tel système possède un pôle et un zéro qui valent

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad z_1 = -\frac{1}{\tau_2} \quad (1.30)$$

La réponse transitoire de ce système est alors décrite par une exponentielle

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{1}{|p_1|} \quad (1.31)$$

1.3.3. Réponse indicielle

L'image de la réponse indicielle d'un système est décrite par

$$Y(s) = X(s) G(s) \quad \text{avec} \quad X(s) = \frac{1}{s} \quad (1.32)$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Cas particulier Dans le cas d'un simple filtre passe-bas, on a

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} \frac{1}{1 + s\tau} \\ &= \frac{1}{s} \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \\ &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + 1/\tau} \end{aligned}$$

avec $A_0 = 1 = -A_1$. La transformation inverse conduit à l'expression bien connue

$$y(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.33)$$

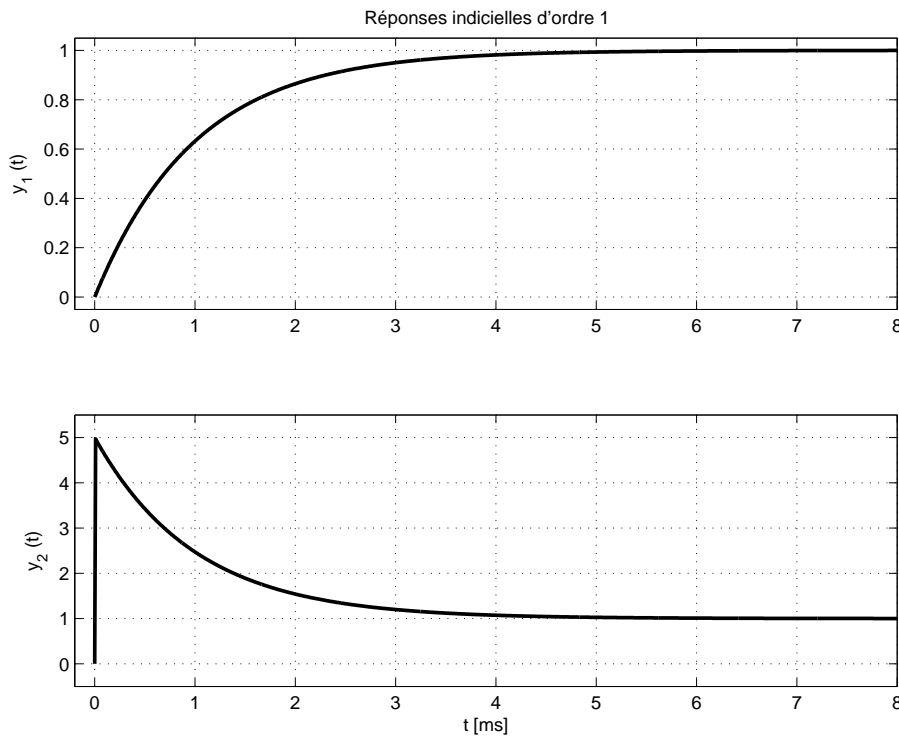


FIGURE 1.6.: Réponses indicielles de deux systèmes d'ordre 1

Cas général Dans le cas d'un système d'ordre 1 quelconque décrit par

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (1.34)$$

on peut montrer que, indépendamment de la valeur des coefficients, les réponses indicielles sont telles que

1. L'évolution temporelle est entièrement décrite par

$$y(t) = y(0) + (y(\infty) - y(0)) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (1.35)$$

2. Le temps pour atteindre la valeur $y(t)$ vaut

$$t = \tau \ln \left(\frac{y(\infty) - y(0)}{y(\infty) - y(t)} \right) \quad (1.36)$$

3. Le 63% de l'évolution temporelle est réalisée au temps $t = \tau$ car on a

$$\exp(-t/\tau)|_{t=\tau} = e^{-1} \simeq 0.37 \quad (1.37)$$

4. Le temps de montée défini comme le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la variation $y(\infty) - y(0_+)$ vaut

$$t_r \equiv t_{90\%} - t_{10\%} = \tau \ln(9) \quad (1.38)$$

Les réponses indicielles de deux systèmes d'ordre 1 décrits par

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + s\tau_1}, \quad G_2(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1} \quad \text{avec } \tau_1 = 1 \text{ ms}, \tau_2 = 5 \text{ ms}$$

sont illustrées dans la figure 1.6.

1.4. Analyse d'un système d'ordre 2

1.4.1. Fonction de transfert

L'exemple type d'un système d'ordre 2 est le filtre passe-bas RL-C (figure 1.7). Dans le cas où le courant de sortie est nul, le quadripôle est décrit par l'équation différentielle suivante (pour laquelle on admet que les CI sont nulles)

$$u_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) \quad (1.39)$$

$$u_2(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.40)$$

La transformation de Laplace de ces deux équations donne

$$\begin{aligned} U_1(s) &= RI(s) + sLI(s) + U_C(s) \\ U_2(s) &= U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} \end{aligned}$$

Tirant le courant $I(s) = sC U_2(s)$ de la deuxième équation et le portant dans la première, il vient

$$U_1(s) = sRC U_2(s) + s^2LC U_2(s) + U_2(s)$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

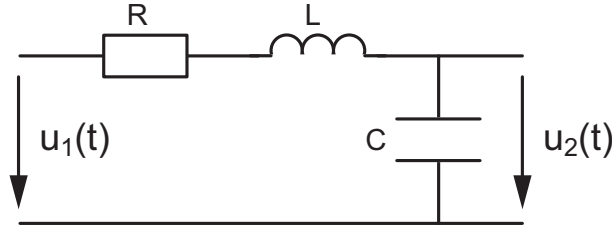


FIGURE 1.7.: Circuit élémentaire d'ordre 2

Sachant que la fonction de transfert d'un quadripôle est définie comme le rapport des tensions de sortie et d'entrée, on retrouve la fonction de transfert bien connue du filtre passe-bas

$$G(s) \equiv \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} \quad (1.41)$$

Comme un système d'ordre 2 peut représenter autre chose qu'un simple circuit RLC, on préfère travailler avec une expression plus générale pour le dénominateur

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 \quad (1.42)$$

faisant intervenir la pulsation naturelle du système ω_n et le facteur de qualité Q_0 ou son inverse, le coefficient d'amortissement

$$\zeta \equiv \frac{1}{2Q_0} \quad (1.43)$$

Ce qui donne

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2} \quad (1.44)$$

De manière générale, un système d'ordre 2 est représenté par une fonction de transfert de la forme

$$G(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2}{b_0 + b_1s + b_2s^2} \quad (1.45)$$

Pour ce qui suit, on se contentera d'analyser les systèmes de type passe-bas décrits par

$$G(s) = \frac{1}{1 + b_1s + b_2s^2}$$

dont la description se fera dans une des deux formes canoniques suivantes

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2} \quad (\text{forme de Bode}) \quad (1.46)$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{forme de Laplace}) \quad (1.47)$$

1.4.2. Pôles et réponse transitoire

Les pôles d'un système décrit par cette fonction de transfert $G(s)$ valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.48)$$

Selon la valeur de ζ , on voit que ces pôles peuvent être réels, complexes ou imaginaires. Pour étudier le comportement temporel du système, il faut donc considérer les trois situations suivantes.

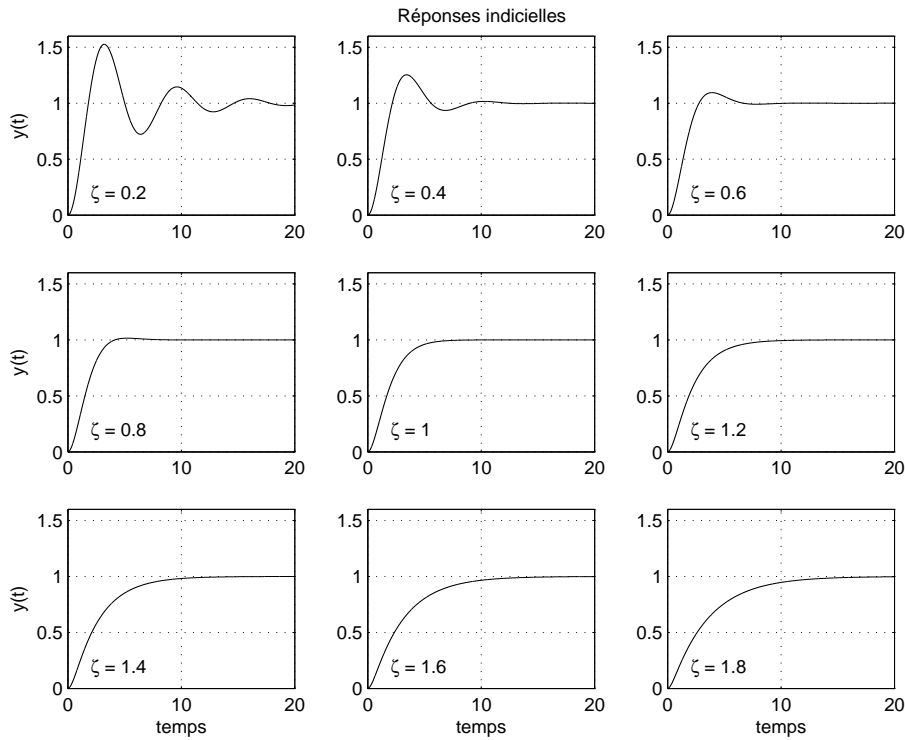


FIGURE 1.8.: Réponses indicielles d'un système d'ordre 2 en fonction de ζ

$\zeta > 1$: les pôles sont réels distincts La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_{1,2} = \frac{1}{|p_{1,2}|} \quad (1.49)$$

La durée du régime transitoire t_{tr} vaut alors

$$t_{tr} \simeq 5 \tau_{max} \quad (1.50)$$

$\zeta = 1$: les pôles sont réels confondus La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau} (1 + A_2 t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{|p_2|} \quad (1.51)$$

Dans ce cas, la durée du régime transitoire vaut

$$t_{tr} \simeq 7 \tau \quad (1.52)$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

$0 \leq \zeta < 1$: **les pôles sont complexes** La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau} \cos(\omega_p t + \alpha_1) \quad (1.53)$$

avec

$$\tau = \frac{1}{|Re(p_{1,2})|} = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (1.54)$$

$$\omega_p \equiv \frac{2\pi}{T_p} = |Im(p_{1,2})| = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.55)$$

La durée du régime transitoire et le nombre de périodes visibles valent alors

$$t_{tr} \simeq 5\tau, \quad N_{osc} \simeq \frac{t_{tr}}{T_p} \quad (1.56)$$

Tenant compte de ces expressions, on en déduit que pour les systèmes dont le facteur de qualité est supérieur à 0.5, le nombre de périodes visibles durant la partie transitoire vaut

$$N_{osc} \simeq \frac{5\tau}{T_p} = 5 \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi \zeta} = \frac{5}{2\pi} \sqrt{4Q_0^2 - 1} \quad (1.57)$$

Dans le cas où le facteur de qualité est supérieur à 1, le nombre de périodes visibles vaut environ $1.6 Q_0$.

1.4.3. Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

La réponse indicielle d'un système d'ordre 2 est décrite par

$$Y(s) = X(s) G(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.58)$$

L'image de Laplace de la réponse $y(t)$ possède un pôle p_0 dû au signal appliqué $x(t) = \epsilon(t)$ et une paire de pôles $p_{1,2}$ provenant du système $G(s)$:

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad p_{1,2} = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.59)$$

La figure 1.8 illustre la réponse indicielle d'un système d'ordre 2 pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ζ . Le regroupement de ces réponses sur un seul graphe (figure 1.9 a) permet de mettre en évidence les caractéristiques de la réponse indicielle d'un système d'ordre 2.

Position des pôles La figure 1.9 b montre comment les pôles se déplacent dans le plan complexe lorsque ζ varie de 0 à l'infini. On peut relever que pour $0 \leq \zeta \leq 1$, l'angle ψ parcouru sur le demi-cercle est tel que $\sin(\psi) = \zeta$. Globalement, on peut alors considérer les quatre situations suivantes

1. $\zeta = 0$: **les pôles sont imaginaires** ; ils se situent sur l'axe imaginaire en $\pm j\omega_n$.

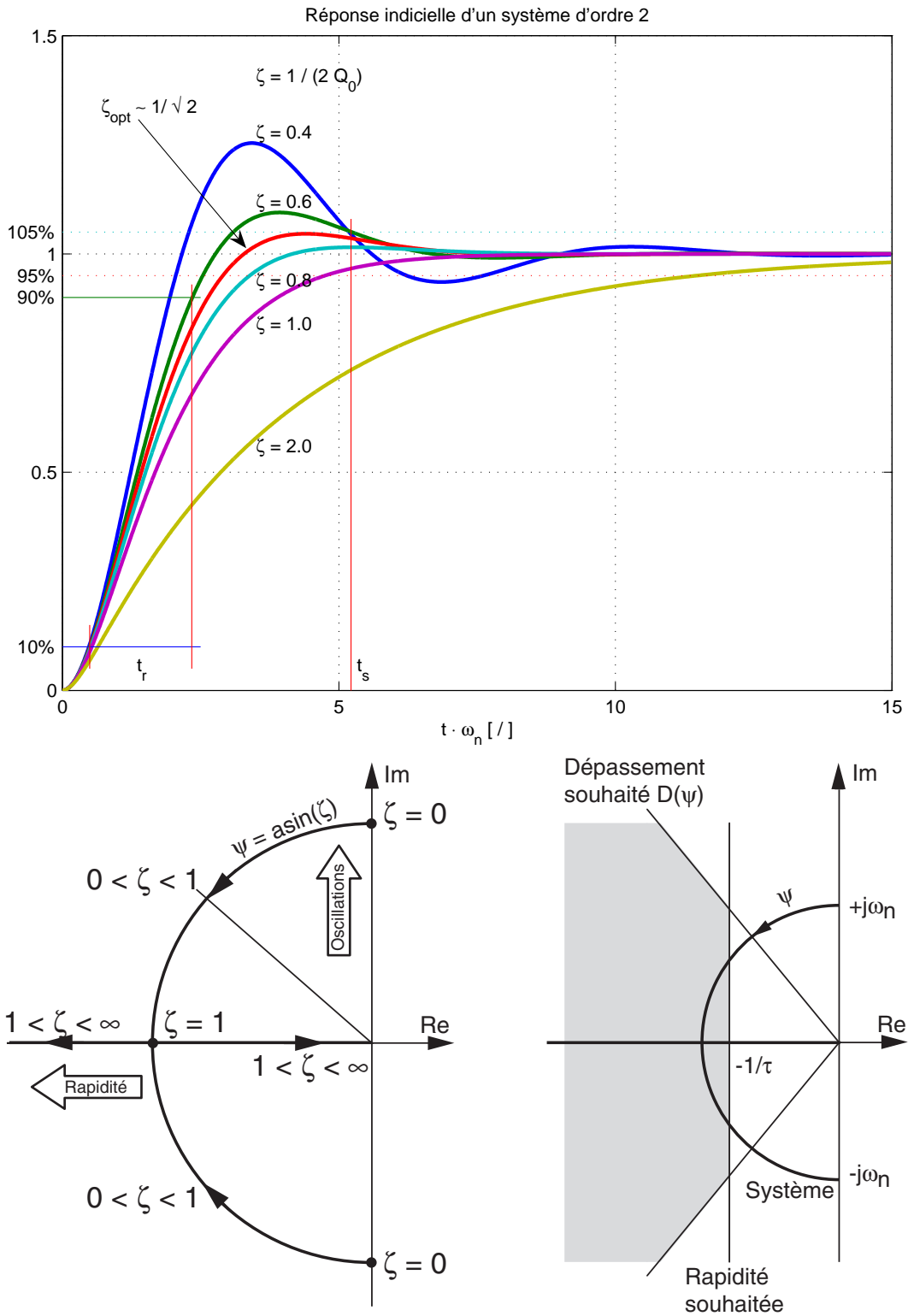


FIGURE 1.9.: Réponse indicielle et lieu des pôles en fonction de ζ

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

2. $0 < \zeta < 1$: **les pôles sont complexes** ; ils se déplacent alors sur un demi-cercle de rayon ω_n .
3. $\zeta = 1$: **les pôles sont réels confondus** ; ils se situent sur l'axe réel en $-\omega_n$.
4. $1 < \zeta < \infty$: **les pôles sont réels négatifs distincts** ; l'un des deux pôles parcourt l'axe réel négatif de $-\omega_n$ à $-\infty$ alors que le deuxième se déplace de $-\omega_n$ à 0 et ralentit la réponse temporelle.

Domaine intéressant Sur la figure 1.9 c, on a représenté dans le plan complexe un domaine délimité par le dépassement D souhaité (droite inclinée), la constante de temps désirée τ (droite verticale) et le lieu des pôles décrivant le système d'ordre 2. Ainsi, la partie grisée correspond-elle à une réponse indicielle dont le dépassement est inférieur à D et le temps d'établissement t_s inférieur à 3τ . On voit que seules certaines valeurs de ζ permettent d'atteindre le comportement souhaité.

Temps caractéristiques Dans le cas où $\zeta < 1$ ou, de manière équivalente, $Q_0 > 0.5$, ces éléments caractéristiques sont

1. la constante de temps

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (1.60)$$

2. la période d'oscillation

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.61)$$

3. le temps d'établissement à 5% de la valeur asymptotique

$$t_s \equiv t_{(100\pm 5)\%} \simeq 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (1.62)$$

4. la durée du régime transitoire

$$t_{tr} \equiv t_{(100\pm 1)\%} \simeq 5\tau = \frac{5}{\zeta\omega_n} \quad (1.63)$$

5. le nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr}}{T_p} = \frac{5\tau}{T_p} \simeq 1.6 Q_0 \quad (1.64)$$

6. le dépassement qui ne dépend que de $\zeta < 1$

$$D = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Leftrightarrow \zeta(D) = \frac{|\ln(D)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(D)}} \quad (1.65)$$

7. le temps de montée valant très approximativement

$$t_r \equiv t_{90\%} - t_{10\%} \simeq \frac{1.8}{\omega_n} \quad (1.66)$$

La figure 1.10 montre l'évolution des grandeurs caractéristiques t_r , t_s et D en fonction de ζ . Il est important de noter que le calcul du temps de montée d'un système d'ordre 2 conduit à une équation transcendante pour laquelle il n'y a pas de solution analytique, d'où l'approximation proposée par l'équation (1.66).

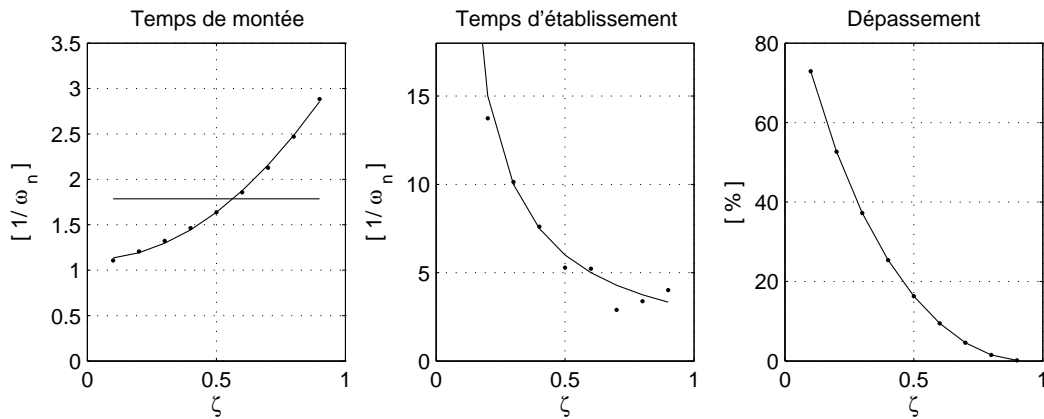


FIGURE 1.10.: Temps de montée, d'établissement à 5% et dépassement en fonction de ζ

Réponse optimum Dans la mesure où l'on recherche une réponse atteignant rapidement sa valeur asymptotique, la figure 1.9 a montré qu'un compromis raisonnable entre le temps de montée t_r , le dépassement D et le temps d'établissement t_s est obtenu lorsque $\zeta \simeq 0.7$. Pour cette valeur particulière de ζ , on obtient

$$\left. \begin{array}{l} t_r \simeq \frac{2.1}{\omega_n} \\ t_s \simeq \frac{3}{\omega_n} \\ D \simeq 5\% \end{array} \right\} \text{ lorsque } \zeta \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 \quad (1.67)$$

1.5. Réponses temporelles des circuits linéaires

On notera en préambule que les principes présentés ci-après dans le cadre de circuits électriques sont tout à fait généraux et applicables à n'importe quel système linéaire et temporellement invariant.

1.5.1. Représentation des quadripôles

Un quadripôle est décrit complètement par des deux grandeurs d'entrée ($u_1(t)$, $i_1(t)$) et ses deux grandeurs de sortie ($u_2(t)$, $i_2(t)$). Après transformation de Laplace, on obtient les images des tension et courant d'entrée $U_1(s)$ et $I_1(s)$, et des tension et courant de sortie $U_2(s)$ et $I_2(s)$ qui permettront de représenter le circuit par la fonction de transfert $Q(s)$ (figure 1.11).

Le plus souvent, on se contente de caractériser un quadripôle par le rapport des tensions d'entrée et de sortie :

$$G(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.68)$$

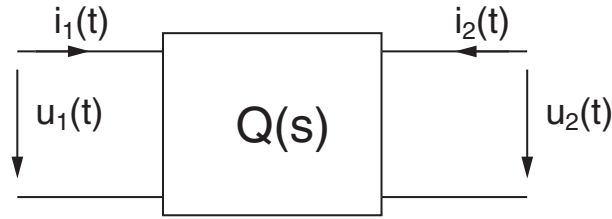


FIGURE 1.11.: Quadripôles et ses signaux d'entrée et de sortie

Cependant et plus généralement, ce sont six relations qui peuvent être définies entre les signaux d'entrée et de sortie :

– l'impédance d'entrée

$$Z_{in}(s) \equiv \left. \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.69)$$

– le gain en tension

$$A_U(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.70)$$

– le gain en courant

$$A_I(s) \equiv \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.71)$$

– la transimpédance

$$Z_m(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.72)$$

– la transconductance

$$Y_m(s) \equiv \left. \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.73)$$

– l'impédance de sortie

$$Z_{out}(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{-I_2(s)} \right|_{U_1=0} \quad (1.74)$$

1.5.2. Pôles d'un système et réponse temporelle

Considérons l'entrée $x(t)$ (un courant ou une tension) d'un quadripôle et $y(t)$ sa réponse (également un courant ou une tension) ainsi que $Q(s)$ une des six représentations du circuit. On a alors

$$Y(s) = X(s) Q(s) + \frac{P(s; CI)}{D(s)} \quad (1.75)$$

où $P(s; CI)$ est un polynôme en s , dont les coefficients sont déterminés par les conditions initiales, et $D(s)$ est le dénominateur de $Q(s)$. Les pôles associés à $Y(s)$ proviennent du système $Q(s)$ (régime transitoire) et du signal d'entrée $X(s)$ (régime forcé).

1.5. Réponses temporelles des circuits linéaires

Dans le cas où les pôles ne sont pas confondus, la réponse temporelle $y(t)$ est alors la somme des fonctions temporelles décrivant le régime transitoire (dicté par $Q(s)$) et le régime forcé (dicté par $X(s)$)

$$y(t) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(p_m t) + \sum_{n=1}^N B_n \exp(p_n t) \quad (1.76)$$

où les p_m sont les M pôles de $Q(s)$ et les p_n sont les N pôles de $X(s)$.

1.5.3. Évaluation du comportement temporel

Pour évaluer le comportement temporel d'un système à CI nulles décrit par sa fonction de transfert générale $Q(s)$, il suffit d'appliquer les étapes suivantes.

1. Rechercher l'image $X(s)$ du signal d'entrée et la représentation $Q(s)$ souhaitée du système. Le signal de sortie est alors décrit par

$$Y(s) = X(s) Q(s) \quad (1.77)$$

2. Calculer les valeurs asymptotiques du signal de sortie

$$y(t \rightarrow 0_+) = s Y(s)|_{s \rightarrow \infty} \quad (1.78)$$

$$y(t \rightarrow \infty) = s Y(s)|_{s \rightarrow 0} \quad (1.79)$$

3. Rechercher les pôles de $Y(s)$, c'est-à-dire les racines de $D(s)$. On en déduira alors que le système est

- a) **stable** si tous les pôles sont à **parties réelles négatives** ;
- b) **marginalelement stable** s'il y a une paire de pôles purement **imaginaires** ou un pôle **nul** alors que les autres sont à parties réelles négatives ;
- c) **instable**, s'il y a un pôle à **partie réelle positive**.

4. Calculer les paramètres dynamiques de la réponse temporelle en considérant

- a) pour chaque pôle réel p_k

- i. la constante de temps

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.80)$$

- ii. la durée du régime transitoire du pôle p_k

$$t_{tr,k} = 5\tau_k \quad (1.81)$$

- b) pour chaque paire de pôles complexes p_k

- i. la constante de temps de l'amortissement

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.82)$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

ii. la période de l'oscillation

$$T_k = \frac{2\pi}{|Im(p_k)|} \quad (1.83)$$

iii. la durée de l'oscillation

$$t_{tr,k} = 5\tau_k \quad (1.84)$$

iv. le nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr,k}}{T_k} \quad (1.85)$$

5. Evaluer la durée du régime transitoire

$$t_{tr} \simeq 5 \max \{ \tau \} \quad (1.86)$$

Dans le cas (plutôt rare) où l'on souhaite obtenir l'expression exacte de $y(t)$, il faut décomposer $Y(s)$ en somme de fractions simples, puis calculer les valeurs de chacun des coefficients correspondants. La réponse $y(t)$ est alors la somme des fonctions temporelles correspondant à chacune des fractions simples.

1.5.4. Exemple

On considère ici la mise en cascade d'un filtre passe-bas d'ordre 1 suivi d'un filtre passe-bande d'ordre 2. Admettant que l'ensemble est décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{1}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s} \frac{0.3 \cdot 10^{-4}s}{1 + 0.3 \cdot 10^{-4}s + 1 \cdot 10^{-8}s^2}$$

on se propose d'évaluer la réponse indicielle de ce système d'ordre 3 dont les CI sont admises nulles.

En suivant les étapes proposées ci-dessus, on trouve :

1. L'image $Y(s)$ du signal de sortie décrit par une fonction d'ordre 4

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s} \frac{0.3 \cdot 10^{-4}s}{1 + 0.3 \cdot 10^{-4}s + 1 \cdot 10^{-8}s^2}$$

2. Les valeurs asymptotiques de $y(t)$

$$y(t \rightarrow 0_+) = sY(s)|_{s \rightarrow \infty} = \frac{\infty}{\infty^3} = 0$$

$$y(t \rightarrow \infty) = sY(s)|_{s \rightarrow 0} = \frac{0}{1} = 0$$

3. Les pôles et zéros de $Y(s)$ au nombre de 4 et 1, respectivement

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 && \text{dû au signal d'entrée} \\ p_1 &= -1000 [1/sec] && \text{dû au filtre passe-bas} \\ p_{2,3} &= -1500 \pm j9887 [1/sec] && \text{dus au filtre passe-bande} \\ z_1 &= 0 && \text{dû au filtre passe-bande} \end{aligned}$$

1.6. Réponse impulsionnelle d'un système

Comme tous les pôles du filtre sont à partie réelle négative, on en déduit que celui-ci est stable et que la réponse temporelle est décrite par

$$y(t) = A_0 + A_1 \exp(-1000t) + A_2 \exp(-1500t) \cos(9887t + \alpha_2)$$

On notera que le pôle p_0 , dû au signal d'entrée, est compensé par le zéro z_1 du filtre passe-bande (mathématiquement, les termes en s du numérateur et du dénominateur se simplifient) et conduit ainsi à l'annulation de la constante A_0 .

4. Les paramètres dynamiques fixés par

- a) le pôle réel p_1 qui donne la constante de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{|Re(p_1)|} = 1 [ms]$$

et une durée de l'exponentielle amortie valant $t_{tr1} \simeq 5 \tau_1 = 5 [ms]$

- b) la paire de pôles complexes conjugués $p_{2,3}$ qui conduit à

- i. un amortissement de constante de temps

$$\tau_{23} = \frac{1}{|Re(p_{2,3})|} = 0.667 [ms]$$

- ii. une oscillation de période

$$T_{23} = \frac{2\pi}{|Im(p_{2,3})|} = 0.635 [ms]$$

- iii. une oscillation de durée

$$t_{tr,23} = 5\tau_{23} = 3.3 [ms]$$

- iv. un nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr,23}}{T_{23}} = \frac{3.3 [ms]}{0.635 [ms]} \simeq 5.2$$

5. La durée du régime transitoire

$$t_{tr} \simeq 5 \max\{\tau_k\} = 5 \cdot 1 [ms] = 5 [ms]$$

La réponse indicielle $y(t)$ de ce filtre est présentée à la figure 1.12 avec les contributions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ dues, respectivement, aux pôles p_1 et $p_{2,3}$.

1.6. Réponse impulsionnelle d'un système

Pour des raisons de simplicité de description ou d'analyse, on étudie souvent les signaux et systèmes dans le domaine fréquentiel. Cependant, ceux-ci évoluent toujours dans le domaine temporel et leurs réponses physiques sont toujours temporelles. Parmi celles-ci, on distingue plus particulièrement les suivantes :

- la réponse sinusoïdale due à un signal d'entrée en régime sinusoïdal permanent ;
- la réponse indicielle due à un saut unité appliqué à l'entrée du système ;
- la réponse impulsionnelle consécutive à l'application d'un signal purement théorique non réalisable, l'impulsion de Dirac.

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

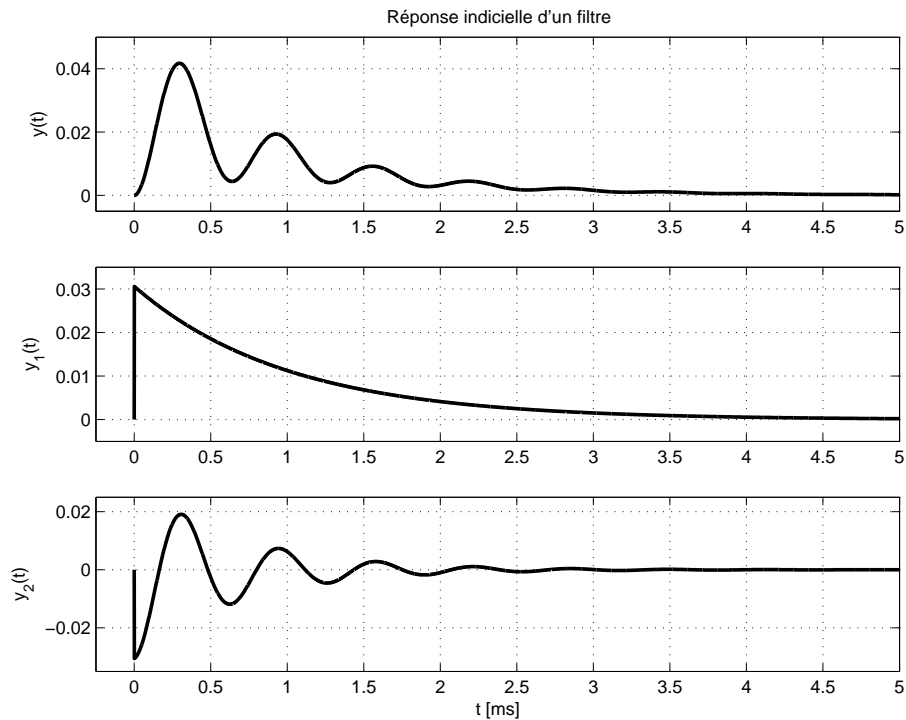


FIGURE 1.12.: Réponse indicielle $y(t)$ d'un filtre passe-bande et ses deux composantes temporelles $y_1(t)$, $y_2(t)$

1.6.1. Remarques concernant l'impulsion de Dirac

Définition

L'impulsion de Dirac est définie comme une impulsion d'amplitude infinie, de largeur infiniment petite et de surface unité. Mathématiquement, cela revient à la décrire comme suit

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.87)$$

Valeur instantanée d'une fonction

L'utilisation de l'impulsion de Dirac permet de calculer la valeur instantanée d'une fonction par l'intermédiaire de l'intégrale suivante :

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1.88)$$

En effet, si la fonction $f(t)$ est continue aux environs de t_0 , le produit $f(t) \delta(t - t_0)$ est nul partout sauf en t_0 ; on peut donc remplacer $f(t)$ par sa valeur en t_0 , $f(t_0)$. L'intégrale s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

puisque, par définition, l'impulsion de Dirac possède une surface unité.

De l'équation 1.88, on déduit les résultats intéressants suivants

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta - t) d\theta \quad (1.89)$$

$$f(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta - (t - t_0)) d\theta \quad (1.90)$$

Ces deux équations portent le nom d'intégrale de convolution que l'on écrit symboliquement sous la forme

$$f(t) = f(t) \otimes \delta(t) \quad (1.91)$$

$$f(t - t_0) = f(t) \otimes \delta(t - t_0) \quad (1.92)$$

On remarque ainsi que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution.

Poids d'une impulsion de Dirac

En pratique, la surface d'une impulsion de Dirac n'est que rarement égale à l'unité; de plus, si l'impulsion est une tension électrique, sa surface se mesure en [V sec]. Cette dernière est souvent désignée par *le poids de l'impulsion de Dirac*. On remarque ainsi que, lorsque l'on parle abusivement de "l'amplitude" d'une impulsion de Dirac, il s'agit en réalité de son poids, donc de sa surface.

1.6.2. Réponse impulsionnelle

Mathématiquement, la réponse impulsionnelle d'un système s'obtient par transformation inverse de sa fonction de transfert

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (1.93)$$

En effet, $h(t)$ est bien la réponse du système à l'application d'une impulsion de Dirac $x(t) = \delta(t)$ car on a

$$Y(s) = X(s) H(s) = 1 \cdot H(s) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = 1 \cdot h(t) = h(t)$$

Pratiquement, on ne peut pas réaliser une impulsion de Dirac; on ne peut que l'approcher avec, par exemple, une impulsion rectangulaire de durée très courte par rapport aux constantes de temps du système. De plus, il faudrait que son amplitude soit suffisamment grande pour obtenir une action notable sur le système mais alors celui-ci risque de saturer.

Considérons donc, pour saisir concrètement ce qui se passe dans un système, une impulsion réelle de durée Δt suffisamment petite et d'amplitude E que l'on applique à un circuit électrique d'ordre 2 à l'état d'équilibre nul.

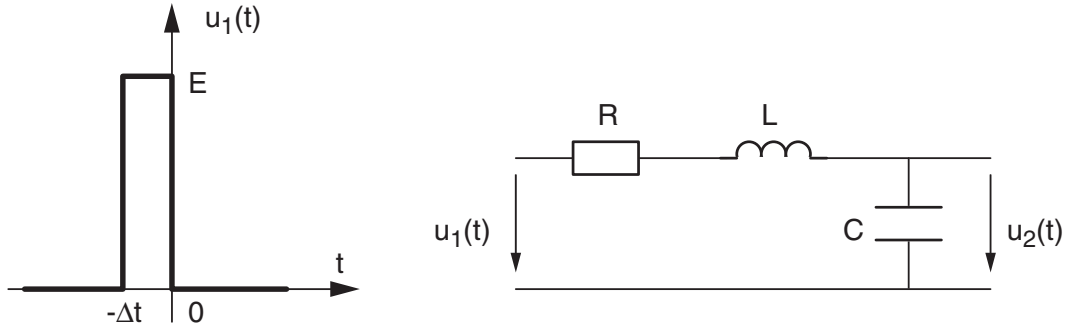


FIGURE 1.13.: Impulsion rectangulaire appliquée à un circuit RL-C

Si la durée de l'impulsion est très petite, le condensateur n'a pas le temps de se charger de manière appréciable. On peut alors considérer que le circuit est constitué de la résistance et de l'inductance seulement et qu'il est parcouru par le courant

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t + \Delta t}{\tau}\right) \right), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Comme la durée de l'impulsion est très courte, on peut remplacer l'exponentielle par son approximation linéaire et l'on obtient

$$i(t) \simeq \frac{E}{R} \left(1 - \left(1 - \frac{t + \Delta t}{\tau} \right) \right) = \frac{E}{R} \left(\frac{t + \Delta t}{\tau} \right), \quad -\Delta t \leq t \leq 0$$

Au moment où l'impulsion revient à zéro en l'instant $t = 0$, le courant qui a pris naissance dans le circuit vaut donc

$$i(0) \simeq \frac{E}{R} \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{E}{R} \frac{\Delta t}{L/R} = \frac{E}{L} \Delta t$$

Ainsi, pour $t > 0$, la tension appliquée au circuit est nulle alors que le courant $i(t)$ ne l'est pas. On doit donc calculer un circuit à tension d'entrée nulle mais à conditions initiales non nulles :

$$i_0 = i_L(0) = \frac{E}{L} \Delta t \quad u_C(0) = 0 \quad (1.94)$$

L'équation différentielle pour $t \geq 0$ s'écrit donc :

$$u_1(t) = 0 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0) \quad (1.95)$$

En transformant de Laplace et tenant compte des conditions initiales, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= RI(s) + L(sI(s) - i_L(0)) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0)}{s} \\ &= \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) - Li_0 \\ &= \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) - E\Delta t \end{aligned}$$

1.6. Réponse impulsionnelle d'un système

Le courant circulant dans le circuit vaut donc :

$$I(s) = \frac{sC}{1 + sRC + s^2LC} E\Delta t \quad (1.96)$$

et la tension de sortie, prise aux bornes du condensateur, s'écrit :

$$U_2(s) = \frac{I(s)}{sC} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} E\Delta t \quad (1.97)$$

On retrouve, dans cette expression, la fonction de transfert $H(s)$ du circuit :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} \quad (1.98)$$

Conclusion On a ainsi trouvé le résultat important suivant : si l'impulsion est suffisamment brève, la tension de sortie $U_2(s)$ est proportionnelle à la fonction de transfert du circuit et à la surface de l'impulsion :

$$U_2(s) = E\Delta t \cdot H(s) \quad (1.99)$$

On peut montrer de manière générale que ceci est vrai quelle que soit la forme de l'impulsion à condition que sa durée soit négligeable par rapport aux temps caractéristiques du circuit.

On obtient alors le résultat général suivant :

$$U_2(s) = H(s) \int_{-\Delta t}^0 u_1(t) dt \quad \text{si } \Delta t \ll \tau_{min} \quad (1.100)$$

qui, après transformation inverse, s'écrit également :

$$u_2(t) = h(t) \cdot \int_{-\Delta t}^0 u_1(t) dt \quad (1.101)$$

avec, comme on l'a vu

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (1.102)$$

L'intérêt porté à la réponse impulsionnelle d'un système est dû au fait que cette réponse représente uniquement le système, indépendamment de la forme du signal d'entrée si celui est de durée suffisamment courte.

Il ne faut cependant pas oublier qu'une impulsion de courte durée ne fournit au système qu'une énergie très faible. L'amplitude du signal de sortie, qui a une durée beaucoup plus importante, sera donc beaucoup plus petite que l'amplitude du signal d'entrée. On court ainsi le risque de devoir mesurer un signal fortement entaché par le bruit de mesure.

1.7. Produit de convolution

Dans l'analyse des systèmes linéaires, les réponses temporelles sont souvent étudiées en passant par la résolution des équations différentielles ou l'utilisation de la transformation de Laplace ; c'est-à-dire que l'analyse et la résolution se font dans un espace autre que le domaine temporel.

Or, ainsi qu'on va le voir à l'aide d'un diagramme, le produit de convolution permet de calculer la réponse $y(t)$ d'un système à un signal quelconque $x(t)$ en restant dans l'espace temps. Ceci est très important pour les applications temps réel réalisées à l'aide d'un processeur numérique par exemple.

1.7.1. Réponse temporelle des systèmes linéaires

Considérons pour cela un système linéaire et temporellement invariant auquel on applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$. La réponse à ce signal est la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système (figure 1.14 a). Elle représente ce dernier de manière complète, comme le font la fonction de transfert $H(s)$ ou l'équation différentielle.

Puisque le système est temporellement invariant, le décalage de l'impulsion d'une valeur t_d , entraînera le même décalage de la réponse impulsionnelle qui vaut alors $h(t - t_d)$ (figure 1.14 b).

Comme le système est également linéaire, une modification de l'amplitude de l'impulsion de Dirac entraînera une modification de l'amplitude de la réponse impulsionnelle : à un signal d'entrée $x(\theta) \cdot \delta(t - \theta)$, le système répondra par $x(\theta) \cdot h(t - \theta)$ (figure 1.14 c).

Nous avons vu au paragraphe précédent que le signal d'entrée $x(t)$ peut être décrit à l'aide d'une somme d'impulsions de Dirac :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \delta(t - \theta) d\theta$$

Donc, comme le système est linéaire, la réponse à cette somme d'impulsions est la somme des réponses impulsionnelles (figure 1.14d) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

Ce résultat est important parce qu'il permet de calculer directement la réponse $y(t)$ à partir du signal d'entrée $x(t)$ et la représentation du système $h(t)$. Cette expression porte le nom de produit de convolution.

Un changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif. On a alors :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta \quad (1.103)$$

Le produit de convolution est souvent écrit sous la forme symbolique suivante :

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t)$$

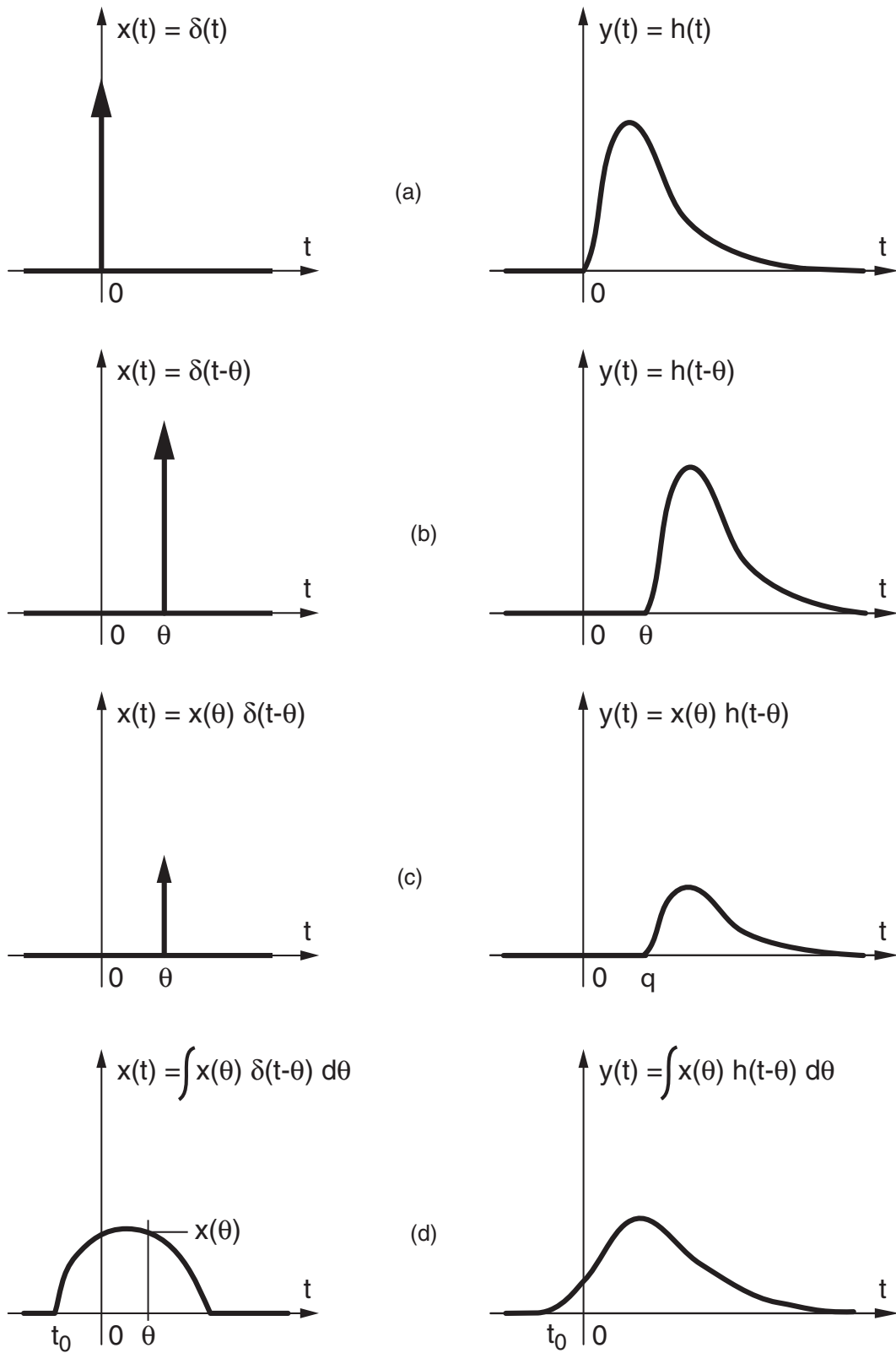


FIGURE 1.14.: Calcul d'un signal à l'aide du produit de convolution

1.7.2. Réponse d'un système causal

Dans le cas fréquent où le signal $x(t)$ est appliqué en l'instant $t = 0$ et que le système est causal, c'est-à-dire que sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour $t < 0$, le produit de convolution s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta = \int_0^t x(t - \theta) h(\theta) d\theta \quad (1.104)$$

Pour calculer $y(t)$ à l'aide de la première de ces deux équations, il faut réaliser les opérations successives suivantes (figure 1.15) :

1. retourner la réponse impulsionnelle autour de l'ordonnée pour obtenir $h(-\theta)$
2. décaler $h(-\theta)$ d'une valeur égale à t ; ce qui donnera $h(t - \theta)$
3. multiplier cette fonction $h(t - \theta)$ par le signal d'entrée $x(\theta)$
4. intégrer le résultat de ce produit entre 0 et t .

Cette démarche peut être illustrée en considérant la réponse indicielle bien connue d'un filtre passe-bas RC dont la fonction de transfert vaut :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Sa réponse impulsionnelle est obtenue par transformation inverse de Laplace :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \varepsilon(t)$$

L'illustration des deux approches de la convolution est donnée à la figure 1.15. On y voit, en (a) les signaux originaux $x(\theta)$ ou $h(\theta)$, en (b) leur retournement, en (c) leur décalage et en (d) leur produit. La surface sous cette dernière courbe (son intégrale) représente le signal de sortie $y(t)$.

Une deuxième illustration du calcul de la réponse indicielle d'un système linéaire est donnée dans la figure 1.16. Les signaux représentés sont dans l'ordre : le saut unité appliqué à l'entrée, la réponse impulsionnelle d'un circuit RL-C passe-bas et le retournement du saut unité, le produit $h(\theta) x(t - \theta)$ représenté par l'enveloppe de la surface noire, la valeur de cette surface en chaque instant.

1.7.3. Convolution numérique

Comme on l'a déjà dit, le produit de convolution est nécessaire pour calculer une réponse temporelle sans devoir passer par la résolution des équations différentielles ; la connaissance de la réponse impulsionnelle $h(t)$ suffit. Si cette démarche est peu utilisée, c'est simplement parce que le calcul analytique de cette intégrale est souvent peu aisé.

Par contre, dans le cas où on désire calculer numériquement la réponse d'un système, le produit de convolution se prête parfaitement au calcul de celle-ci. Il suffit pour

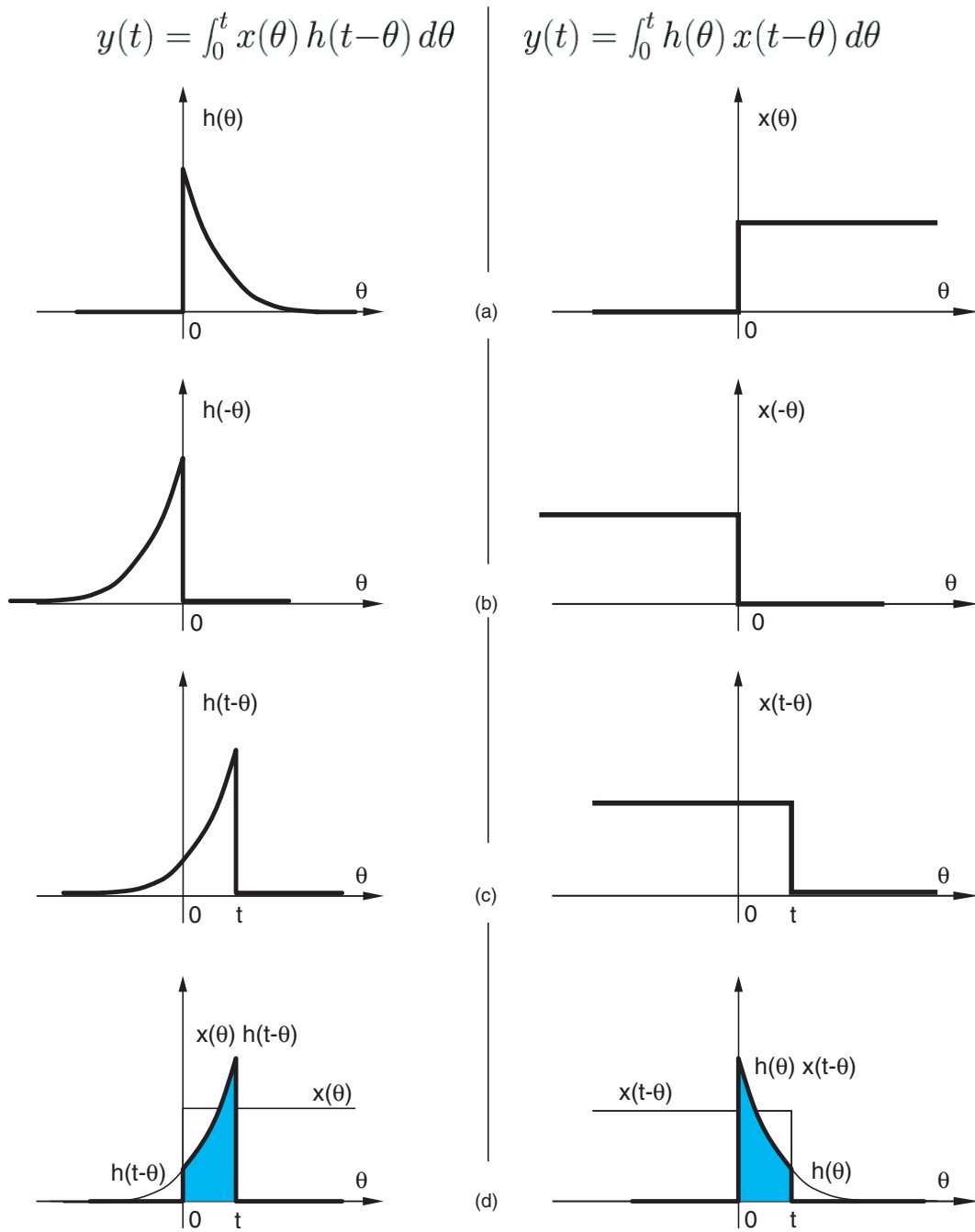


FIGURE 1.15.: Convolution de deux signaux

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

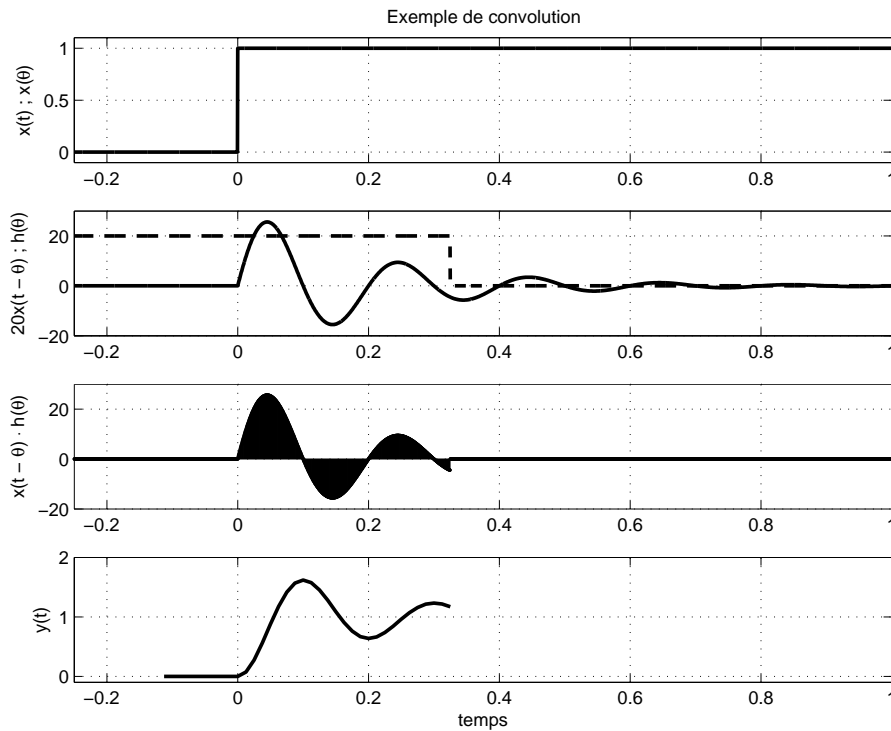


FIGURE 1.16.: Exemple de convolution

cela de remplacer l'intégrale par une somme et la limite d'intégration supérieure par une valeur finie suffisamment grande pour que la réponse impulsionnelle puisse être considérée nulle. Ainsi, dans le cas où $x(t < 0) = 0$ et $h(t > t_{max}) \simeq 0$, on obtient :

$$y(t) = \int_0^t x(t - \theta) h(\theta) d\theta \simeq \int_0^{t_{max}} x(t - \theta) h(\theta) d\theta$$

En considérant que les signaux temporels $x(\theta)$ et $h(\theta)$ sont échantillonnés avec une période Δt pendant une durée finie allant de 0 à t_{max} , le calcul de $y(t)$ peut alors se faire comme suit :

$$y[n] \simeq \sum_{k=0}^{k_{max}} x[n - k] h[k] \Delta t \quad (1.105)$$

Ce qui, algorithmiquement, se traduit par les quelques lignes de code suivantes :

```

deltaT = tmax / kmax;
for n = 0 to kmax
do begin
convol = 0.0;
for k = 0 to kmax
do begin
convol = convol + x[n-k] * h[k];
end;
y[n] = convol * deltaT;
end;

```

1.8. Exercices

Remarque Pour tous les exercices qui suivent, on admettra implicitement, sauf précision contraire, que les conditions initiales sont nulles.

TL 1 Pour chacun des deux systèmes décrits par les équations différentielles suivantes

$$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 24y(t) = 5\dot{x}(t) + 3x(t)$$

$$6\dot{y}(t) + 11y(t) + \int (y(t) - x(t)) dt = x(t)$$

calculez leur fonction de transfert.

TL 2 Considérant les systèmes décrits par les fonctions de transfert suivantes

$$H_1(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 8}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1s + 3}$$

retrouvez leur équation différentielle.

TL 3 Pour chacun des systèmes décrits par les fonctions de transfert suivantes

$$H_1(s) = \frac{s - 5}{s^2 + 3s + 8}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1s + 3} = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s + 2.17)(s^2 - 0.174s + 1.38)}$$

$$H_3(s) = \frac{5s^2 + 7s + 2}{s^2 - 3s + 5}$$

dessinez leurs pôles et zéros dans le plan complexe. Déterminez s'ils sont stables ou non ; justifiez vos réponses.

TL 4 Pour chacune des fonctions de transfert $H_k(s)$ ci-après,

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + s/1000} \quad H_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$$

$$H_3(s) = \frac{5}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \quad H_4(s) = \frac{1 + 4 \cdot 10^{-6}s^2}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

$$H_5(s) = \frac{10e^{-3}s}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \quad H_6(s) = \frac{s + 200}{s + 50} \frac{5}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

$$H_7(s) = \frac{1}{1 - 5 \cdot 10^{-4}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. calculez leurs pôles et zéros et dessinez leur position dans le plan complexe ;
2. calculez la réponse indicielle $U_2(s)$ et donnez son expression générale $u_2(t)$;
3. calculez les valeurs initiale et finale de $u_2(t)$;
4. quelle sera la durée de la réponse transitoire et, s'il y a lieu, le nombre de périodes visibles ?
5. esquissez chacune de ces réponses indicielles.

TL 5 On applique à un circuit RC passe-bas une rampe de pente constante a ;

1. montrez qu'après le régime transitoire la sortie suit l'entrée avec un décalage égal à la constante de temps $\tau = RC$;
2. esquissez la réponse à cette rampe.

TL 6 On peut montrer qu'un filtre passe-bas d'ordre 2 à pôles complexes ($\zeta < 1$) suit une rampe appliquée en entrée avec un décalage $2\zeta/\omega_n$. Admettant que ce circuit est réalisé avec $R = 500 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ nF}$,

1. dessinez le schéma du circuit ;
2. calculez t_{tr} et N_{osc} ?
3. esquissez la réponse au signal $u_1(t)$ de la figure 1.17 lorsque $t_0 = 10 \mu\text{s}$.

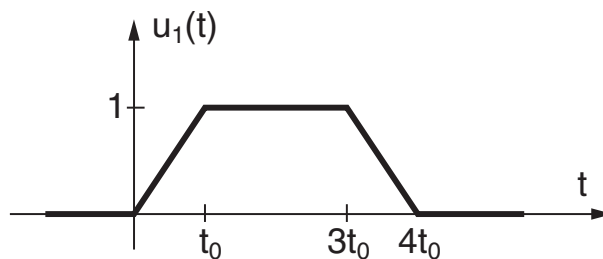


FIGURE 1.17.: Ex. TL 6

TL 7 Considérant le circuit $R - L // C$ de la figure 1.18,

1. de quel type de filtre s'agit-il ?
2. écrivez les équations temporelles reliant $u_2(t)$ à $u_1(t)$ pour $t \geq 0$ (CI nulles) ;
3. à partir de celles-ci, recherchez la fonction de transfert du circuit.

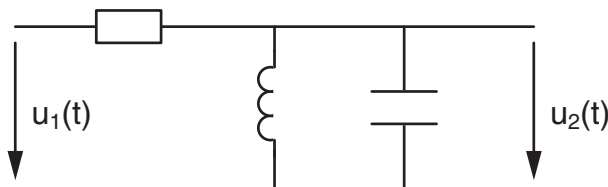


FIGURE 1.18.: Ex. TL 7 et TL 8

TL 8 Considérant le circuit $R - L // C$ de la figure 1.18,

1. utilisez les impédances symboliques pour calculer directement sa fonction de transfert ;
2. calculez le facteur de qualité, le coefficient d'amortissement, la constante de temps, la période d'oscillation, la durée du régime transitoire et le nombre de périodes visibles lorsque $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ nF}$;
3. esquissez sa réponse indicielle ; que valent $u_2(0_+)$ et $u_2(\infty)$?
4. quelle valeur faut-il donner à la résistance pour que $N_{osc} \simeq 1.5$.

TL 9 Considérant la réponse indicielle d'un système décrit par

$$G(s) = \frac{1 + s/30}{(1 + s/10)(1 + s/16 + s^2/16)}$$

1. que valent $y(0)$ et $y(\infty)$?
2. écrivez $G(s)$ dans la forme de Laplace ;
3. que valent les pôles et zéros de $G(s)$;
4. calculez les paramètres caractéristiques de la réponse transitoire ;
5. donnez la forme générale de la réponse indicielle $y(t)$;
6. esquissez $y(t)$.

Rép. :
$$\begin{array}{lll} y(0) = 0 & \tau_1 = 0.1 \text{ [sec]} & t_{trans} = 10 \text{ [sec]} \\ y(\infty) = 1 & \tau_2 = 2 \text{ [sec]} & N_{osc} \simeq 6 \end{array}$$

TL 10 Quelle doit être la fonction de transfert d'un amplificateur tel que sa réponse indicielle est caractérisée par un temps d'établissement inférieur à $10 \mu\text{s}$ et un dépassement maximum de 5% ? Estimez le temps de montée de cette réponse.

Conv 1 Considérant deux systèmes distincts représentés par les réponses impulsionnelles respectives $h_1(t)$ et $h_2(t)$ de la figure 1.19,

1. utilisez le produit de convolution pour calculer les réponses indicielles $y_1(t)$ et $y_2(t)$ de chacun des systèmes ;
2. esquissez avec soin ces 2 réponses ;
3. à quoi correspond la valeur asymptotique $y(t \rightarrow \infty)$?
4. si les signaux d'entrée et de sortie sont des tensions électriques, quelles sont les unités des réponses impulsionnelles ?

Conv 2 On applique le signal $x(t)$ à un système dont la réponse impulsionnelle est décrite par $h(t)$ (figure 1.20). Calculez la réponse $y(t)$ à l'aide du produit de convolution. Pour vous faciliter la tâche, analysez ce qui se passe dans les tranches temporelles suivantes :

$$t < 0, \quad 0 < t < T, \quad T < t < 2T, \quad 2T < t < 3T, \quad t > 3T$$

puis effectuez une représentation graphique des fonctions intervenant dans ces tranches.

1. ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

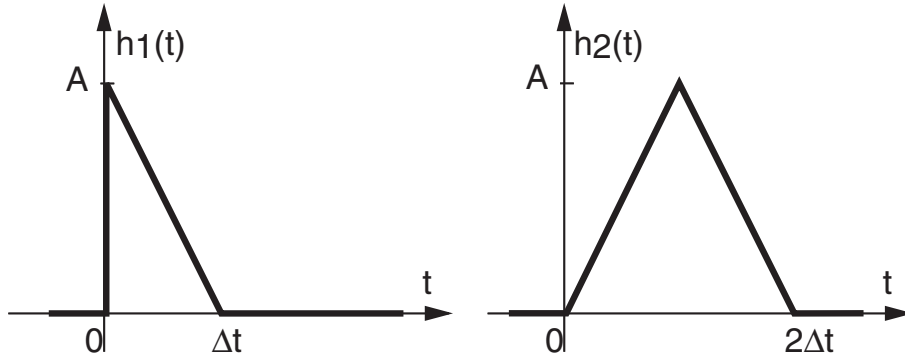


FIGURE 1.19.: Ex. Conv 1

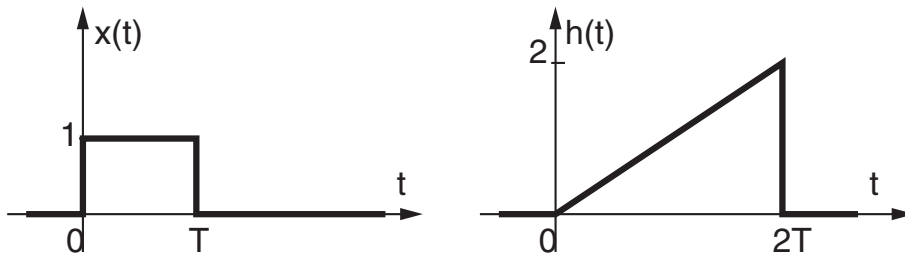


FIGURE 1.20.: Ex. Conv 2

Conv 3 Dans cet exercice, on souhaite utiliser le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1 décrit par sa fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

Pour ce faire,

1. calculez la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système ;
2. rappelez la définition du produit de convolution et esquissez les fonctions temporelles intervenant dans celui-ci ;
3. appliquez le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle du système.

Rép : $h(t) = \frac{1}{RC} \exp(-t/RC)$, $y(t) = 1 - \exp(-t/RC)$

Conv 4

On applique un signal $x[n]$ à un système numérique décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n]$:

n	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$h[n]$	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[n]$	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]$																		

Utilisez le produit de convolution numérique

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] x[n-m]$$

pour calculer la réponse $y[n]$. Représentez cette réponse sur la figure 1.21.

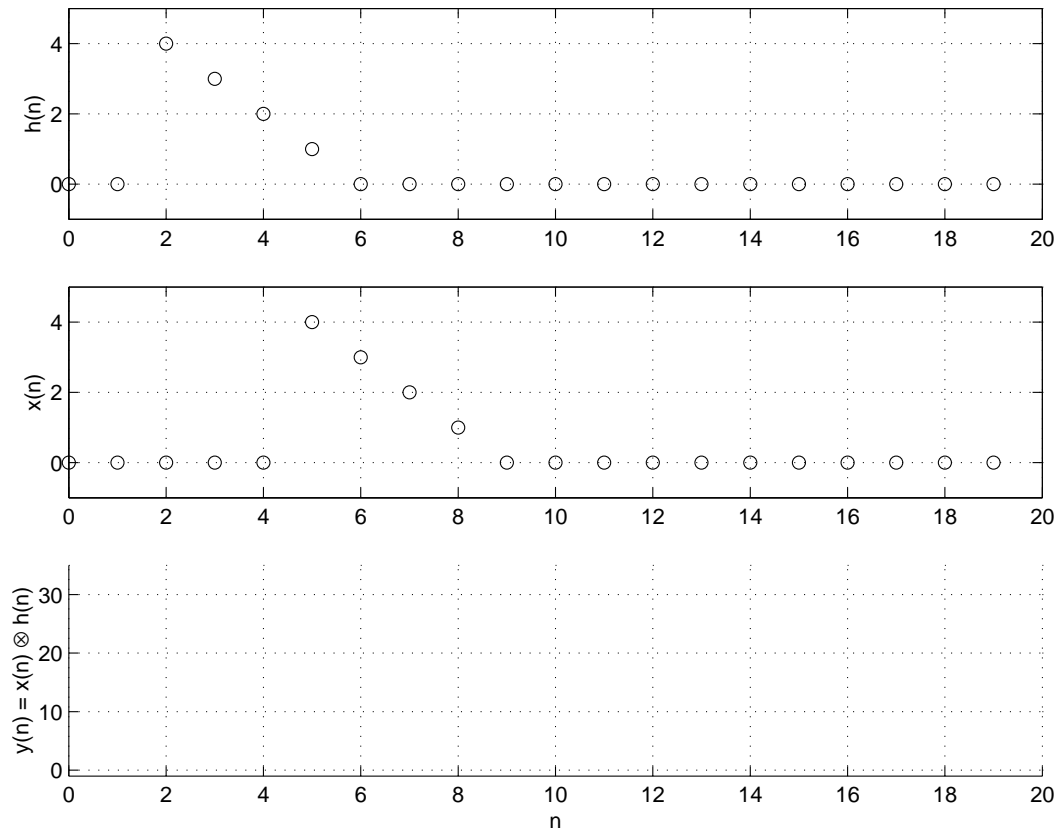


FIGURE 1.21.: Ex. Conv 4

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, 1992
- [2] L. Maret, *Régulation automatique*, Presses Polytechniques Romandes, 1987

2. Modélisation des systèmes analogiques

L'étude des systèmes analogiques passe par la description mathématique de leur comportement. Cette description, obtenue par le biais de la connaissance des lois physiques ou de l'observation, constitue une modélisation de la réalité. Suivant l'approche utilisée, on obtiendra

1. un *modèle de connaissance* lorsque celui-ci est construit à partir de la structure interne et des équations décrivant le système considéré ;
2. un *modèle de représentation* dans le cas où le modèle ne fait que relier globalement la sortie à l'entrée sans tenir compte des détails internes du système.

De plus, dans le cas des systèmes non linéaires, on peut être amené à les représenter par des modèles linéaires autour d'un point de fonctionnement afin d'en obtenir une description linéaire nécessaire pour analyser leur comportement. Quelques exemples illustrent ces diverses approches de la modélisation.

2.1. Système oscillant

Comme exemple de modélisation de connaissance, considérons un rail horizontal sur lequel est déposée une masse reliée à un ressort lui-même attaché à un point mobile ; les pertes par frottement sont modélisées par un amortisseur visqueux (figure 2.1). La position $x(t)$ du point de fixation du ressort est variable et l'on s'intéresse à la position $y(t)$ de la masse. Ces positions sont des variations autour des points d'équilibre X_0 et Y_0 .

2.1.1. Équations différentielles

L'équation de Newton décrivant le mouvement $y(t)$ de la masse m prend en compte la force due à l'élongation du ressort ($x - y$) et la force causée par le frottement visqueux dépendant de la différence des vitesses ($\dot{x} - \dot{y}$). Ce qui donne

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k(x(t) - y(t)) + \lambda \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

En réordonnant les termes, on obtient une équation différentielle d'ordre 2 en $y(t)$ et d'ordre 1 en $x(t)$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + k y(t) = \lambda \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) \quad (2.2)$$

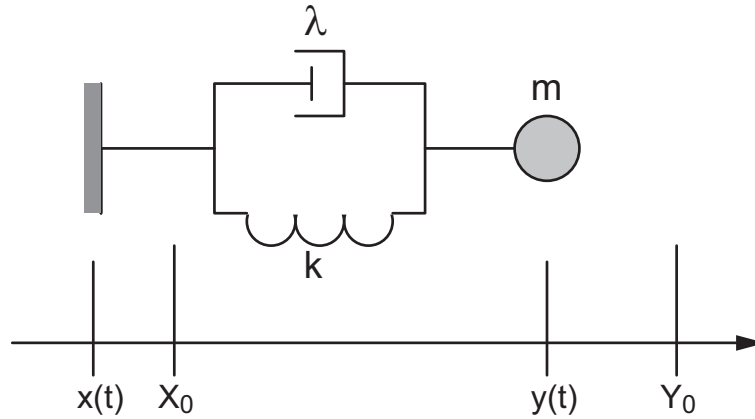


FIGURE 2.1.: Système oscillant

On peut ainsi considérer que cette équation décrit un système dont l'entrée est la position $x(t)$ du point mobile et la sortie, la position $y(t)$ de la masse.

2.1.2. Fonction de transfert

La transformation de Laplace de l'équation ci-dessus (admise à CI nulles) permet d'obtenir la fonction de transfert du système

$$\begin{aligned} m s^2 Y(s) + \lambda s Y(s) + k Y(s) &= \lambda s X(s) + k X(s) \\ Y(s) (m s^2 + \lambda s + k) &= X(s) (\lambda s + k) \end{aligned}$$

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\lambda s + k}{m s^2 + \lambda s + k} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{m}} \right]$$

qui s'écrit dans les formes canoniques de Bode et de Laplace

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + s(\lambda/k)}{1 + (\lambda/k)s + s^2(m/k)} \quad (2.3)$$

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\lambda}{m} \frac{s + (k/\lambda)}{s^2 + (\lambda/m)s + (k/m)} \quad (2.4)$$

Se souvenant que le dénominateur d'une fonction d'ordre 2 s'écrit

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

avec $Q_0 \equiv \frac{1}{2\zeta}$, on en déduit que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2\zeta \equiv \frac{1}{Q_0} = \frac{\lambda}{m\omega_n} = \frac{\lambda}{\sqrt{k m}} \quad (2.5)$$

2.1.3. Conclusion

Le système que nous venons d'étudier est un système mécanique décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On a donc affaire à un *système linéaire temporellement invariant* (LTI) représenté par un *modèle de connaissance* puisque le système est entièrement décrit par ses trois composants que sont la masse, le ressort et l'amortisseur.

2.2. Échangeur de chaleur

On considère à présent un échangeur de chaleur dont le fonctionnement peut être représenté par le schéma technologique de la figure 2.2. Ce système apparemment simple ne peut être décrit qu'à l'aide d'équations aux dérivées partielles spatio-temporelles dont les coefficients ne sont connus que grossièrement. Généralement, seule une simulation complexe (par la méthode des éléments finis, par exemple) permettra de représenter en détail le fonctionnement de l'échangeur.

Cependant, une représentation globale reliant la température de sortie $\theta_s(t)$ à une variation de la puissance $p(t)$ de chauffage peut être obtenue expérimentalement avec une précision suffisante du point de vue de l'utilisateur. Cette modélisation fait appel à un modèle simple plus ou moins arbitraire qui traduit le comportement (*modèle de représentation*) et non la structure interne du processus considéré.

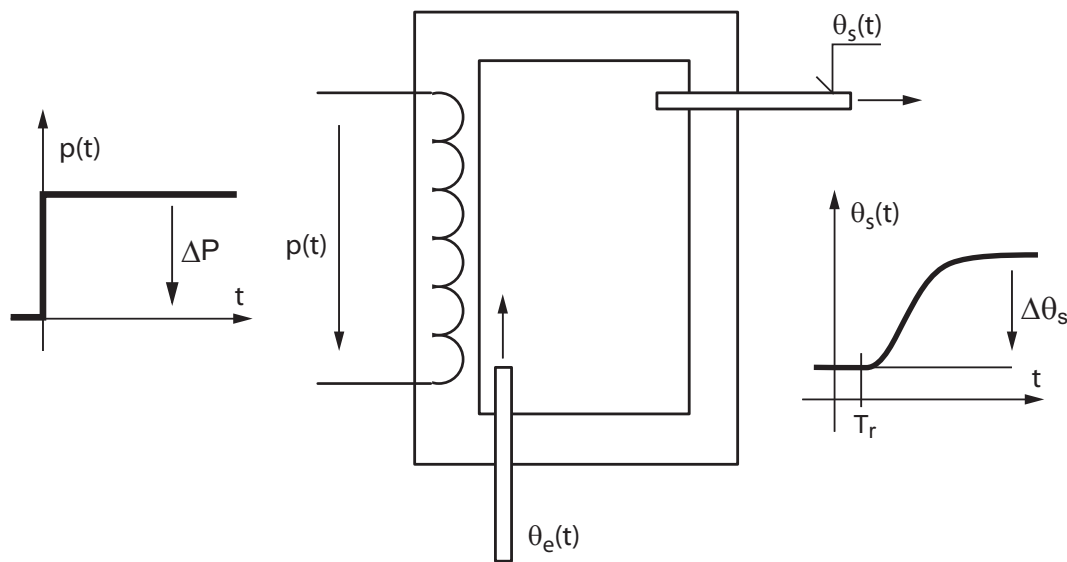


FIGURE 2.2.: Schéma technologique d'un échangeur de chaleur

Cette modélisation se fait en observant l'évolution de la température après une augmentation de la puissance de chauffage. On constate alors que, dans un premier temps, la température de sortie ne change pratiquement pas ; puis, qu'elle augmente régulièrement avant de tendre vers une valeur asymptotique. L'analyse attentive de cette évolution et la connaissance du fonctionnement de l'échangeur permettent d'en tirer quelques éléments caractéristiques :

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

1. Le calcul du rapport entre la variation de température à la sortie et la variation de puissance appliquée donne le *gain statique* de l'échangeur

$$K_0 \equiv \frac{\Delta\Theta_s}{\Delta P} \quad [\text{deg/W}]$$

2. La durée pendant laquelle la température n'a pas changé peut correspondre au temps de circulation de l'eau entre la chaudière et le capteur de température. Il s'agit là d'un retard pur T_r dû au déplacement de l'eau dont la représentation de Laplace est

$$e^{-sT_r}$$

3. Enfin le comportement de type "filtre passe-bas" peut être modélisé par une fonction de transfert très simple d'ordre n à pôles confondus

$$\frac{1}{(1 + s\tau)^n}$$

Un modèle possible pour un échangeur de chaleur pourrait donc être donné par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{P(s)} = K_0 \frac{e^{-sT_r}}{(1 + s\tau)^n} \quad (2.6)$$

avec :

K_0	=	gain statique de l'échangeur	[deg/W]
T_r	=	temps de déplacement de l'eau	[sec]
τ	=	constante de temps de l'échangeur	[sec]
n	=	ordre du modèle	[/]

Des méthodes d'identification permettent d'obtenir ces quatre paramètres susceptibles de représenter le comportement global de l'échangeur.

Conclusion On constate donc que, dans ce cas, sans rien connaître du système physique et faisant *l'hypothèse que le système est linéaire*, on a obtenu un *modèle de représentation* pouvant traduire correctement le comportement du système.

2.3. Démarche associée à la modélisation

Nous venons de voir que la modélisation (mathématique) ou l'identification (expérimentale) constituent deux approches permettant d'obtenir une représentation qualitative et quantitative de la réalité. Afin de mieux préciser et conclure cette démarche, prenons comme exemple l'identification d'une bobine à noyau ferromagnétique réalisée sous la forme d'un tore (figure 2.3). Face à cet objet, on peut se poser les questions suivantes.

Qu'est-ce que c'est ?

La réponse à cette question simple implique une interprétation de l'objet basée sur des connaissances préalables. Elles permettent une modélisation de l'objet, c'est-à-dire l'écriture d'une équation. Dans le cas d'une bobine (l'objet), sa description est souvent donnée au travers de sa réactance (un modèle linéaire)

$$Z(j\omega) = j\omega L \quad (2.7)$$

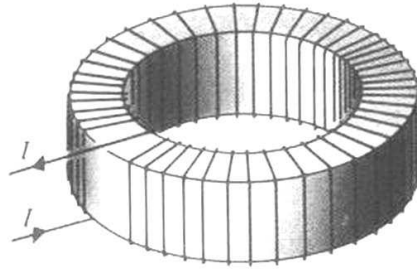


FIGURE 2.3.: Réalisation d'une bobine

Quelle expérience mettre en oeuvre ?

La donnée d'un modèle doit permettre l'évaluation expérimentale des paramètres afin d'en obtenir une représentation quantitative. Il est donc nécessaire à ce stade de réaliser une expérience permettant d'obtenir directement ou indirectement les paramètres intéressants. Au travers du choix de l'expérience, on fixera implicitement le choix du signal appliqué à l'objet.

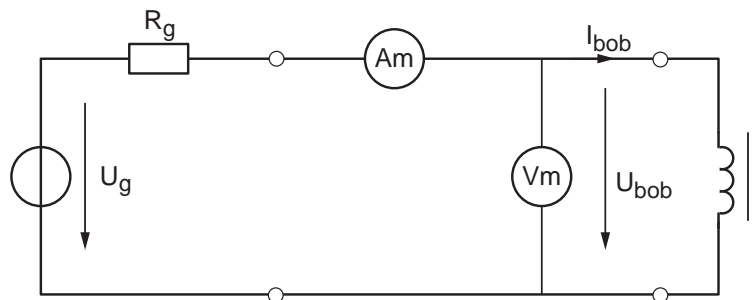


FIGURE 2.4.: Schéma de mesure d'une impédance

Dans notre cas, l'expérience la plus simple que l'on puisse imaginer consiste à appliquer un signal sinusoïdal à la bobine et à mesurer le courant et la tension à ses bornes (figure 2.4). On devra donc au préalable fixer les domaines de fréquence et d'amplitude des signaux. Le choix des instruments de mesure (voltmètre et ampèremètre) sous-entend que les effets de saturation magnétique ne seront pas visibles. Pour éviter la saturation magnétique, l'amplitude du courant devra être faible. Les résultats des mesures sont donnés dans la figure 2.5 ; ils doivent maintenant être analysés.

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

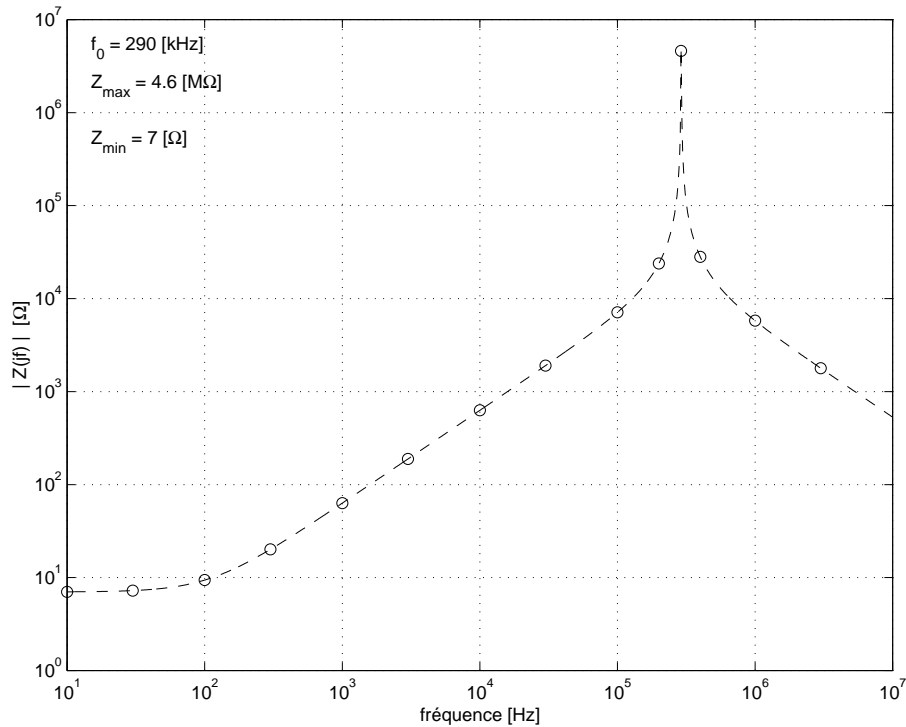


FIGURE 2.5.: Mesure de l'impédance d'une bobine

Faut-il modifier le modèle ?

L'équation $Z(j\omega) = j\omega L$ représentant cette bobine nous indique que sa réactance devrait augmenter linéairement avec la fréquence. Or, on constate que les mesures ne coïncident pas du tout avec les résultats attendus, si ce n'est en moyennes fréquences. On en déduit donc que le modèle choisi doit être amélioré afin de mieux représenter la réalité. L'analyse de la courbe expérimentale (figure 2.5) conduit aux remarques suivantes.

1. En moyennes fréquences, l'impédance varie linéairement avec la fréquence comme le prévoit le modèle initial (figure 2.6b) :

$$Z(j\omega) = j\omega L \quad \text{si } 300 \text{ [Hz]} < f < 100 \text{ [kHz]} \quad (2.8)$$

2. En basses-fréquences, l'impédance tend vers une valeur constante correspondant à la résistance du fil de bobinage. On en déduit, si l'on veut tenir compte des basses et moyennes fréquences, que le modèle doit être modifié comme suit (figure 2.6a) :

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \quad \text{si } 0 < f < 100 \text{ [kHz]} \quad (2.9)$$

3. En hautes-fréquences, l'impédance passe par un maximum qui est le fait d'une antirésonance. Celle-ci provient de la capacité parasite répartie entre les spires dont le modèle est celui de la figure 2.6c :

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 + (j\omega)^2 L C_p} \quad \text{si } f > 300 \text{ [kHz]} \quad (2.10)$$

4. Un modèle valable dans tout le domaine de fréquences peut être celui proposé dans la figure 2.6d dont l'impédance vaut :

$$Z(j\omega) = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega R C_p + (j\omega)^2 L C_p} \quad \text{si } 0 < f < \infty \quad (2.11)$$

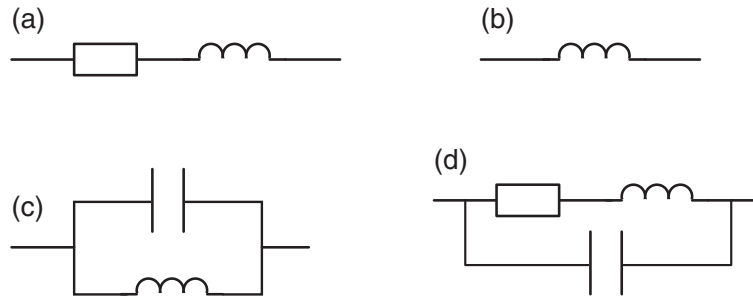


FIGURE 2.6.: Différents modèles peuvent représenter une bobine

Ainsi, suivant le domaine de fréquences dans lequel sera utilisée la bobine, on pourra choisir un des quatre modèles présentés à la figure 2.6. A ce stade, il ne faut cependant pas oublier que ces modèles sont linéaires et qu'ils ne tiennent pas compte d'une saturation magnétique possible.

Faut-il envisager une représentation non-linéaire ?

Si la tension sinusoïdale appliquée possède une forte amplitude, le courant résultant ne sera plus sinusoïdal : il y a distorsion due à la saturation du noyau ferromagnétique. La description de la bobine au travers de son impédance $Z(j\omega)$ n'est alors plus possible. On est donc obligé de la représenter par un ensemble d'équations non linéaires nécessitant les variables suivantes :

$u(t)$	=	tension appliquée	[V]
$i_C(t)$	=	courant dans la capacité parasite	[A]
$i_B(t)$	=	courant dans la bobine	[A]
C_p	=	capacité parasite	[F]
N	=	nombre de spires	[/]
S_m	=	section moyenne du tore	[m ²]
L_m	=	longueur moyenne du tore	[m]
B	=	induction magnétique	[T]
H	=	champ d'excitation magnétique	[A/m]
$B(H)$	=	caractéristique magnétique du matériau	[T]

On peut alors décrire la bobine à partir des équations fondamentales suivantes – les équations de Kirchhoff

$$i(t) = i_C(t) + i_B(t) \quad (2.12)$$

$$i_C(t) = C_p \frac{du(t)}{dt} \quad (2.13)$$

$$u(t) = R i_B(t) + \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (2.14)$$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

– les équations électromagnétiques

$$\psi = N \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq N B S_m \quad (2.15)$$

$$N i_B(t) = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \simeq H(B) L_m \quad (2.16)$$

Ainsi, la bobine est finalement décrite par un ensemble d'équations – dont une, $i_B(t)$, est non linéaire – qui sont

$$B(t) \simeq \frac{\psi(t)}{N S_m} \quad (2.17)$$

$$i_B(t) \simeq \frac{H(B) L_m}{N} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t) - R i_B(t) \quad (2.19)$$

$$i_C(t) = C_p \frac{du(t)}{dt} \quad (2.20)$$

$$i(t) = i_C(t) + i_B(t) \quad (2.21)$$

Enfin, il est important de rappeler que, dans le cas où la bobine est non linéaire, il n'est plus possible de la représenter par son impédance. L'évaluation de son comportement ne peut alors se faire qu'en résolvant numériquement les équations ci-dessus.

2.3.1. Conclusion

De ce que nous venons de voir, il est évident que la modélisation d'un système est un processus itératif pouvant être représenté par le diagramme de la figure 2.7. On y voit que l'identification débute par le choix d'un modèle permettant d'imaginer une expérience afin de confronter les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux. A partir de cette comparaison, on décidera si, oui ou non, le modèle choisi est satisfaisant.

On peut encore remarquer que l'identification de la bobine nous a permis de construire un modèle de connaissance. De cette modélisation découle la possibilité de mesurer les valeurs des éléments constitutifs de la bobine, à savoir sa résistance R , son inductance L et sa capacité répartie C_p . C'est la modélisation la plus complète que l'on puisse envisager.

Il arrive parfois que l'on ne s'intéresse qu'à une description globale des systèmes permettant de représenter de manière simple le comportement de ceux-ci sans se préoccuper du fonctionnement interne. On construit alors des modèles de représentation. Ce type de modélisation est fréquemment utilisé pour décrire le comportement dynamique des systèmes; on analyse alors, suivant les possibilités, leur réponse harmonique et/ou leur réponse indicielle.

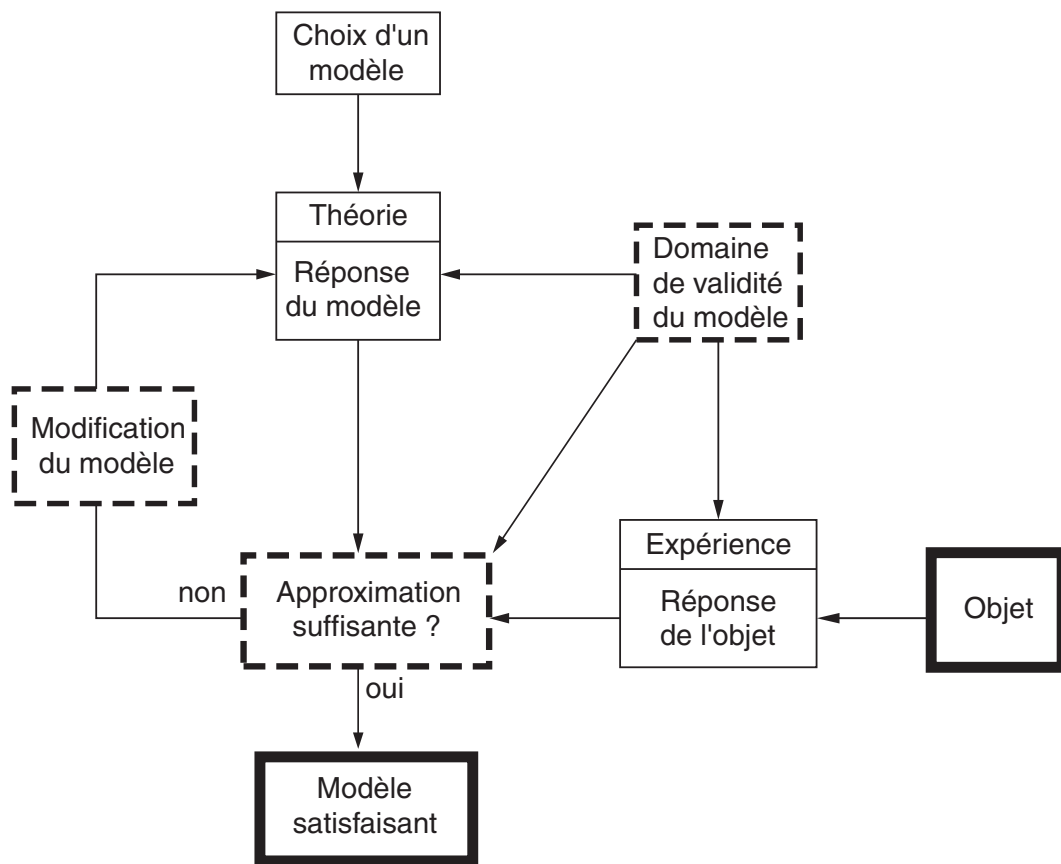


FIGURE 2.7.: Diagramme illustrant le processus de modélisation

2.4. Un système non linéaire : le réservoir d'eau

On considère ici un réservoir de section A_1 avec une ouverture à sa base de section A_2 par laquelle l'eau peut s'écouler (figure 2.8). Sachant que ce réservoir est alimenté par un débit d'eau Q_1 [kg/sec] et que l'eau s'échappe sous l'effet de la pesanteur avec un débit Q_2 [kg/sec] dépendant de la hauteur, on désire connaître l'évolution du niveau d'eau H [m] dans le réservoir.

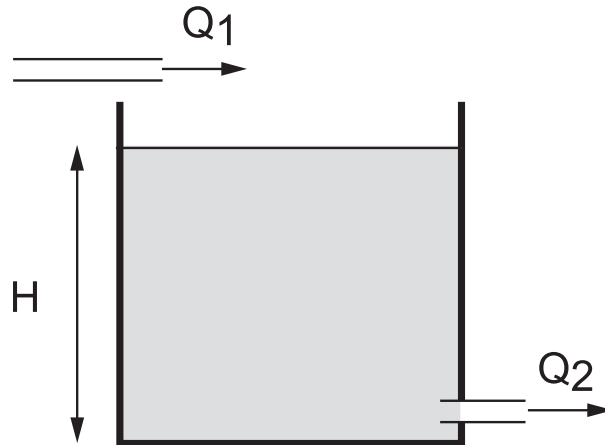


FIGURE 2.8.: Écoulement dans un réservoir

2.4.1. Équations

Niveau d'eau et débits La masse d'eau M stockée dans le réservoir dépend de sa masse spécifique ρ , de la section A_1 du réservoir et de la hauteur H du niveau

$$M = \rho V_1 = \rho A_1 H \quad (2.22)$$

Son évolution au cours du temps t dépend de la différence des débits

$$M(t) = \rho A_1 H(t) = \int_0^t (Q_1(t) - Q_2(t)) dt \quad (2.23)$$

La variation de la hauteur d'eau vaut donc

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \quad (2.24)$$

Débit de sortie Le débit de sortie Q_2 dépend de la vitesse d'écoulement v_2 et de la section A_2 du tube de sortie

$$Q_2 = \rho \frac{dV_2(t)}{dt} = \rho A_2 \frac{dx(t)}{dt} = \rho A_2 v_2 \quad (2.25)$$

2.4. Un système non linéaire : le réservoir d'eau

En l'absence de frottements, la loi de conservation d'énergie permet d'écrire que la perte d'énergie potentielle de l'eau stockée est compensée par l'augmentation d'énergie cinétique de l'eau sortante

$$\delta E_p = gH dM = \delta E_c = \frac{1}{2}v_2^2 dM \quad (2.26)$$

La vitesse de l'eau sortante vaut donc

$$v_2(H) = \sqrt{2gH} \quad (2.27)$$

Portant ce résultat dans l'équation du débit, on trouve que celui-ci varie comme la racine carrée de la hauteur

$$Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.28)$$

Cette caractéristique non linéaire liant le débit de sortie à la hauteur d'eau est représentée à la figure 2.9.

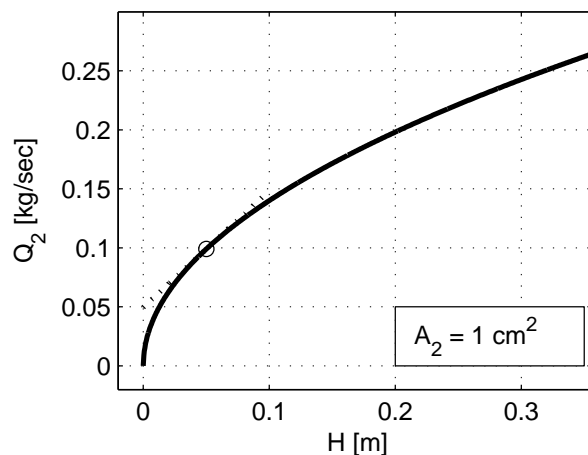


FIGURE 2.9.: Débit de sortie en fonction du niveau d'eau avec son approximation linéaire autour de $H_0 = 0.05 \text{ m}$

Équation différentielle Tenant compte du débit de sortie, on voit que l'équation différentielle (2.24) décrivant l'évolution du niveau d'eau au cours du temps s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} \left(Q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{2g} \sqrt{H(t)} \right) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} Q_1(t) - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{H(t)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) est une *équation différentielle non linéaire* d'ordre 1 traduisant le fait que le système est non linéaire à cause du terme $\sqrt{H(t)}$. Ce système ne peut donc pas être représenté par une fonction de transfert liant le niveau d'eau H au débit d'entrée Q_1 .

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Il n'y a pas de solution analytique à cette équation différentielle ; pour connaître l'évolution temporelle du niveau $H(t)$, il faut l'intégrer numériquement. Par contre, lorsque le débit d'entrée est constant $Q_1 = \text{cte} = Q_0$, il est facile de calculer le niveau d'équilibre $H_0 \equiv H(t \rightarrow \infty)$. En effet, cette valeur asymptotique du niveau est atteinte lorsque dH/dt s'annule

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0 = \frac{1}{\rho A_1} Q_0(t) - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{H(t)}$$

d'où

$$H_0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{\rho A_2} \right)^2 \quad (2.30)$$

2.4.2. Résolution numérique

Comme on vient de le dire, la solution analytique d'une équation différentielle non linéaire n'existe pas. Par contre, l'utilisation d'un algorithme d'intégration numérique permet de trouver aisément la solution pour différents débits d'entrée (figure 2.10).

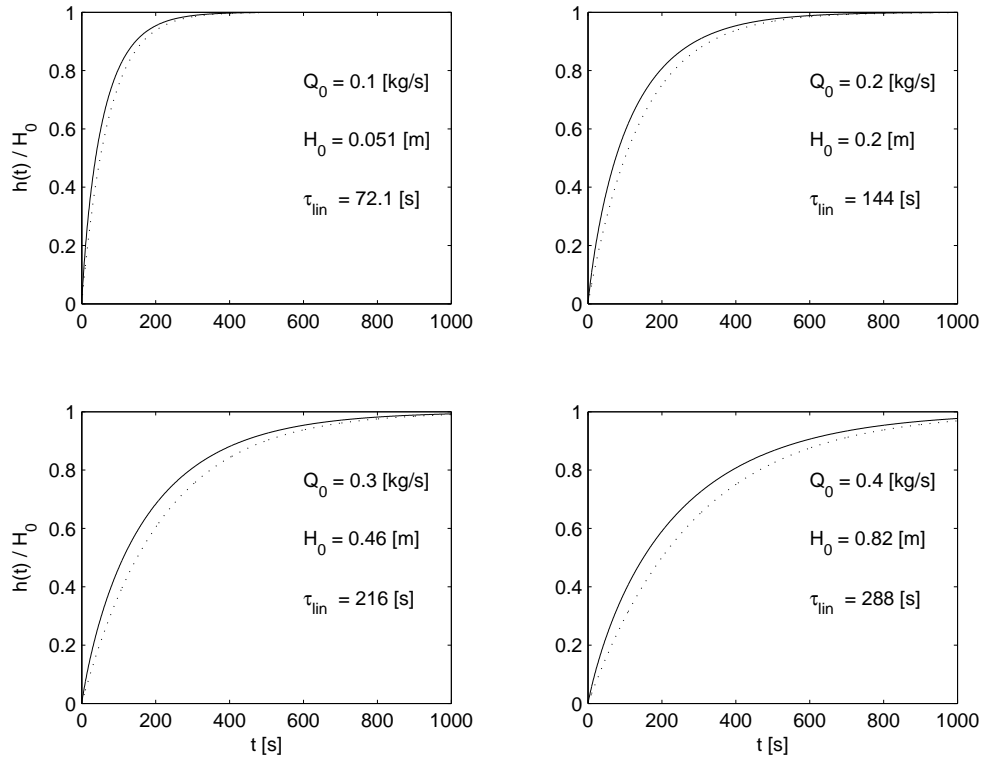


FIGURE 2.10.: Évolution du niveau d'eau dans un réservoir avec, en traitillé, l'approximation linéaire ($D_1 = 30 [cm]$, $A_2 = 1 [cm^2]$)

La résolution numérique d'un système analogique commence par l'écriture d'une fonction explicitant l'équation différentielle du système

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} \left(Q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{2g H(t)} \right)$$

2.4. Un système non linéaire : le réservoir d'eau

```
function dH_dt = ed_reservoir(t,Ht,Q1);
    D1 = 0.30;    A1 = pi*D1^2/4;
    A2 = 1e-4;    D2 = sqrt(4*A2/pi);
    rho = 1000;  g = 9.81;
    dH_dt = (Q1-rho*A2*sqrt(2*g*Ht))/rho/A1;
```

Cette fonction est écrite dans un fichier portant le nom de la fonction `ed_reservoir.m` et le calcul de $H(t)$ se fait avec les commandes suivantes :

```
% calcul de l'évolution temporelle du niveau
H0 = 0.0; % niveau initial
Q1 = 0.4; % [kg/sec]
tmax = 500; Npts = 1000; dt = tmax/Npts;
tt = 0:dt:tmax;
[tt, Ht] = ode45(@ed_reservoir,tt,H0,[],Q1);
```

La commande `ode45` intègre numériquement l'équation différentielle et fournit la solution numérique Ht pour le temps correspondant tt . À partir de cela, on peut tracer l'évolution du niveau d'eau :

```
% graphe
plot(tt,ht,'LineWidth',2); grid on;
axis([-7,tmax,-0.01,0.2]);
texte = ['Q_0 = ',num2str(Q1,2),' [kg/s]'];
legend(texte,4);
xlabel('temps [s]'); ylabel('H(t)');
```

La figure 2.10 présente l'évolution temporelle du niveau pour plusieurs débits d'entrée. Contrairement aux systèmes linéaires, la durée d'établissement du niveau n'est pas constante et le niveau atteint n'est pas proportionnel au débit d'entrée.

2.4.3. Linéarisation

Lors de variations légères autour d'un point de fonctionnement X_0 , on peut décrire un système non linéaire par une approximation linéaire de sa caractéristique $f(X)$. Cette linéarisation de $f(X)$ se fait en partant du développement limité de la fonction autour d'un point X_0 . Posant $X = X_0 + x$, on a alors

$$f(X) = f(X_0 + x) = f(X_0) + \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_0} x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X_0} x^2 + \dots$$

Ne gardant que les termes d'ordres 0 et 1, on obtient l'approximation linéaire suivante

$$f(X_0 + x) \simeq f(X_0) + \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_0} x$$

On a ainsi remplacé la caractéristique non linéaire $f(X) = f(X_0 + x)$ par une droite tangente au point X_0 (figure 2.9).

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Dans le cas du réservoir, l'évolution du niveau est décrite par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \quad \text{avec} \quad Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.31)$$

Autour du point d'équilibre H_0 , la hauteur est décrite par $H = H_0 + h$ où h représente de faibles variations de hauteur autour de H_0 . Le développement limité du débit de sortie Q_2 en un polynôme d'ordre 1 donne alors

$$\begin{aligned} Q_2(H_0 + h) &\simeq Q_2(H_0) + \left. \frac{dQ_2}{dH} \right|_{H_0} \cdot h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{2g} \left. \frac{d\sqrt{H}}{dH} \right|_{H_0} \cdot h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{2g} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{H_0}} h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que la caractéristique non linéaire de la figure 2.9 décrite par

$$Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.32)$$

peut être approchée par le modèle linéaire suivant

$$Q_2(H_0 + h) \simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h \quad (2.33)$$

En désignant les variables par leurs variations autour du point d'équilibre

$$Q_1(t) = Q_0 + q_1(t) \quad (2.34)$$

$$H(t) = H_0 + h(t) \quad (2.35)$$

$$Q_2(t) = Q_0 + q_2(t) \quad (2.36)$$

l'équation différentielle décrivant le fonctionnement du réservoir s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \\ \frac{d(H_0 + h(t))}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (Q_0 + q_1(t) - (Q_0 + q_2(t))) \\ \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (q_1(t) - q_2(t)) \end{aligned}$$

Prenant en compte l'approximation

$$q_2(t) \simeq \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t)$$

l'équation différentielle devient linéaire et elle s'écrit sous la forme

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} \left(q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t) \right)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{\rho A_2}{\rho A_1} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t) = \frac{1}{\rho A_1} q_1(t)$$

En définissant le temps caractéristique

$$\tau \equiv \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

on obtient l'équation différentielle linéaire décrivant le comportement du niveau d'eau pour de faibles variations autour de son point d'équilibre H_0

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} h(t) = \frac{1}{\rho A_1} q_1(t) \quad (2.37)$$

L'évolution temporelle du niveau d'eau prévue par ce modèle linéaire est présentée en traitillé sur la figure 2.10 pour différents niveaux d'équilibre H_0 . L'observation de ces courbes montre que, même en partant d'un réservoir vide, le temps caractéristique ainsi trouvé donne une assez bonne idée de la réalité.

2.4.4. Fonction de transfert

L'approximation d'ordre 1 du réservoir permet de le modéliser par une fonction de transfert. Celle-ci s'obtient par transformation de Laplace de l'équation différentielle (2.37)

$$s H(s) + \frac{1}{\tau} H(s) = \frac{1}{\rho A_1} Q_1(s)$$

d'où

$$G(s) \equiv \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\rho A_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right] \quad (2.38)$$

Dans la forme de Bode, cette fonction de transfert s'écrit

$$G(s) \equiv \frac{H(s)}{Q_1(s)} = K_0 \frac{1}{(1 + s\tau)} \quad (2.39)$$

avec

$$K_0 \equiv \frac{\Delta H}{\Delta Q} = \frac{\tau}{\rho A_1} = \frac{1}{\rho A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right]$$

$$\tau = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \text{ [sec]} \quad (2.40)$$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

On constate ainsi que le réservoir est caractérisé une constante de temps τ et par un gain K_0 qui augmentent tous deux avec la hauteur d'équilibre H_0 . Comme la hauteur asymptotique dépend du débit d'entrée Q_0 (équation 2.30)

$$H_0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{\rho A_2} \right)^2$$

on trouve que le gain et la constante de temps sont tous deux proportionnels au débit moyen Q_0 et qu'ils valent

$$K_0 = \frac{Q_0}{g (\rho A_2)^2} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right] \quad (2.41)$$

$$\tau = \frac{A_1}{g \rho A_2^2} Q_0 \quad [\text{sec}] \quad (2.42)$$

2.4.5. Conclusion

Le système que nous venons d'étudier est un système hydraulique décrit par une *équation différentielle non linéaire à coefficients constants*. On a donc affaire à un *système non linéaire* temporellement invariant représenté par un *modèle de connaissance* puisque le système est entièrement décrit par ses dimensions géométriques, la pesanteur et la masse spécifique du liquide.

Seule son approximation d'ordre 1 a permis de représenter et analyser le comportement du réservoir à l'aide d'une fonction de transfert ; de celle-ci, on a tiré un temps caractéristique dépendant du débit d'entrée ou, ce qui est équivalent, du niveau d'équilibre.

2.5. Représentations des systèmes analogiques

En conclusion de ce que nous venons de voir, il faut rappeler que :

La description d'un système par un ensemble d'équations différentielles est la plus fondamentale que l'on puisse imaginer.

Quel que soit le système considéré, linéaire ou non, temporellement invariant ou non, sa réponse temporelle peut toujours être calculée à partir des équations différentielles le représentant. Dans le cas des **systèmes non linéaires**, le calcul de la réponse temporelle $y(t)$ se fera sous forme numérique en intégrant les équations différentielles à l'aide d'un algorithme d'intégration (Runge-Kutta par exemple).

Dans le cas où les systèmes sont décrits par des **équations différentielles linéaires**, on peut alors, à l'aide des transformations de Fourier ou de Laplace, créer d'autres représentations d'un système telles que la fonction de transfert, l'impédance, etc. Ces représentations ne sont valables que pour les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI). Il en est de même pour les notions de réponse impulsionnelle et de produit de convolution. Il est donc important de noter que :

Seuls les systèmes linéaires temporellement invariants peuvent être représentés par une fonction de transfert en s ou en $j\omega$.

Les représentations et démarches utilisées pour la résolution des systèmes linéaires peuvent être résumées par le tableau 2.1.

Description du système	Variable	Démarche	Solution $y(t)$
Équation différentielle	$t \in \mathbb{R}$	Résolution de l'équ. diff.	$y_h(t) + y_p(t)$
Réponse impulsionnelle	$t \in \mathbb{R}$	Calcul du produit de convolution	$x(t) \otimes h(t)$
Transformation de Laplace	$s \in \mathbb{C}$	Résolution d'une équ. algébrique	$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) \cdot H(s)\}$
Transformation de Fourier	$j\omega \in \mathbb{I}$	Résolution d'une équ. algébrique	$\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega) \cdot H(j\omega)\}$

TABLE 2.1.: Représentations et résolution des systèmes linéaires

2.6. Un système électromécanique : le moteur DC

Pour terminer, considérons un moteur à courant continu et excitation permanente. Son fonctionnement est basé sur la loi de Lorentz qui dit qu'une force apparaît en présence d'un courant électrique et d'un champ magnétique :

$$d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} \quad (2.43)$$

Le courant circulant dans les spires câblées sur un cadre (figure 2.11) crée un couple qui oriente le cadre perpendiculairement aux lignes du champ \vec{B} . De plus, comme le flux magnétique embrassé par le cadre varie au cours du temps, il faut s'attendre à l'apparition d'une force contre-électromotrice décrite par la loi de Lenz :

$$u_{fem}(t) = -\frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.44)$$

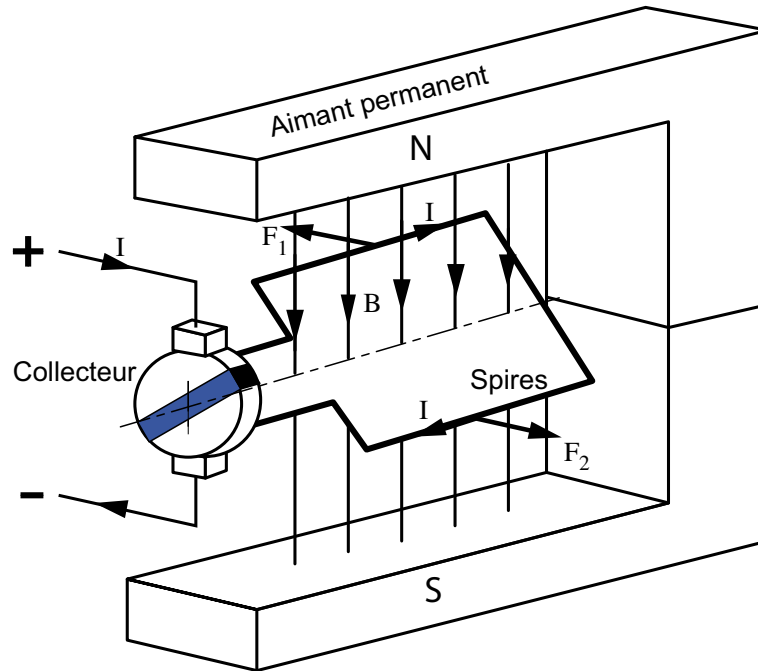


FIGURE 2.11.: Principe du moteur DC

Pour que le mouvement de rotation s'entretienne, il suffit de changer le sens du courant au bon moment grâce au collecteur (figure 2.11). La figure 2.12 présente une réalisation actuelle d'un petit moteur DC à aimant permanent.

2.6.1. Équations différentielles

Pour la modélisation qui suit, on considère que les non linéarités sont suffisamment faibles afin qu'on puisse les négliger et admettre que le système est linéaire. On fait également l'hypothèse que les constituants du moteur ne changent pas au cours du temps ; celui-ci est donc temporellement invariant. Le schéma technologique d'un tel moteur est donné à la figure 2.13.

Comme le moteur est constitué d'une partie électrique et d'une partie mécanique, sa description passe par l'écriture d'une équation électrique (Kirchhoff)

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_E \omega(t) \quad [\text{V}] \quad (2.45)$$

et d'une équation mécanique (Newton)

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_T i(t) - R_f \omega(t) + C_{ext}(t) \quad [\text{Nm}] \quad (2.46)$$

À celle-ci, on peut ajouter l'équation liant la position du rotor $\theta(t)$ à la vitesse $\omega(t)$

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt \quad [\text{rad}] \quad (2.47)$$

Dans ces équations électromécaniques-mécaniques, il y a

2.6. Un système électromécanique : le moteur DC

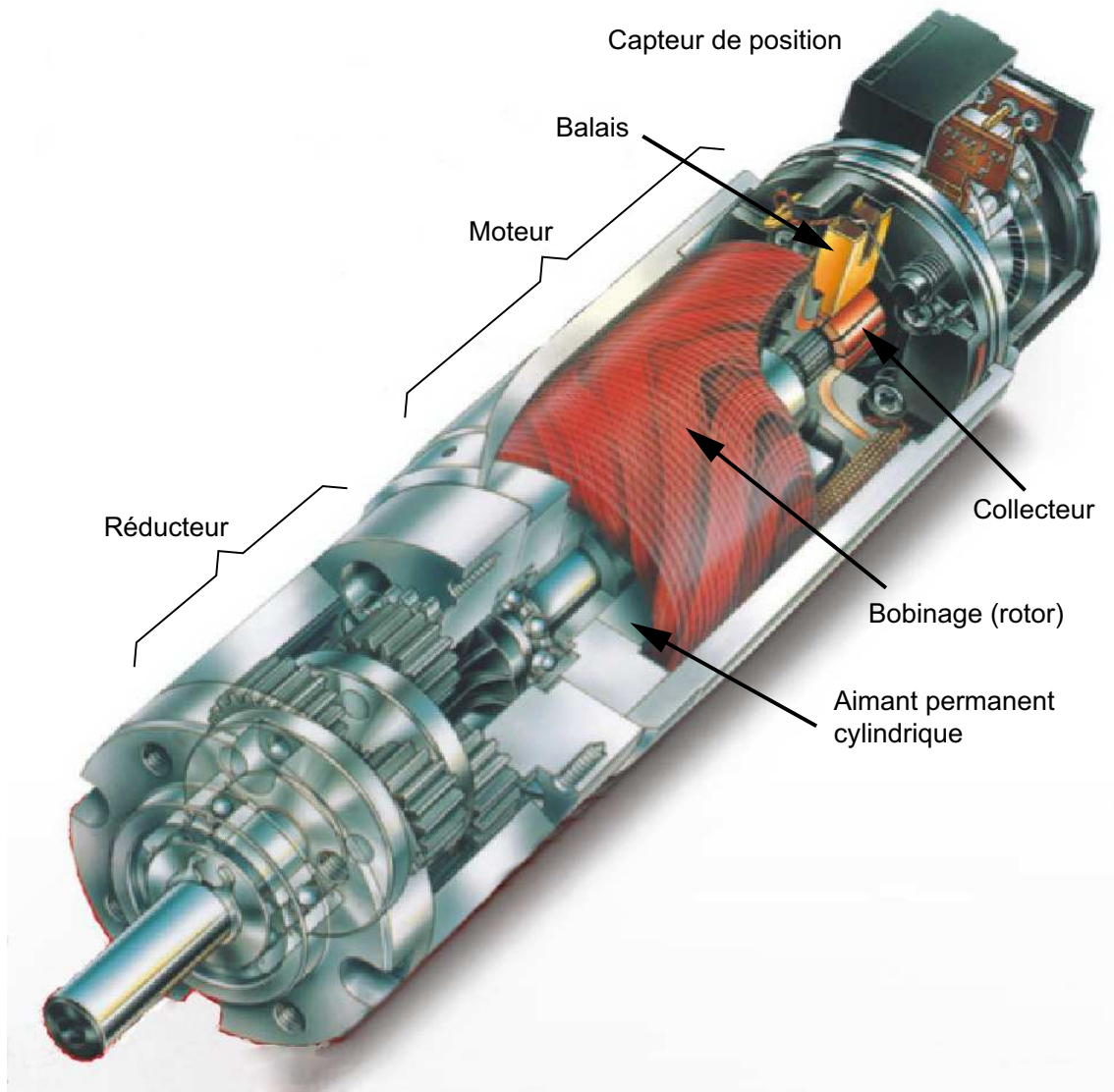


FIGURE 2.12.: Vue intérieure d'un petit moteur DC avec son réducteur et son capteur de position numérique ($P = 70\text{W}$, $D = 36\text{ mm}$, $L = 71\text{ mm}$)

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

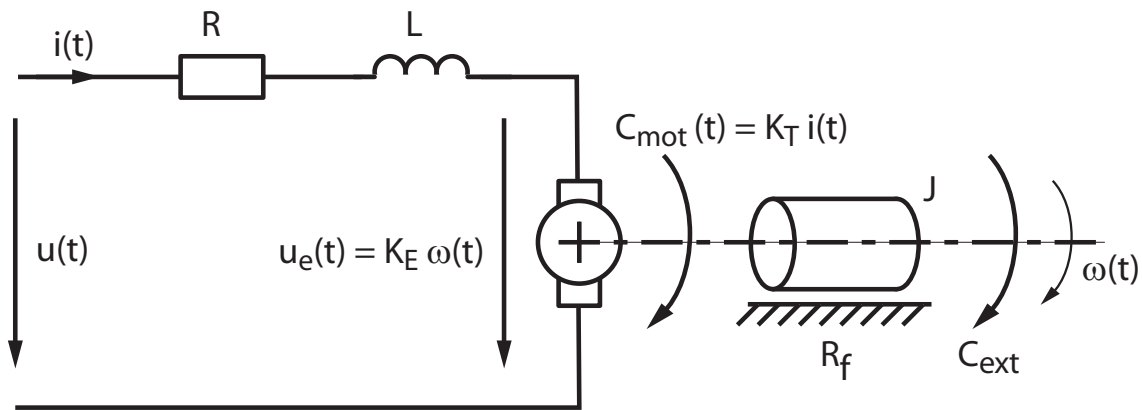


FIGURE 2.13.: Schéma technologique d'un moteur DC

- les chutes de tension causées par la résistance R et l'inductance L du bobinage du moteur ;
- la force électromotrice (fem) $K_E \omega(t)$ générée par le moteur lorsqu'il tourne à vitesse $\omega(t)$;
- le couple moteur $K_T i(t)$ créé par la circulation du courant $i(t)$;
- le couple résistant $R_f \omega(t)$ causé par les frottements qui, pour que l'équation soit linéaire, sont admis visqueux ;
- le couple extérieur C_{ext} appliqué sur le rotor.

Remarques

1. On peut noter qu'à partir de ces équations, on trouve les constantes de temps électriques et mécaniques de chaque partie prise séparément

$$\tau_{el} = \frac{L}{R} \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} \quad [\text{sec}] \quad (2.48)$$

2. Le principe de conservation de l'énergie permet de montrer que les constantes de couple K_T et de fem K_E sont égales. En effet, dans le cas où il n'y a pas de pertes lors de la transformation de la puissance électrique en puissance mécanique, on a l'égalité des deux expressions suivantes

$$P_{el} = U I = (K_E \omega) i \quad [\text{W}]$$

$$P_{mec} = C \omega = (K_T i) \omega \quad [\text{W}]$$

On en déduit que

$$K_E \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right] = K_T \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right] \quad (2.49)$$

3. En régime permanent constant, les dérivées s'annulent ; on peut alors calculer la vitesse asymptotique ω_∞ et le courant i_∞ consommé pour compenser les pertes. Considérant que le moteur est alimenté par une tension continue U_0

2.6. Un système électromécanique : le moteur DC

et que le couple extérieur est nul, on obtient ainsi deux équations à deux inconnues

$$U_0 = R i_\infty + K_E \omega_\infty$$

$$0 = K_T i_\infty - R_f \omega_\infty$$

dont la solution est

$$i_\infty = \frac{R_f}{K_T} \omega_\infty = U_0 \frac{R_f}{K_T K_E + R R_f} \quad [\text{A}] \quad (2.50)$$

$$\omega_\infty = U_0 \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad (2.51)$$

Représentation d'état Un système d'équations différentielles peut toujours être mis sous une forme canonique constituée par un ensemble d'équations différentielles d'ordre 1. Dans le cas du moteur, cet ensemble s'écrit

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} (u(t) - R i(t) - K_E \omega(t)) \quad (2.52)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J} (K_T i(t) - R_f \omega(t) + C_{ext}) \quad (2.53)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \quad (2.54)$$

Cette représentation porte le nom de représentation d'état du système. Dans le cas présent, les variables d'état sont le courant $i(t)$, la vitesse de rotation $\omega(t)$ et la position angulaire $\theta(t)$.

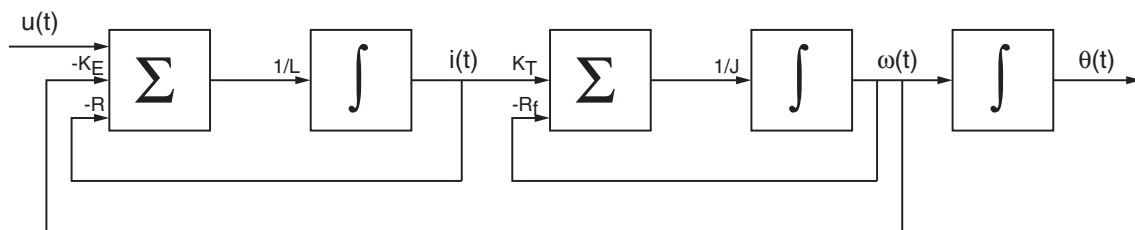


FIGURE 2.14.: Graphe représentant un système d'équations différentielles

Représentation graphique À partir de ces équations, il est aisé de dessiner le graphe des équations différentielles. Ce graphe (figure 2.14) est constitué de sommateurs et d'intégrateurs dont les entrées sont des grandeurs temporelles auxquelles on associe un coefficient. L'entrée de chaque intégrateur représente la dérivée d'une variable d'état. On obtient donc à la sortie de chaque intégrateur une des variables d'état décrivant complètement le comportement du système.

Ce schéma peut être directement interprété par des logiciels tels que Spice ou Simulink (programmation graphique) avant d'être résolu pour fournir les réponses temporelles du système étudié.

2.6.2. Fonction de transfert

La transformation de Laplace des équations différentielles décrivant le moteur conduit aux équations algébriques suivantes

$$U(s) - K_E \Omega(s) = (R + sL) I(s)$$

$$(R_f + sJ) \Omega(s) = K_T I(s) + C_{ext}(s)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \Omega(s)$$

Celles-ci permettent de calculer les images du courant du moteur, de la vitesse et de la position du rotor

$$I(s) = \frac{U(s) - K_E \Omega(s)}{R + sL} \quad (2.55)$$

$$\Omega(s) = \frac{K_T I(s) + C_{ext}}{R_f + sJ} \quad (2.56)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \Omega(s) \quad (2.57)$$

Comme on s'intéresse ici à la vitesse du rotor par rapport à la tension appliquée au moteur, on prendra $C_{ext} = 0$. Le courant et la vitesse du moteur valent alors

$$I(s) = \frac{U(s) - K_E \Omega(s)}{R + sL}$$

$$\Omega(s) = \frac{K_T I(s)}{R_f + sJ}$$

Portant le premier résultat dans le deuxième, il vient

$$\Omega(s) = \frac{K_T}{R_f + sJ} \left(\frac{U(s)}{R + sL} - \frac{K_E}{R + sL} \Omega(s) \right)$$

$$\Omega(s) \left(1 + \frac{K_T K_E}{R_f + sJ} \frac{1}{R + sL} \right) = \frac{K_T}{R_f + sJ} \frac{1}{R + sL} U(s)$$

$$\Omega(s) \left(\frac{(R_f + sJ)(R + sL) + K_T K_E}{(R_f + sJ)(R + sL)} \right) = \frac{K_T}{(R_f + sJ)(R + sL)} U(s)$$

En recherchant le rapport entre la vitesse de rotation $\Omega(s)$ et la tension $U(s)$ appliquée au moteur, on obtient sa fonction de transfert

$$G_{mot}(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (2.58)$$

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{s^2 JL + s(JR + LR_f) + K_T K_E + RR_f}$$

que l'on peut écrire dans les formes de Laplace ou de Bode

$$G_{mot}(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_T}{JL} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) + \frac{K_T K_E + R R_f}{JL}} \quad (2.59)$$

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{JR + LR_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{JL}{K_T K_E + R R_f}} \quad (2.60)$$

C'est cette dernière qui est généralement utilisée pour décrire le moteur DC. On voit ainsi que le moteur est représenté par un système d'ordre 2 caractérisé par son gain

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (2.61)$$

et deux constantes de temps qui sont l'inverse de la valeur absolue des pôles de la fonction de transfert car, de par sa réalisation, un moteur DC est stable et ne peut pas avoir de comportement oscillant

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{(1 + s \tau_1) (1 + s \tau_2)} \quad (2.62)$$

2.6.3. Temps caractéristiques

Les pôles $p_{1,2}$ de la fonction de transfert sont les racines de son dénominateur

$$s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) + \frac{K_T K_E + R R_f}{JL} = (s - p_1) (s - p_2)$$

Ils valent

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right)^2 - 4 \frac{K_T K_E + R R_f}{JL}} \right) \quad (2.63)$$

On notera que, dans cette expression, on peut négliger le terme R_f/J par rapport à R/L car on a vu que de manière générale, on a $\tau_{mec} = J/R_f \gg \tau_{elt} = L/R$. De plus, dans le cas de moteurs dont la puissance est supérieure à quelques dizaines de watts, les pertes électriques et mécaniques dues, respectivement, à la résistance du bobinage R et au coefficient de frottement R_f sont négligeables par rapport aux puissances électrique et mécanique mises en jeu. Le produit des coefficients de couple K_T et de fem K_E est alors beaucoup plus important que le produit des coefficients de pertes R et R_f

$$K_T K_E \gg R R_f \quad (2.64)$$

Ce qui donne

$$p_{1,2} \simeq \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{R}{L} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} \right)^2 - 4 \frac{K_T K_E}{JL}} \right) \quad (2.65)$$

$$\simeq - \frac{1}{2 \tau_{elt}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_T K_E}{J R} \tau_{elt}} \right) \quad (2.66)$$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

On constate ainsi que les pôles du moteur, donc ses constantes de temps, ne dépendent pratiquement pas des pertes mécaniques et l'on a

$$\tau_{1,2} \simeq 2 \tau_{elt} \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_T K_E}{J R} \tau_{elt}}} \quad (2.67)$$

2.6.4. Schéma fonctionnel

Généralement, on préfère décrire et analyser le fonctionnement d'un système complexe à l'aide d'un schéma fonctionnel plutôt qu'avec les équations différentielles. L'usage du schéma fonctionnel est en effet plus souple car celui-ci peut contenir le détail des fonctions de transfert partielles interconnectées entre elles ou, au contraire, être ramené à un seul bloc traduisant le fonctionnement global du système.

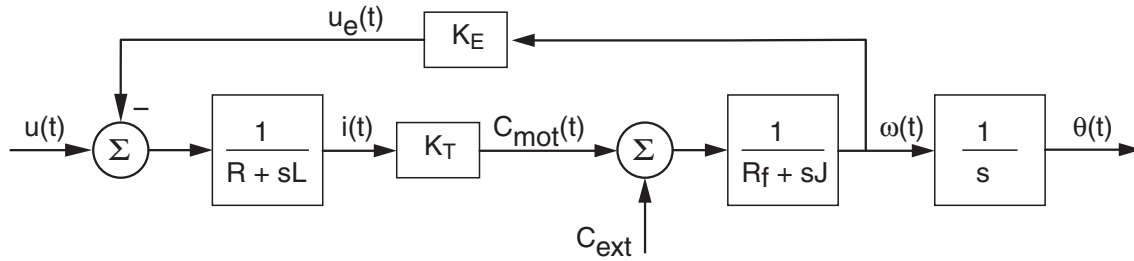


FIGURE 2.15.: Schéma fonctionnel d'un moteur DC

Prenant comme exemple le moteur DC, son schéma fonctionnel (figure 2.15) se dessine aisément à partir de ses fonctions de transfert. En effet, partant de la description du courant

$$I(s) = (U(s) - K_E \Omega(s)) \frac{1}{R + sL} \quad (2.68)$$

on en déduit le couple moteur

$$C_{mot}(s) = I(s) K_T \quad (2.69)$$

À celui-ci, on peut ajouter un couple extérieur et obtenir ainsi le couple total fourni à la charge

$$C_{tot}(s) = C_{mot} + C_{ext} = I(s) K_T + C_{ext} \quad (2.70)$$

La vitesse du moteur vaut alors

$$\Omega(s) = (I(s) K_T + C_{ext}) \frac{1}{R_f + sJ} \quad (2.71)$$

Ces équations conduisent tout naturellement au schéma fonctionnel de la figure 2.15. Dans ce schéma, on a encore ajouté le passage de la vitesse à la position angulaire qui se fait par simple intégration

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(s) = \Omega(s) \frac{1}{s} \quad (2.72)$$

2.6.5. Approximation d'ordre 1

Comme la constante de temps électrique $\tau_{el} = L/R$ est beaucoup plus petite que la constante de temps mécanique $\tau_{mec} = J/R_f$, il est fréquent de considérer que l'inductance L a un effet négligeable et que le moteur peut être modélisé par un système d'ordre 1

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E + R R_f}} \quad (2.73)$$

Il est alors caractérisé par son gain et sa constante de temps

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad \tau_{mot} \simeq \frac{J R}{K_T K_E + R R_f} [\text{sec}] \quad (2.74)$$

Dans le cas où l'on peut négliger les pertes, on obtient

$$G_{mot}(s) \simeq \frac{1}{K_E} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E}} \quad (2.75)$$

Avec ces approximations, le gain du moteur et sa constante de temps valent simplement

$$K_{mot} \simeq \frac{1}{K_E} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad \tau_{mot} \simeq \frac{J R}{K_T K_E} [\text{sec}] \quad (2.76)$$

2.6.6. Effets d'un réducteur

Dans l'utilisation des moteurs, il est fréquent d'y adjoindre un réducteur afin d'adapter la charge au moteur (figure 2.16). Cela conduit généralement à une augmentation du couple utile donc à une diminution de la vitesse de rotation de la charge. Ces relations sont aisément démontrées grâce aux lois fondamentales. Pour le voir, considérons un réducteur décrit par le rapport des engrenages n_2 (côté charge) et n_1 (côté moteur)

$$N \equiv \frac{n_2}{n_1} > 1 \quad (2.77)$$

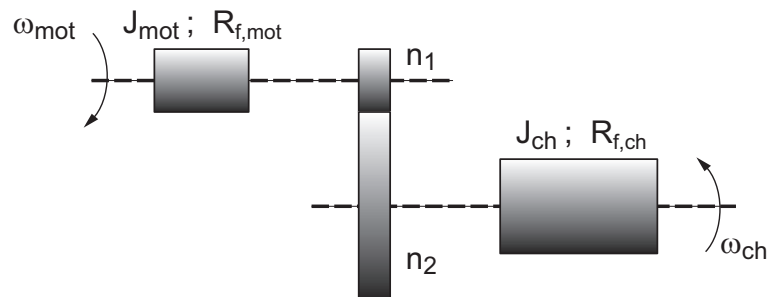


FIGURE 2.16.: Réducteur

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Positions et vitesses L'égalité des chemins parcourus ($s(t) = \theta(t)r$) par la circonférence des engrenages donne

$$\theta_{mot} n_1 = \theta_{ch} n_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{ch} = \frac{n_1}{n_2} \theta_{mot} = \frac{1}{N} \theta_{mot} \quad (2.78)$$

Il en est de même pour les vitesses

$$\omega_{mot} n_1 = \omega_{ch} n_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ch} = \frac{n_1}{n_2} \omega_{mot} = \frac{1}{N} \omega_{mot} \quad (2.79)$$

Couples De plus, la conservation de l'énergie d'un corps en rotation permet d'écrire

$$dW_{mot} = C_{mot} d\theta_{mot} = dW_{ch} = C_{ch} d\theta_{ch}$$

d'où

$$C_{ch} = \frac{d\theta_{mot}}{d\theta_{ch}} C_{mot} = \frac{n_2}{n_1} C_{mot} = N C_{mot} \quad (2.80)$$

Paramètres de la charge ramenés vers le moteur Partant de la conservation de la puissance entre l'entrée et la sortie du réducteur, on peut montrer que les paramètres mécaniques de la charge (son inertie J_{ch} , ses frottements $R_{f,ch}$ et son élasticité κ_{ch}) sont vus par le moteur avec les valeurs suivantes

$$J = \frac{1}{N^2} J_{ch} \quad R_f = \frac{1}{N^2} R_{f,ch} \quad \kappa = \frac{1}{N^2} \kappa_{ch} \quad (2.81)$$

Rendement Enfin, il ne faut pas oublier que le réducteur possède sa propre inertie et que son rendement n'est pas très bon. Celui-ci dépend du type de réducteur, du nombre d'étages et diminue d'autant plus que le rapport de réduction est grand. Voici quelques chiffres pour un réducteur à pignons droits.

Rapport de réduction	15 :1	30 :1	60 :1	100 :1
Nombre d'étages	3	3	4	4
Rendement η [%]	73	73	66	66

Le rendement η d'un réducteur entraîne à une diminution du couple transmis à la charge

$$C_{ch} = \eta N C_{mot} \quad (2.82)$$

On peut alors montrer que le terme de transformation $1/N^2$ des paramètres de la charge vus par le moteur doit prendre en compte le rendement de la manière suivante

$$\frac{1}{N^2} \longrightarrow \frac{1}{\eta N^2} \quad (2.83)$$

Paramètres vus par le moteur Ainsi, dans les équations d'un moteur couplé à une charge, il faudra bien prendre garde à reporter les paramètres globaux du moteur et de la charge tels que

$$J = J_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} J_{ch} \quad (2.84)$$

$$R_f = R_{f,mot} + \frac{1}{\eta N^2} R_{f,ch} \quad (2.85)$$

$$\kappa = \kappa_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} \kappa_{ch} \quad (2.86)$$

2.7. Comportement d'un moteur DC

2.7.1. Paramètres d'un moteur

Afin de rendre les choses plus concrètes, appliquons ce que nous venons de voir en considérant un moteur à courant continu réel de type Maxon RE75-118825 dont la fiche technique est présentée dans la figure 2.17. Le moteur choisi a une puissance de 250 W, pèse 2.8 kg et mesure 75x75x201 mm³.

Lors de la lecture des caractéristiques techniques, il est important de bien considérer la signification des grandeurs fournies par les catalogues car les appellations varient d'un constructeur à l'autre. Dans notre cas, on a les équivalences présentées dans le tableau 2.2.

Catalogue	Cours
Courant à vide I_0	Courant asymptotique i_∞ pour $u(t) = U_0$
Vitesse à vide n_0	Vitesse asymptotique n_∞ pour $u(t) = U_0$
Courant de démarrage	Courant à rotor bloqué U_0/R
Constante de vitesse	Gain du moteur $K_{mot} \simeq 1/K_E$
Cte de temps <i>mécanique</i>	Cte de temps du moteur $\tau_{mot} \simeq JR/(K_T K_E)$

TABLE 2.2.: Équivalence des appellations

De plus, parmi les nombreuses valeurs fournies par le constructeur, on ne gardera que celles correspondant aux paramètres fondamentaux du moteur ainsi que les paramètres du modèle d'ordre 1. Ces valeurs sont présentées dans le tableau 2.3.

2.7.2. Comportement statique

Couple maximum Le courant et le couple du moteur sont maximums lorsque le rotor est bloqué car la fem $K_E \omega(t)$ est alors nulle. Ils valent alors

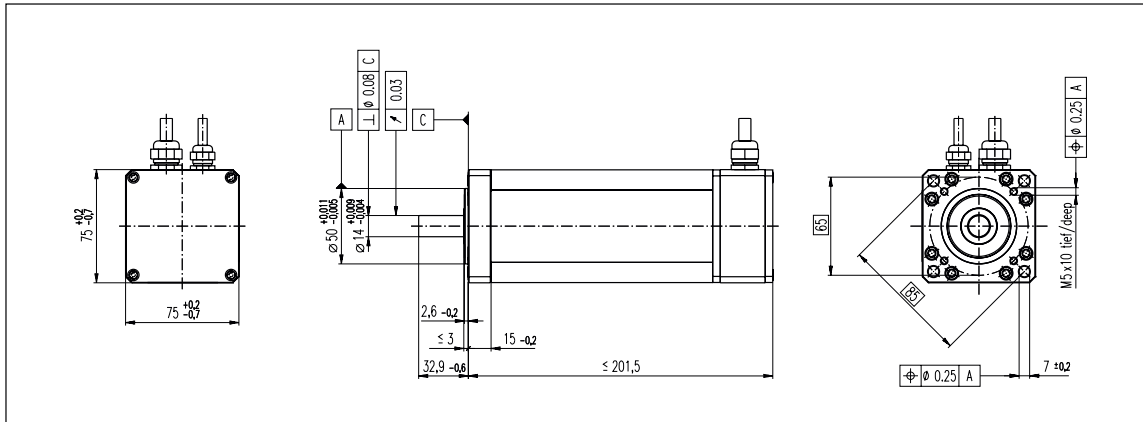
$$I_{max} = \frac{U_0}{R} = 34 \text{ [A]} \quad C_{max} = K_T \frac{U_0}{R} = 7.9 \text{ [Nm]}$$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

maxon DC motor

RE 75

75 mm, Commutation Graphite, 250 Watt



Caractéristiques moteur:

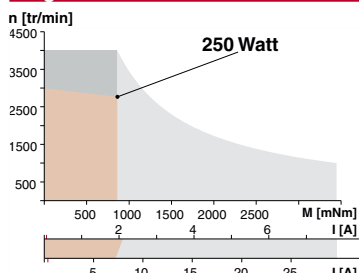
Numéros de commande

		118819	118820	118821	118822	118823	118824	118825	118826	118827	118828	118829
Sans surveillance des balais		118832	118833	118834	118835	118836	118837	118838	118839	118840	118841	118842
Avec surveillance des balais												
1	Puissance conseillée	W	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
2	Tension nominale	Volt	12.0	24.0	36.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0
3	Vitesse à vide	tr/min	1850	2770	2890	3100	2480	2300	1940	1550	1270	1150
4	Couple de démarrage	Nm	6.27	10.9	11.4	12.3	9.72	8.83	7.87	6.23	4.93	4.48
5	Pente vitesse/couple	tr/min/mNm	0.314	0.263	0.259	0.257	0.260	0.264	0.250	0.253	0.261	0.265
6	Courant à vide	mA	571	520	367	306	214	190	147	105	79	69
7	Courant de démarrage	A	108	136	98.4	84.5	53.5	45.0	33.9	21.4	13.8	11.4
8	Résistance aux bornes	Ohm	0.111	0.176	0.366	0.568	0.897	1.07	1.42	2.24	3.47	4.21
9	Vitesse limite	tr/min	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000
10	Courant permanent max.	A	10.00	9.70	7.23	5.98	4.89	4.53	3.98	3.21	2.61	2.38
11	Couple permanent max.	mNm	581	775	841	869	889	888	924	933	928	933
12	Puissance max. fournie à la tension nom.	W	273	748	838	973	618	521	393	249	161	133
13	Rendement max.	%	77	84	85	86	86	86	86	85	84	84
14	Constante de couple	mNm/A	58.1	79.9	116	145	182	196	233	291	356	392
15	Constante de vitesse	tr/min/V	164	119	82.1	65.7	52.6	48.7	41.1	32.9	26.8	24.3
16	Constante de temps mécanique	ms	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4
17	Inertie du rotor	gcm ²	1400	1460	1420	1400	1380	1360	1420	1400	1360	1360
18	Inductivité	mH	0.04	0.08	0.16	0.25	0.39	0.46	0.64	1.01	1.51	1.83
19	Résistance therm. carcasse/air ambiant	K/W	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
20	Résistance therm. rotor/carcasse	K/W	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
21	Constante de temps thermique du bobinage	s	100	110	100	100	99	97	100	100	97	95

Plages d'utilisation

Légende

Explications page 36

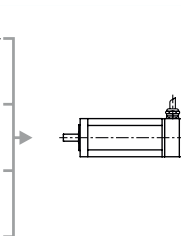
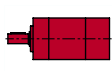


- Plage de puissance conseillée
- Plage de fonctionnement permanent. Compte tenu des résistances thermiques (lignes 19 et 20) et de la température ambiante à 25°C, la température max. du rotor sera atteinte. = Limite thermique.
- Fonctionnement intermittent. La surcharge doit être de courte durée.

- 118829 Moteur avec bobinage à haute résistance
- 118821 Moteur avec bobinage à basse résistance

Construction modulaire maxon

Réducteur planétaire
81 mm
20-120 Nm
Détail page 167



Frein
75 mm
24 VDC, 1,2 Nm
Détail page 189
Codeur digital
HP HEDS 5540
500 imp., 3 canaux
Détail page 176
Codeur digital
HP HEDL 5540
500 imp., 3 canaux
Détail page 178

Programme Stock

Programme Standard

Programme Spécial (sur demande!)

Système de surveillance des balais (Option)
Le signal de sortie est donné par un contact unipolaire d'ouverture.
Puissance applicable au contact max. 3 W
Tension de coupure max. 150 VDC
Courant de coupure max. 0.25 ADC
Presse-étoupe PG 7
diamètre d'ouverture 5 - 7 mm
Connectique moteur 6 mm
Cosse à câble rond PG 13
Presse-étoupe 8 - 15 mm
diamètre d'ouverture section recommandée du câble 2 x 4 mm²
Jeu axial < 0,15 mm
Roulements à billes (fixe sur la face avant)
Charge maximum des roulements
axiale (dynamique) 70 N
radiale (à 5 mm de la face) 350 N
Chassage (statique) 420 N
(statique, axe soutenu) 12000 N
Températures d'utilisation -20/+100°C
Température rotor max. +125°C
Nombre de lames au collecteur 26
Poids 2800 g
Les caractéristiques moteur du tableau sont des valeurs nominales.
Option: Arbre de sortie avec clavette A5 de passage (5x5x25 DIN 6885) sur demande

FIGURE 2.17.: Fiche technique des moteurs RE75

2.7. Comportement d'un moteur DC

Paramètres	Valeurs	Unités	Symboles	Valeurs SI	Unités SI
Tension nominale	48.0	V	U_0	48.0	V
Courant à vide	0.147	A	$I_0 \equiv i_\infty$	0.147	A
Vitesse à vide	1940	tr/min	$\omega_0 \equiv \omega_\infty$	203	rad/sec
Inertie du rotor	1420	gcm ²	J_{mot}	$0.142 \cdot 10^{-3}$	kgm ²
Résistance du bobinage	1.42	Ω	R	1.42	Ω
Inductance du bobinage	0.64	mH	L	$0.64 \cdot 10^{-3}$	H
Constante de couple	233	mNm/A	K_T	0.233	Nm/A
Constante de vitesse	41.1	(tr/min)/V	K_{mot}	4.3	(rad/sec)/V
Constante de temps	4	msec	τ_{mot}	$4 \cdot 10^{-3}$	sec

TABLE 2.3.: Paramètres fondamentaux d'un moteur et modèle d'ordre 1

Fonctionnement à vide Par fonctionnement à vide, on désigne le comportement du moteur seul (sans charge et sans couple extérieur) alimenté par sa tension nominale constante U_0 . Dès que le régime transitoire est terminé, la vitesse et le courant sont constants et on a

$$L \frac{di(t)}{dt} = 0 = u(t) - Ri(t) - K_E \omega(t)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = 0 = K_T i(t) - R_f \omega(t)$$

De la première équation, on déduit le coefficient de force électromotrice K_E qui, comme on peut le constater, est très légèrement supérieur à K_T

$$K_E = \frac{U_0 - RI_0}{\omega_0} = \frac{48 - 1.42 \cdot 0.147}{203} = 0.235 \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right]$$

De la deuxième équation, on tire le coefficient de perte mécanique

$$R_f = \frac{K_T I_0}{\omega_0} = \frac{0.233 \cdot 0.147}{203} = 0.17 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/sec}} \right]$$

Connaissant ces valeurs, on peut calculer le gain du moteur qui relie la vitesse de rotation ω_∞ à la tension appliquée U_0

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = \frac{0.233}{0.233 \cdot 0.235 + 1.42 \cdot 0.17 \cdot 10^{-3}} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

On notera que le gain ainsi trouvé est pratiquement égal à la constante de vitesse fournie par le constructeur

$$K_{mot,c} = 41.1 \left[\frac{\text{tr/min}}{\text{V}} \right] = 4.3 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

Remarque Comme mentionné plus haut, on peut voir que le produit des paramètres de puissance est beaucoup plus important que le produit des paramètres de perte

$$K_T K_E = 55 \cdot 10^{-3} \gg R R_f = 0.24 \cdot 10^{-3}$$

2.7.3. Comportement dynamique

Dans le cas où l'on bloque le rotor, le comportement électrique est décrit par la constante de temps

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 0.45 [ms]$$

Inversement, si on fait tourner sur le rotor avec le circuit électrique ouvert, sa dynamique est décrite par

$$\tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 840 [ms]$$

Ceci dit, il est très important de réaliser que, à cause du couplage électromécanique-mécanique, ces deux temps caractéristiques n'ont aucun intérêt pratique dès l'instant où le moteur est entraîné par une tension électrique. Le comportement dynamique du moteur ne peut alors être connu qu'à partir de l'analyse des pôles de sa fonction de transfert

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}$$

Dans le cas particulier du moteur RE75, elle vaut

$$G_{mot}(s) = 4.23 \frac{1}{1 + \frac{1}{272} s + \frac{1}{(778)^2} s^2}$$

On en déduit immédiatement le gain statique du moteur qui relie sa vitesse à la tension appliquée et les pôles de $G_{mot}(s)$

$$K_{mot} \equiv \frac{\omega_\infty}{U_0} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad p_{1,2} = \begin{cases} -1901 & [1/\text{sec}] \\ -319 & [1/\text{sec}] \end{cases}$$

Ceux-ci nous permettent de calculer les constantes de temps du moteur représenté par un modèle d'ordre 2

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = 0.53 [\text{msec}] \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} = 3.1 [\text{msec}]$$

et de décrire le moteur par sa fonction de transfert d'ordre 2

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{(1 + s \tau_1) (1 + s \tau_2)} \quad (2.87)$$

Modèle d'ordre 1 Dans le cas où on néglige l'effet de l'inductance, on obtient un modèle approximatif d'ordre 1 du moteur suffisant pour une première évaluation du comportement dynamique du moteur. La fonction de transfert devient alors

$$\begin{aligned} G_{mot}(s) &\equiv K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}} \\ &\simeq \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E + R R_f}} \end{aligned}$$

D'où

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \simeq \frac{K_T}{K_T K_E} = \frac{1}{K_E} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

$$\tau_{mot} = \frac{J R}{K_T K_E + R R_f} \simeq \frac{J R}{K_T K_E} = 3.7 \text{ [msec]} \simeq \tau_1 + \tau_2$$

La valeur de la constante de temps ainsi trouvée est très proche de celle proposée par la fiche technique $\tau_{mot} = 4 \text{ [msec]}$. On notera que la constante de temps du moteur est pratiquement égale à la somme des deux constantes de temps du système d'ordre 2 et qu'elle est plus grande que la constante de temps électrique mais beaucoup plus petite que la constante de temps mécanique

$$\tau_{elt} < \tau_{mot} \ll \tau_{mec}$$

Les graphes de la figure 2.18 illustrent le comportement du moteur RE75 représenté par le modèle d'ordre 2 et celui fourni par le constructeur

$$G_{mot,c}(s) = 4.3 \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-3} s}$$

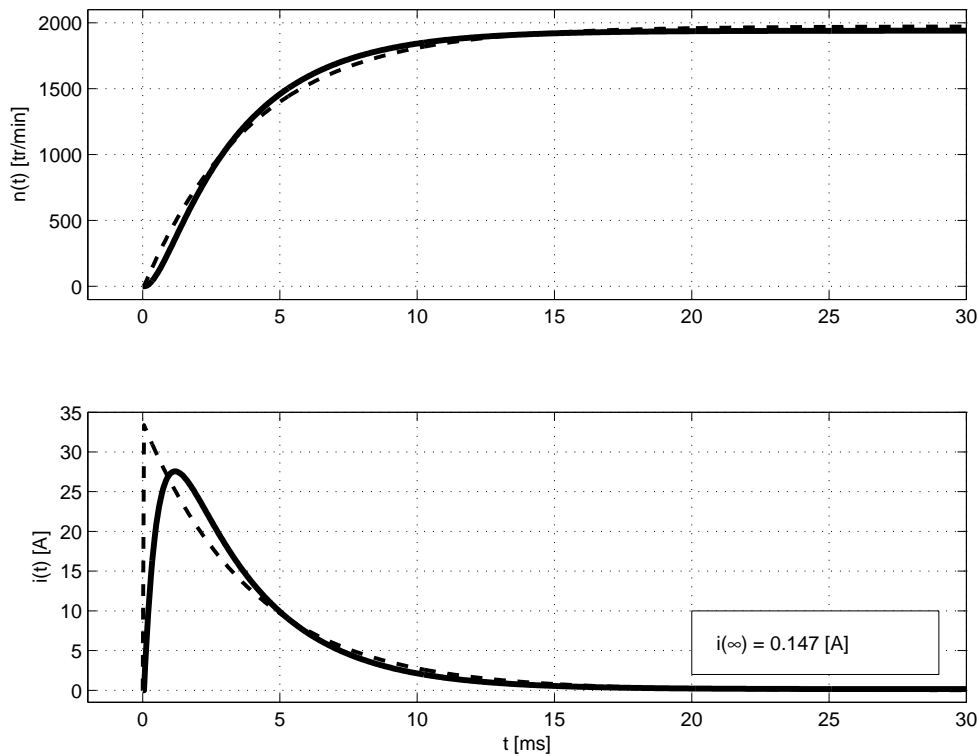


FIGURE 2.18.: Vitesse de rotation et courant d'un moteur DC avec son approximation d'ordre 1

2.7.4. Exemple

On charge un moteur RE75-118825 avec un disque en acier de diamètre $D = 20 \text{ [cm]}$, d'épaisseur $e = 2 \text{ [cm]}$ au travers d'un réducteur planétaire GP81 de rapport $N = 14$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

et de rendement $\eta=75\%$. Afin de chiffrer les frottements agissant sur la charge, on a lancé le disque seul sur son axe et on a observé qu'il s'arrête après environ 10 secondes. On demande de calculer

1. les paramètres du moteur K_E et R_f ;
2. les paramètres de la charge m_{ch} , J_{ch} et $R_{f,ch}$;
3. la charge totale vue par le moteur ;
4. les constantes de temps électrique et mécanique ;
5. la fonction de transfert du moteur et ses temps caractéristiques ;
6. son modèle d'ordre 1 ainsi que son gain et sa constante de temps ;
7. la vitesse de rotation n_∞ du moteur et le courant consommé i_∞ lorsque le moteur est alimenté par sa tension nominale.

Une fois ces calculs fait, on esquissera les évolutions temporelles de la vitesse et du courant.

Solution

Les paramètres intéressants fournis par la fiche technique du moteur RE75 sont les suivants

$$\begin{array}{ll} R & = 1.42 \Omega & U_0 & = 48 \text{ V} \\ L & = 0.64 \text{ mH} & I_0 & = 147 \text{ mA} \\ K_T & = 0.233 \text{ Nm/A} & n_0 & = 1940 \text{ rpm} \\ J_{mot} & = 1420 \text{ g cm}^2 & & \end{array}$$

Connaissant les valeurs SI de

$$J_{mot} = 1420 \cdot 10^{-7} = 1.42 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$\omega_\infty = 2\pi n_0/60 = 203 \text{ rad/sec}$$

on peut alors calculer les points suivants.

Paramètres du moteur K_E et R_f Du fonctionnement à vide du moteur, on tire

$$K_E = \frac{U_0 - R I_0}{\omega_0} = \frac{48 - 1.42 \cdot 0.147}{203} = 0.235 \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right]$$

$$R_{f,mot} = \frac{K_T I_0}{\omega_0} = \frac{0.233 \cdot 0.147}{203} = 0.17 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/sec}} \right]$$

Paramètres de la charge Le disque en acier de rayon $R_d = 0.1$ [m] et d'épaisseur $e_d = 2$ [cm] possède une masse et une inertie valant

$$m_d = \rho \pi R_d^2 e_d = 7800 \cdot \pi \cdot 0.1^2 \cdot 0.02 = 4.9 \text{ kg}$$

$$J_d = m_d \frac{R_d^2}{2} = 0.0245 \text{ kg m}^2$$

Le lancement du disque seul lancé sur son axe a montré qu'il s'arrête après environ 10 secondes. On en déduit que sa constante de temps vaut environ

$$\tau_d \simeq \frac{t_{trans}}{5} = 2 \text{ sec}$$

et que les pertes mécaniques peuvent être représentées par un frottement visqueux dont le coefficient vaut

$$R_{f,d} = \frac{J_d}{\tau_d} = \frac{24.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}{2 \text{ sec}} = 12.2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/(rad/sec)}$$

Charge totale vue par le moteur Comme le disque es relié au moteur à travers un réducteur de rapport $N = 14$ et de rendement $\eta = 75\%$, la charge totale entraînée par le moteur vaut

$$J = J_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} J_d = 0.309 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$R_f = R_{f,mot} + \frac{1}{\eta N^2} R_{f,d} = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ NM/(rad/sec)}$$

Constantes de temps électrique et mécanique Par définition, celles-ci valent

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 0.45 \text{ msec}, \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 1.22 \text{ sec}$$

Fonction de transfert du moteur avec sa charge On a vu plus haut que la fonction de transfert d'un moteur s'écrit

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}$$

On en déduit son gain

$$K_{mot} \equiv \frac{\omega_\infty}{U_0} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = 4.22 \text{ rad/sec/V}$$

qui peut être calculé par rapport à $n_\infty = \omega_\infty / 2\pi / 60$

$$K_{mot,n} \equiv \frac{n_\infty}{U_0} = K_{mot} \frac{60}{2\pi} = 40.3 \text{ rpm/V}$$

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Le dénominateur de $G_{mot}(s)$

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + s \frac{JR + LR_f}{K_T K_E + RR_f} + s^2 \frac{JL}{K_T K_E + RR_f} \\ &= 1 + 7.95 \cdot 10^{-3} s + 3.59 \cdot 10^{-6} s^2 \end{aligned}$$

permet de calculer les pôles et constantes de temps du moteur avec sa charge

$$p_{1,2} = \begin{cases} -134 & 1/\text{sec} \\ -2086 & 1/\text{sec} \end{cases} \Rightarrow \tau_{12} \equiv \frac{1}{|p_{1,2}|} = \begin{cases} 7.5 & \text{msec} \\ 0.5 & \text{msec} \end{cases}$$

Modèle d'ordre 1 Dans le cas où un des temps caractéristiques est très petit par rapport à l'autre, on peut considérer que le système d'ordre 2 peut être assimilé à système d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} D(s) &= (1 + s\tau_1) \cdot (1 + s\tau_2) \\ &= 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2 \\ &\simeq 1 + s(\tau_1 + \tau_2) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à un modèle décrit par

$$G_{mot,n}(s) \simeq K_{mot,n} \frac{1}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{40.3 [\text{rpm/V}]}{1 + 8 \cdot 10^{-3} s}$$

Évolution de la vitesse et du courant En régime permanent et à tension nominale, on a :

$$\begin{aligned} n_\infty &= U_0 K_{mot,n} \simeq 1936 \text{ rpm} \\ i_\infty &= \frac{U_0 - K_E \omega_\infty}{R} \simeq 0.22 \text{ A} \end{aligned}$$

L'évolution de la vitesse de rotation et du courant consommé est illustrée par les graphes de la figure 2.19 où l'on a porté également les résultats de l'approximation d'ordre 1.

2.8. Simulation d'un moteur DC

Dans cette section, on montre comment on peut obtenir des informations détaillées concernant le fonctionnement d'un moteur DC grâce à la simulation et, plus particulièrement, comparer les réponses du modèle complet (ordre 2) avec celles de son approximation d'ordre 1.

Remarque liminaire Matlab travaille avec des objets "fonction de transfert" définis par la commande `tf`. Grâce à cela, comme on va le voir, il est extrêmement simple de décrire des systèmes linéaires et d'analyser leur comportement comme on le ferait sur une feuille de papier.

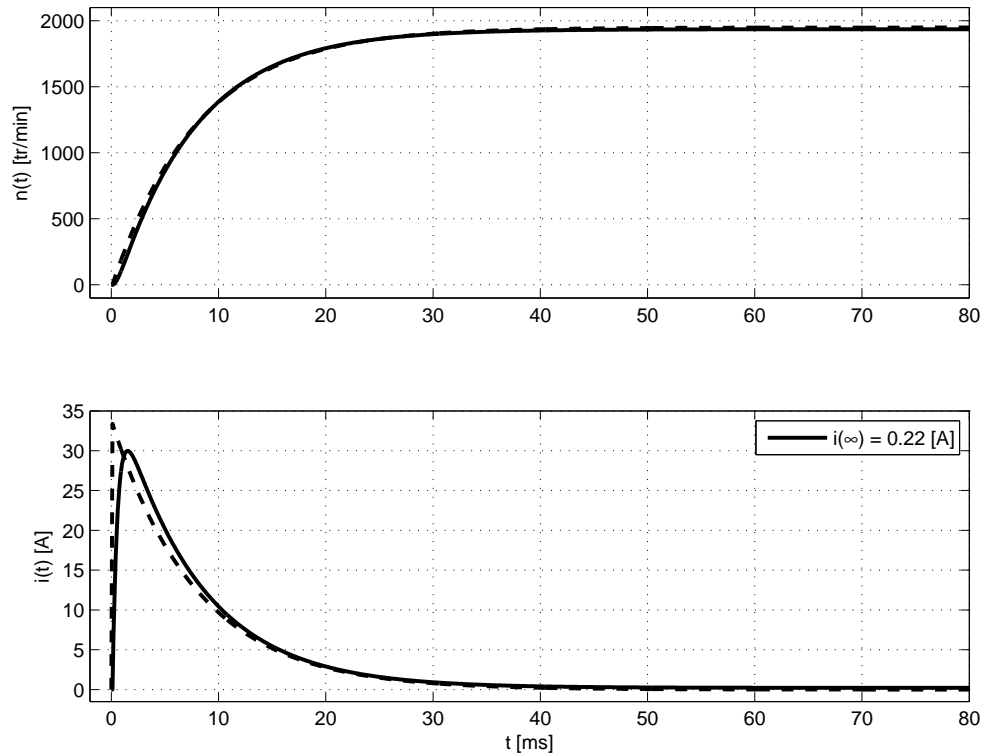


FIGURE 2.19.: Vitesse et courant d'un moteur DC chargé par un disque

Initialisation On doit d'abord initialiser le programme Matlab et fournir les grandeurs de la fiche technique.

```
% Simulation d'un moteur DC sans charge
% fmy - janvier 2006
clear all; close all; format compact; clc

% fiche technique du moteur RE075
U0 = 48;          % tension nominale
I0 = 0.147;       % courant à vide
n0 = 1940;        % vitesse à vide en tr/min
KT = 0.233;       % cte de couple
Kv = 41.1;        % cte de vitesse
Jm = 0.142e-3;    % inertie du rotor
R = 1.42;         % résistance aux bornes
L = 0.64E-3;      % inductance aux bornes
```

Paramètres On calcule ensuite les paramètres intéressants du moteur.

```
% parametres du moteur
w0 = n0/60*2*pi    % vitesse à vide en rad/sec
KE = (U0 - R*I0)/w0 % constante de fem
Rf = KT*I0/w0      % coeff. de frottement visqueux
```

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

```

Cmax = KT*U0/R           % couple maximum
Telt = L/R               % cte de temps electrique
Tmec = Jm/Rf            % cte de temps mecanique
Tmot = Jm*R/KT/KE       % cte de temps du moteur
KT_KE = KT*KE           % termes de puissance
R_RF = R*Rf             % termes de pertes

```

Fonction de transfert du moteur Avec Matlab, le calcul de la réponse d'un système linéaire se fait à partir de la donnée de la fonction de transfert. Dans notre cas :

$$\begin{aligned}
 G_{mot}(s) &\equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} = K_{mot} \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0 \omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2} \\
 &= \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}
 \end{aligned}$$

Cette fonction de transfert est définie à l'aide de son gain, son numérateur et son dénominateur

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \quad N(s) = 1 \quad D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0 \omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2$$

```

% fonction de transfert du moteur
Kmot = KT / (KT*KE + R*Rf)
wn    = sqrt((KT*KE + R*Rf)/(Jm*L))
Q0_wn = (KT*KE + R*Rf)/(Jm*R + L*Rf)
Q0 = Q0_wn / wn
num_Gmot = 1;
den_Gmot = [1/wn^2, 1/Q0_wn, 1]
Gmot = tf(Kmot*num_Gmot,den_Gmot);

```

Vitesse de rotation Le calcul de la réponse du moteur à un saut de tension se fait avec la fonction `lsim` (simulation de systèmes linéaires) à laquelle on passe la fonction de transfert et le signal d'entrée.

```

% grandeurs temporelles
tmax = 30e-3;      Npts = 1000;
dt = tmax/Npts;   tt = 0:dt:tmax-dt;

% reponse indicielle
Umot = U0*ones(size(tt)); % tension appliquée
Umot(1) = 0;
wt = lsim(Gmot,Umot,tt); % rotation en rad/sec
nt = wt/2/pi*60; % rotation en tr/min

% graphes

```

```
subplot(2,1,1);
plot(tt*1000,nt,'LineWidth',2); grid on;
ylabel('n(t) [tr/min]');
axis([-2,30,-100,2100]);
```

Courant consommé Comme on vient de le voir, les réponses temporelles sont calculées à partir des fonctions de transfert. Pour calculer le courant consommé, il faut donc définir une fonction de transfert correspondant au courant. Celle-ci est tout simplement égale à l'admittance représentée par la résistance et l'inductance

$$I(s) \equiv \frac{U_Z(s)}{Z(s)} = U_Z(s) Y(s) = (U(s) - K_E \Omega(s)) \frac{1}{R + sL}$$

Connaissant la tension aux bornes de l'admittance $Y(s)$

$$u_{RL}(t) = U_0 - K_E \omega(t)$$

on pourra calculer le courant $i(t)$ avec la fonction `lsim` puis le représenter dans un graphe.

```
% courant
Ys = tf(1, [L,R]);
ut_RL = Umot - KE*wt;
it = lsim(Ys,ut_RL,tt);
it_inf = it(end)

% graphes
subplot(2,1,2);
plot(tt*1000,it,'LineWidth',2); grid on;
ylabel('i(t) [A]');
xlabel('t [ms]');
axis([-2,50,-1.5,35]);

% pose en p0 d'un rectangle blanc de cotes dp
p0 = [20,2]; dp = [9,8];
px = p0(1)+[0,0,dp(1),dp(1)];
py = p0(2)+[0,dp(2),dp(2),0];
patch(px,py,'w');

% affichage du texte
texte = ['i(\infty) = ', num2str(it_inf,3), ' [A]'];
text(p0(1)+0.1*dp(1),p0(2)+0.5*dp(2),texte);
```

Dynamique du moteur Des informations particulières telles que les constantes de temps $\tau_{1,2}$ du moteur, la durée du régime transitoire, le courant et la vitesse maximums peuvent être affichées dans la fenêtre de commandes avec ces quelques lignes

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

```
% infos
p12 = roots(den)
tau_12 = 1./abs(p12)
t_trans = 5*max(tau_12)
i_max = max(it)
n_max = max(nt)
```

Approximation d'ordre 1 Pour terminer l'analyse temporelle, il est intéressant de comparer les résultats ci-dessus avec l'approximation d'ordre 1 proposée par le constructeur

$$G_{mot,1}(s) \simeq K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}}$$

```
% approximation d'ordre 1 (fiche technique)
K_mot = 41.1; % tr/min/V
tau_mot = 4e-3;
Gmot1 = tf(K_mot,[tau_mot,1]);
nt1 = lsim(Gmot1,Umot,tt);
it1 = U0/R*exp(-tt/tau_mot);
it1(1) = 0;
subplot(2,1,1); hold on;
plot(tt*1000,nt1,':');
subplot(2,1,2); hold on;
plot(tt*1000,it1,':');
```

On peut alors noter que l'approximation, bien que grossière, donne une assez bonne idée du comportement du moteur. Les graphes associés à ces calculs sont présentés dans la figure 2.20.

Réponse fréquentielle L'analyse du comportement du moteur peut être complétée par la représentation de sa réponse fréquentielle $G(j\omega)$. Dans Matlab, celle-ci se calcule aisément avec la fonction `freqs(num,den,w)`. Le code nécessaire pour le calcul et le traçage de la réponses fréquentielle est le suivant.

```
% reponse frequentielle
fmin =1; fmax = 1000;
ff = logspace(log10(fmin),log10(fmax),500);
Gmot_jw = freqs(num_Gmot,den_Gmot,2*pi*ff);
Gmot_db = 20*log10(abs(Gmot_jw));

figure;
subplot(2,1,1);
semilogx(ff,Gmot_db,'LineWidth',2); hold on;
semilogx([fmin,fmax],(max(Gmot_db)-3)*[1,1]); grid on;
title('Réponse fréquentielle d'un moteur DC');
ylabel('G_{dB}(f)');
```

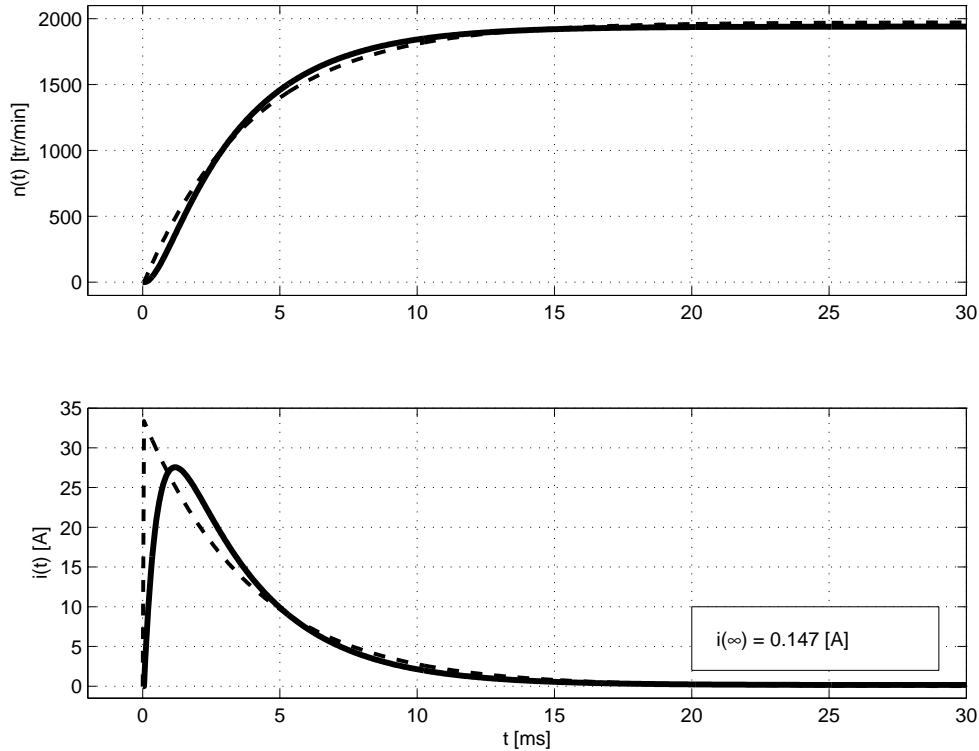


FIGURE 2.20.: Vitesse de rotation et courant d'un moteur DC

```
subplot(2,1,2);
semilogx(ff, angle(Gmot_jw)/pi*180,'LineWidth',2); grid on;
ylabel('\angle G(jf)');
xlabel('fréquence [Hz]');
```

L'observation de la réponse fréquentielle montre que la bande passante du moteur à vide est légèrement inférieure à 50Hz et que le moteur est donc capable de suivre une commande sinusoïdale d'une dizaine de Hz.

2.9. Conclusion générale

À l'issue de ce chapitre, il est intéressant de remarquer que pour étudier les systèmes analogiques on est amené à devoir utiliser l'ensemble des connaissances acquises dans la formation de base des ingénieurs à savoir les mathématiques, la mécanique, l'électricité, la physique, l'électromagnétisme, la simulation numérique.

Comme on a pu le constater, l'étude de ces systèmes nous oblige à faire la synthèse de notre savoir; chaque branche étudiée doit donc s'ouvrir aux autres sciences et être maîtrisée si l'on veut les appliquer au monde réel.

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

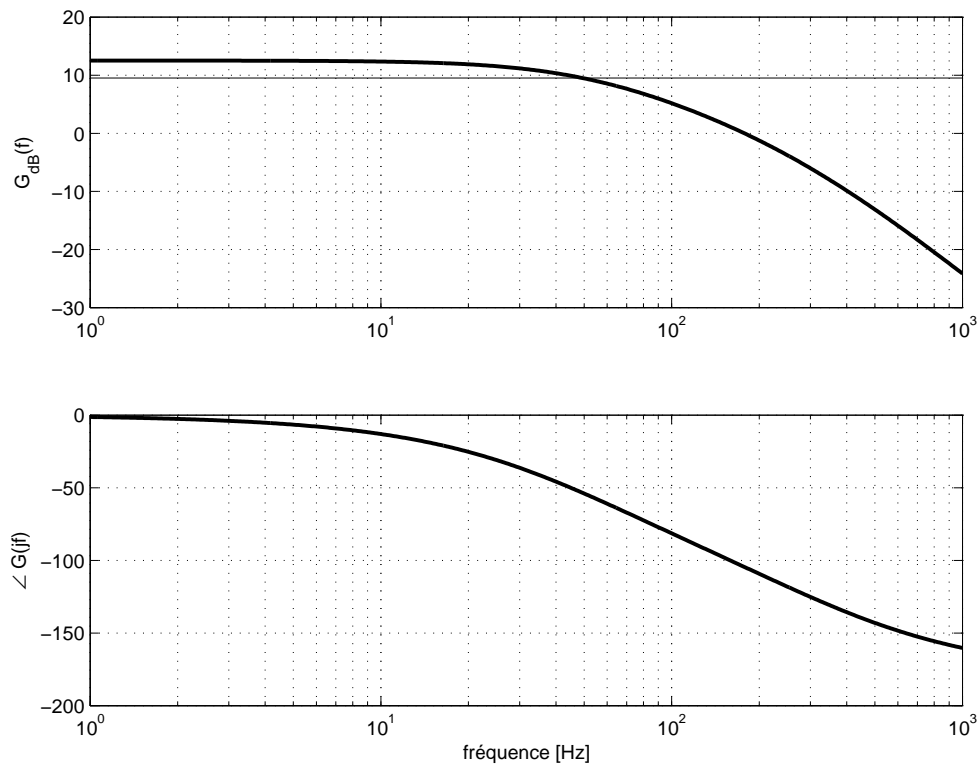


FIGURE 2.21.: Réponse fréquentielle d'un moteur DC

2.10. Exercices

Sanl 1 Le graphe de la figure 2.22 représente les résultats de mesure d'une bobine à noyau ferromagnétique. Proposez un modèle pouvant représenter ces résultats et tirez-en les valeurs des composants.

Sanl 2 On s'intéresse ici au mouvement d'une masse m suspendue à un ressort de constante k et d'amortissement λ .

1. Dessinez le schéma technologique représentant ce système et écrivez son équation différentielle en considérant qu'on applique à la masse une force $F(t)$.
2. Calculez la fonction de transfert $G(s)$ reliant la position $y(t)$ à la force $F(t)$; écrivez-la dans la forme canonique de Laplace. Tirez-en les expressions de ω_n , ζ et Q_0 .
3. Montrez que les pôles d'un système oscillant d'ordre 2 valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Sachant qu'on définit

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad \text{et} \quad \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

montrez que

$$\omega_n = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}}$$

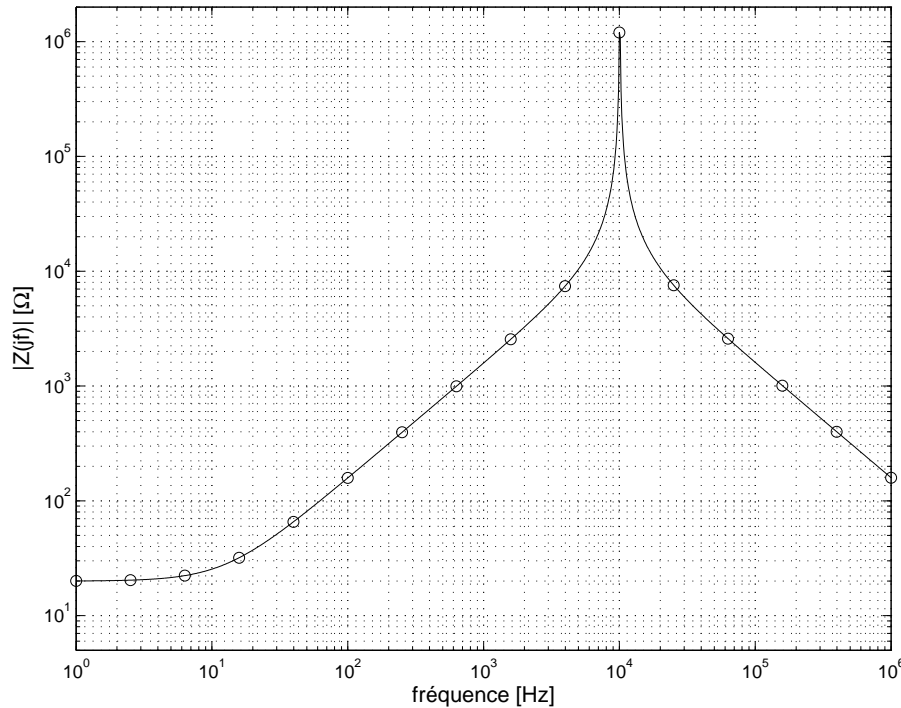


FIGURE 2.22.: Mesure de l'impédance d'une bobine

4. L'application à l'instant $t = 0$ de la force $F(t) = -mg$ conduit au mouvement $y(t)$ présenté à la figure 2.23. Déduisez de ce graphe la constante de temps de l'amortissement et la période de l'oscillation. Tirez-en les valeurs numériques de ω_n , ζ et Q_0 .
5. Sachant que la masse m vaut 100 grammes, calculez la constante de rappel du ressort et le coefficient d'amortissement.
6. Comment justifiez-vous la valeur de la position finale ($\simeq -62$ mm) de la masse ?

Sani 3 On considère un seau d'eau de diamètre $D_1 = 25$ [cm] dont la base est percée d'un trou de diamètre $D_2 = 1$ [cm]. Admettant qu'on le remplit avec un débit constant de 1, 2 ou 3 [dl/sec], calculez la hauteur d'équilibre et le temps nécessaire pour l'atteindre. Quelle relation voyez-vous apparaître entre le débit, la hauteur atteinte et la durée de remplissage ?

Sani 4 On s'intéresse ici au comportement d'une masse suspendue à un ressort dont on a mesuré la caractéristique $F(y)$. Celle-ci est manifestement non linéaire (figure 2.24). Le polynôme d'ordre 3 passant au mieux parmi les points mesurés est le suivant

$$F(y) = 11655 y^3 - 8365 y^2 + 2050 y - 160 \text{ [N]}$$

On notera que cette expression n'a pas de sens en dehors du domaine mesuré car pour une elongation nulle ($y = 0$), le ressort fournit une force négative ($F(0) = -160$ [N]).

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

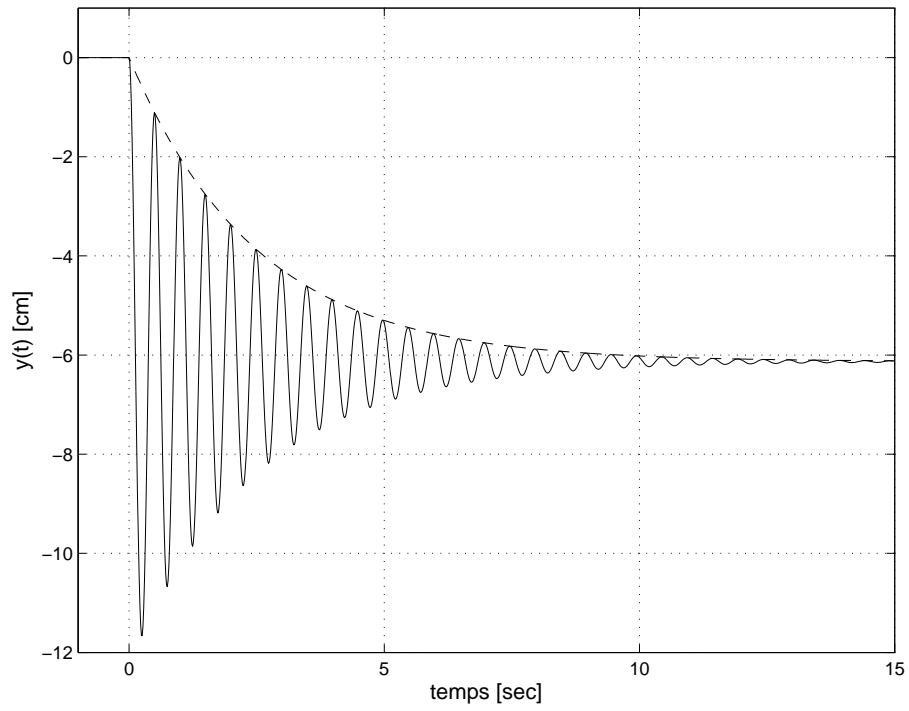


FIGURE 2.23.: Position d'une masse suspendue à un ressort

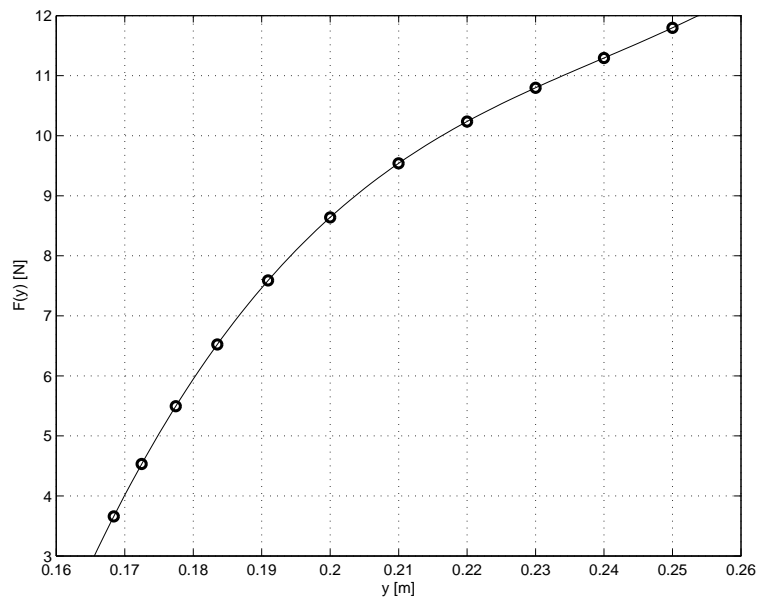


FIGURE 2.24.: Caractéristique statique d'un ressort

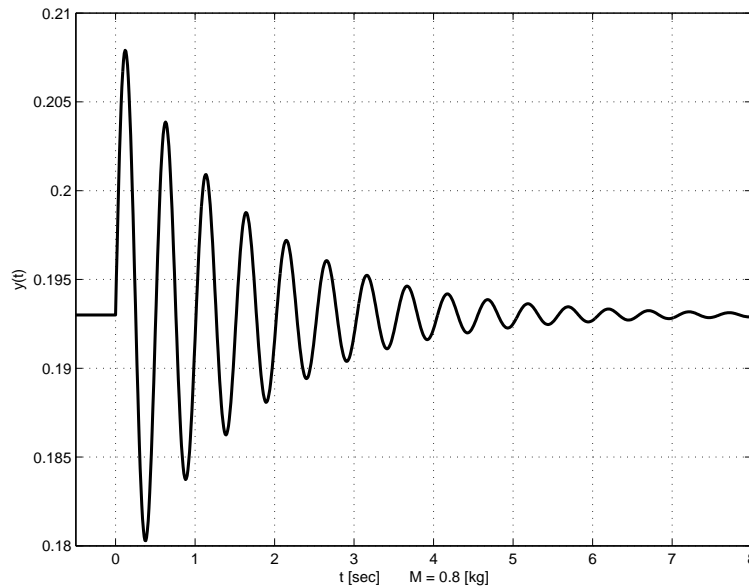


FIGURE 2.25.: Position d'une masse suspendue à un ressort

1. Sachant que le point de suspension du ressort est fixe, dessinez le schéma technologique représentant ce système et écrivez son équation différentielle linéaire autour du point d'équilibre fixé par le poids de la masse.
2. Admettant que les pertes sont faibles, rappelez sous forme littérale ce que valent la constante de temps d'amortissement et la période d'oscillation en fonction de k et m .
3. Considérant que la masse suspendue vaut 0.4, 0.8 ou 1.0 [kg] et sachant que le coefficient d'élasticité autour d'un point de fonctionnement est défini par

$$k = \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=Y_0} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

quels seront les positions d'équilibre et coefficients d'élasticité respectifs ?

4. Si la masse oscille légèrement autour de sa position d'équilibre, on peut considérer que le système est linéaire. L'enregistrement de la figure 2.25 permet d'estimer que le coefficient d'amortissement λ vaut environ 1 [N/(m/sec)]. Pour chacune des trois masses, calculez la période d'oscillation, la constante de temps et le nombre de périodes visibles.
5. A partir de l'enregistrement de la position d'une masse de 0.8 kg (figure 2.25), pouvez-vous trouver les coefficient d'élasticité k et de frottement λ du ressort ?

Sanl 5 On considère ici le comportement d'un petit moteur DC ($P=11\text{W}$, $D=32\text{mm}$, $L=45\text{mm}$) ; ses paramètres sont donnés dans le tableau 2.4. Calculez leurs valeurs SI et complétez le tableau.

1. Rappelez les équations différentielles du moteur DC. Que deviennent-elles en régime permanent ?

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Paramètres	Valeurs	Unités	Symboles	Valeurs SI	Unités SI
Tension nominale	18	V	U_0		V
Courant à vide	37	mA	$I_0 \equiv i_\infty$		A
Vitesse à vide	8000	tr/min	$\omega_0 \equiv \omega_\infty$		rad/sec
Inertie du rotor	18.4	gcm ²	J_{mot}		kgm ²
Résistance du bobinage	5.5	Ω	R		Ω
Inductance du bobinage	0.8	mH	L		H
Constante de couple	20.8	mNm/A	K_T		Nm/A
Constante de f.e.m			K_E		
Coeff. de frottement			R_f		

TABLE 2.4.: Paramètres d'un moteur

- De ces deux équations, tirez les deux paramètres K_E et R_f manquants dans le tableau 2.4 ; précisez leurs unités.
- Calculez la fonction de transfert du moteur $G_{mot}(s)$; exprimez-la dans la forme de Bode. Que vaut son gain (avec ses unités) ? Quelle signification lui donnez-vous ?
- Calculez les pôles et les constantes de temps du moteur ; que pensez-vous de leurs valeurs respectives ? Pouvez négliger l'une d'entre elles ? Écrivez l'approximation d'ordre 1 de $G_{mot}(s)$.
- Écrivez l'expression de la vitesse $\Omega(s)$. Que valent ses pôles ? Tirez-en la forme générale de $\omega(t)$. Calculez les vitesses $\omega(0_+)$ et $\omega(\infty)$ ainsi que $n(\infty)$ [tr/min]. Conclusion ?
- Esquissez avec soin l'évolution de la vitesse du moteur lorsqu'on lui applique la tension nominale.

Sanl 6 On considère ici un micro-moteur DC 3257 Faulhaber dont la fiche technique est donnée à la figure 2.26. Pour le moteur 24V, on demande :

- De la fiche technique, extrayez les informations nécessaires à la modélisation du moteur.
- Quel est le modèle d'ordre 1 proposé par le constructeur ? Que vaut le couple maximum que peut fournir le moteur ?
- Calculez les coefficient de fem et de frottement ainsi que les constantes de temps électrique et mécanique.
- Calculez la fonction de transfert du moteur. Tirez-en le gain, les pôles et constantes de temps du modèle d'ordre 2. Est-il raisonnable d'adopter un modèle d'ordre 1 ? Si oui, que vaut-il ?
- Comparez ces grandeurs avec celles fournies par le constructeur ainsi qu'avec τ_{elt} et τ_{mec} .
- On alimente le moteur à sa tension nominale ; calculez la vitesse de rotation du moteur et le courant consommé en régime permanent.
- Esquissez les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$.

DC-Micromotors

70 mNm

Graphite Commutation

For combination with
Gearheads:
32/3, 38/1, 38/2
Encoders:
IE2 - 64 ... 512, 5500, 5540

Series 3257 ... CR

	3257 G	012 CR	024 CR	048 CR	
1 Nominal voltage	U_N	12	24	48	Volt
2 Terminal resistance	R	0,41	1,63	6,56	Ω
3 Output power	$P_2 \text{ max}$	79,2	83,2	84,5	W
4 Efficiency	$\eta \text{ max}$	83	83	83	%
5 No-load speed	n_0	5 700	5 900	5 900	rpm
6 No-load current (with shaft \varnothing 5,0 mm)	I_0	0,258	0,129	0,064	A
7 Stall torque	M_H	531	539	547	mNm
8 Friction torque	M_R	4,9	4,9	4,9	mNm
9 Speed constant	k_n	500	253	125	rpm/V
10 Back-EMF constant	k_E	2,00	3,95	7,98	mV/rpm
11 Torque constant	k_M	19,1	37,7	76,2	mNm/A
12 Current constant	k_i	0,052	0,027	0,013	A/mNm
13 Slope of n-M curve	$\Delta n / \Delta M$	10,7	10,9	10,8	rpm/mNm
14 Rotor inductance	L	70	270	1 100	μH
15 Mechanical time constant	τ_m	4,7	4,7	4,7	ms
16 Rotor inertia	J	42	41	42	gcm^2
17 Angular acceleration	$\alpha \text{ max}$	130	130	130	10^3 rad/s^2
18 Thermal resistance	$R_{th 1} / R_{th 2}$	2 / 8			K/W
19 Thermal time constant	τ_{w1} / τ_{w2}	17 / 810			s
20 Operating temperature range:					
- motor		- 30 ... + 125			$^{\circ}\text{C}$
- rotor, max. permissible		+ 155			$^{\circ}\text{C}$
21 Shaft bearings		ball bearings, preloaded			
22 Shaft load max.:					
- with shaft diameter		5			mm
- radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		50			N
- axial at 3 000 rpm		5			N
- axial at standstill		50			N
23 Shaft play:					
- radial	\leq	0,015			mm
- axial	$=$	0			mm
24 Housing material		steel, black coated			
25 Weight		242			g
26 Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face			
Recommended values					
27 Speed up to	$n_{e \text{ max}}$	5 000	5 000	5 000	rpm
28 Torque up to	$M_{e \text{ max}}$	70	70	70	mNm
29 Current up to (thermal limits)	$I_{e \text{ max}}$	4,60	2,30	1,15	A

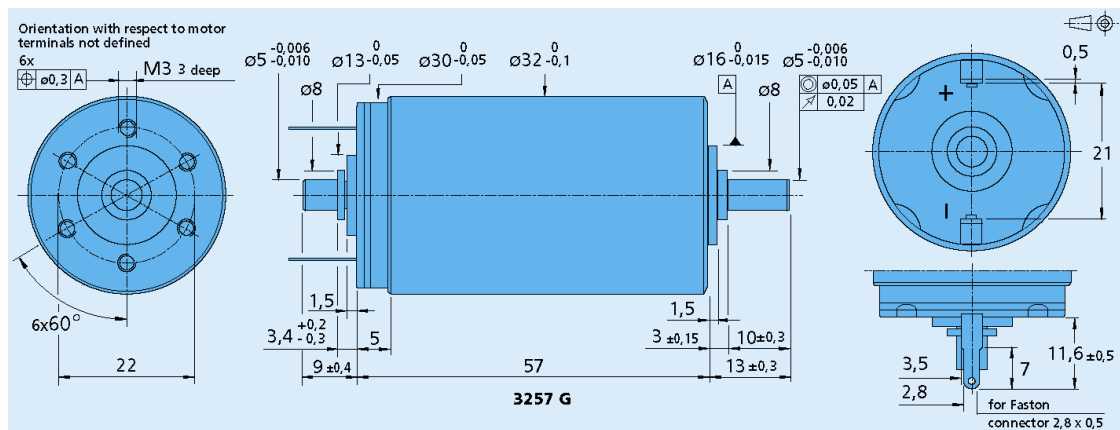


FIGURE 2.26.: Fiche technique des moteurs Faulhaber 3257

2. MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

Sanl 7 On charge un moteur Faulhaber 3257-24V avec un disque en acier de diamètre $D = 8$ [cm], d'épaisseur $e = 2$ [cm] au travers d'un réducteur G32-3 de rapport $N = 14$ et de rendement $\eta=80\%$. Admettant que les pertes vues par le moteur ont simplement doublé sous l'effet de la charge, calculez

1. le modèle d'ordre 1 de l'ensemble ;
2. la durée du régime transitoire, le courant consommé i_∞ et la vitesse n_∞ de la charge.

Sanl 8 On considère ici un micro-moteur DC RE13-118467 de faible puissance et haute vitesse. De la fiche technique, on a tiré les paramètres présentés dans le tableau 2.5.

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Tension nominale	U_0	9.0	V
Courant à vide	I_0	28	mA
Vitesse à vide	n_0	17200	tr/min
Constante de couple	K_T	4.95	mNm/A
Inertie du rotor	J_{mot}	0.484	gcm ²
Résistance du bobinage	R	3.5	Ω
Inductance du bobinage	L	0.11	mH
Constante de vitesse	K_{mot}	1930	tr/min/V
Cte de temps du moteur	τ_{mot}	7	ms
Puissance	P	2.5	W
Dimensions	$D \times L$	13x32	mm ²
Poids	m	25	gr

TABLE 2.5.: Paramètres d'un moteur DC RE13

1. Quel est le modèle d'ordre 1 proposé par le constructeur ? Que vaut le couple maximum que peut fournir le moteur ?
2. Calculez le coefficient de frottement ainsi que les constantes de temps électrique et mécanique.
3. Dessinez le schéma fonctionnel du moteur avec le couple extérieur.
4. Calculez les fonctions de transfert tension-vitesse $G_{mot}(s) = \Omega(s)/U(s)$, tension-position $G_\theta(s) = \Theta(s)/U(s)$ et couple-vitesse $G_C(s) = \Omega(s)/C_{ext}(s)$. Écrivez-les sous forme canonique.
5. Que valent le gain, les pôles et constantes de temps du moteur ?
6. Comparez ces grandeurs avec celles fournies par le constructeur ainsi que τ_{elt} et τ_{mec} . Est-il raisonnable d'adopter un modèle d'ordre 1 ? Si oui, que vaut-il ?
7. Est-il raisonnable de négliger les pertes ? Chiffrez l'erreur ainsi commise.
8. On alimente le moteur à sa tension nominale ; calculez la vitesse de rotation du moteur et le courant consommé en régime permanent.

9. Esquissez les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$.
10. On freine le moteur avec un couple extérieur $C_{ext} = 5 \text{ [mNm]}$; que valent alors la vitesse de rotation ω_∞ du moteur et le courant consommé i_∞ ?

3. Éléments de régulation automatique

La régulation automatique est une technique de l'ingénierie offrant les méthodes et les outils nécessaires à la prise de contrôle d'une ou plusieurs grandeurs physiques d'un système en vue d'en imposer le comportement. Avec le qualificatif *automatique*, on admet qu'aucune intervention humaine n'est nécessaire pour atteindre cet objectif.

Ce chapitre a pour but de sensibiliser l'étudiant à ce qu'est la régulation automatique et lui donner une information suffisante pour aborder des problèmes simples.

3.1. Schémas fonctionnels

Lorsque l'on veut décrire avec précision un système réel, on découvre fréquemment que les choses ne sont pas simples, en particulier parce que des interactions existent entre les parties. La démarche la plus simple consiste alors à remplacer chaque partie par des blocs fonctionnels que l'on relie entre eux. La liaison des blocs entre eux forme un schéma fonctionnel.

Cette représentation est abondamment utilisée car elle permet d'analyser un système dans son ensemble sans s'encombrer des détails de réalisation. De plus, elle correspond aux représentations utilisées dans les logiciels où la programmation est faite sous forme graphique (Simulink, Spice, etc).

3.1.1. Schéma à contre-réaction

Un schéma de base important est celui des systèmes à rétroaction tel qu'il est illustré par la figure 3.1. Il est constitué d'une branche directe dans laquelle on trouve le bloc $G(s)$ et d'une branche de rétroaction $H(s)$ aboutissant au sommateur Σ . Celui-ci peut faire la somme ou la différence des deux signaux ; dans le premier cas, on parlera de réaction positive et, dans le deuxième, de réaction négative ou plus simplement de contre-réaction.

L'écriture des équations correspondantes et leur résolution nous permettent de remplacer l'ensemble du schéma fonctionnel par un seul bloc : la fonction de transfert en boucle fermée $G_f(s)$. Les équations correspondant au schéma sont :

$$E(s) = W(s) - F(s)$$

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

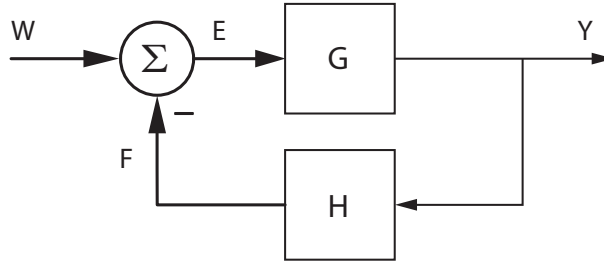


FIGURE 3.1.: Système à contre-réaction

$$F(s) = Y(s) H(s)$$

$$Y(s) = E(s) G(s)$$

En portant la première et la deuxième équations dans la troisième, il vient

$$\begin{aligned} Y(s) &= (W(s) - F(s)) G(s) \\ &= (W(s) - Y(s) H(s)) G(s) \\ &= W(s) G(s) - Y(s) H(s) G(s) \end{aligned}$$

En regroupant les termes en $Y(s)$, on obtient la relation fondamentale des systèmes à contre-réaction

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} W(s) \quad (3.1)$$

On peut ainsi définir la fonction de transfert en boucle fermée

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad (3.2)$$

Cette fonction de transfert est suffisamment importante pour qu'on lui donne le nom de "*formule de l'automaticien*". On notera que le produit $G(s) H(s)$ forme la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G_o(s) \equiv \frac{F(s)}{E(s)} = G(s) H(s) \quad (3.3)$$

Dans cas particulier fréquent où la branche de retour représentée par $H(s)$ est un simple fil (retour unitaire), on a bien évidemment

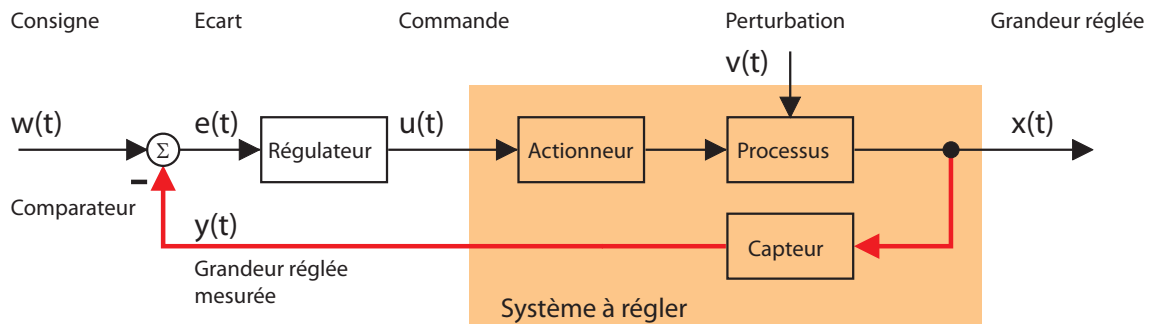
$$H(s) = 1, F(s) = Y(s)$$

d'où

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s), \quad G_f(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.4)$$

3.1.2. Schéma général d'un système asservi

Un système asservi est généralement décrit à l'aide d'un schéma fonctionnel (figure 3.2) constitué de blocs ayant chacun une signification précise (cf. tableau). Un



Élément	Fonction	Exemple
Comparateur	Il construit le signal d'erreur	Amplificateur différentiel
Régulateur	Il traite le signal d'erreur et construit le signal de commande	Régulateur PID
Organe de commande	Il agit directement sur le processus	Amplificateur de puissance
Processus	L'installation à asservir	Moteur
Capteur	Il forme une image $y(t)$ aussi fidèle que possible de la grandeur réglée $x(t)$	Dynamo tachymétrique

Signal	Remarques	Exemple
Consigne $w(t)$	Signal à poursuivre, généralement déterministe et défini pour une application donnée	Une rampe [V]
Grandeur réglée $x(t)$	Grandeur physique (avec ses unités propres [°C], [m], [m/s])	La vitesse de rotation [rad/sec]
Grandeur réglée mesurée $y(t)$	Image de la grandeur physique, généralement une tension électrique [V]	L'image de la vitesse [V]
Commande $u(t)$	Signal délivré par le régulateur à l'actuateur	Tension de commande [V]
Perturbation $v(t)$	Signal aléatoire représentant les perturbations intervenant sur le système à régler	Couple extérieur [Nm]
Écart $e(t)$	Différence entre la consigne et la grandeur réglée mesurée $y(t)$	Tension d'écart [V]

FIGURE 3.2.: Éléments constitutifs d'un système asservi

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

exemple de composants et signaux est donné dans le cas particulier d'un asservissement de la vitesse de rotation d'un moteur électrique. On notera qu'avec le schéma adopté, le **système à régler** comprend tous les éléments (actionneur, processus, capteur, etc) se trouvant entre la commande $u(t)$ délivrée par le régulateur et la grandeur mesurée $y(t)$.

3.1.3. Fonctions de transfert d'un système asservi

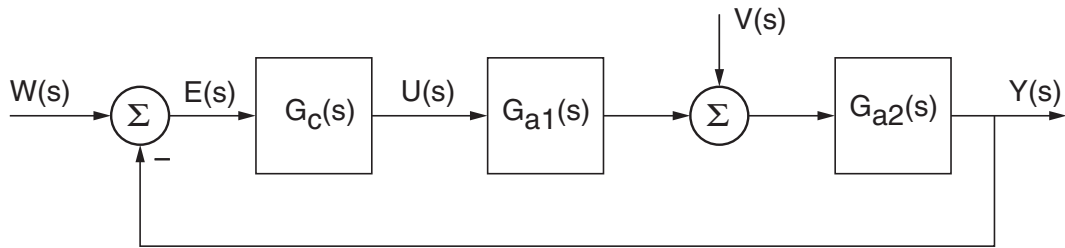


FIGURE 3.3.: Schéma fonctionnel universel

Les techniques de transformation et réduction des schémas fonctionnels permettent de présenter le schéma fonctionnel d'un système asservi quelconque sous la forme universelle de la figure 3.3. On notera que ce schéma universel est à retour unitaire et que les fonctions de transfert décrivant l'ensemble du système asservi sont

- le régulateur ou organe de commande $G_c(s)$;
- la partie $G_{a1}(s)$ du processus avant le signal de perturbation $v(t)$;
- la partie $G_{a2}(s)$ du processus après le signal de perturbation $v(t)$.

À partir de ces fonctions de transfert particulières, on peut calculer les fonctions de transfert générales décrivant :

1. Le système à régler

$$G_a(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{v(t)=0} = G_{a1}(s) G_{a2}(s) \quad (3.5)$$

2. Le système en boucle ouverte

$$G_o(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{E(s)} \right|_{\text{boucle ouverte}} = G_c(s) G_a(s) \quad (3.6)$$

Dans ce cas, la branche de retour n'est pas reliée au comparateur.

3. Le système en régulation de correspondance

$$G_w(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{W(s)} \right|_{v(t)=0} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.7)$$

dont le but est de suivre la consigne $w(t)$.

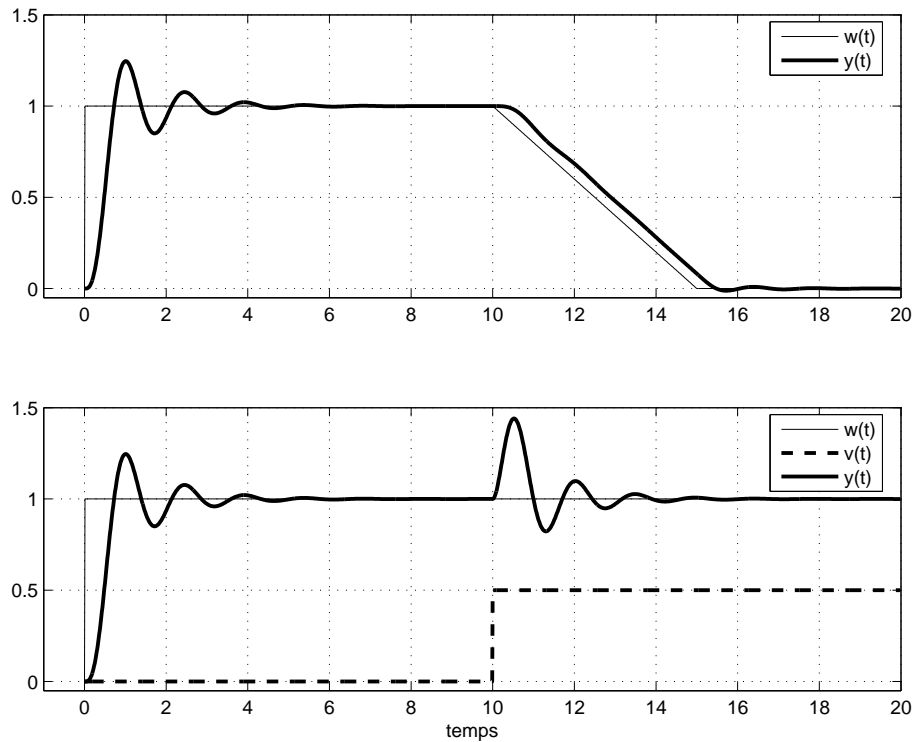


FIGURE 3.4.: Régulation de correspondance (en haut) et de maintien (en bas)

4. Le système en *régulation de maintien*

$$G_v(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{V(s)} \right|_{w(t)=0} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.8)$$

qui a pour tâche de maintenir la grandeur réglée $y(t)$ égale à la consigne $w(t)$ malgré la présence de perturbations $v(t)$.

La figure 3.4 illustre les réponses temporelles obtenues dans les deux modes de régulation automatique. Dans la réalité, les deux modes coexistent obligatoirement car le régulateur réagit à toute forme d'erreur quelle qu'en soit la cause (consigne variable $w(t)$ ou perturbation aléatoire $v(t)$). La réponse complète se calcule simplement par superposition des deux réponses indépendantes

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_v(s) = G_w(s)W(s) + G_v(s)V(s) \quad (3.9)$$

Par transformation inverse de Laplace, on obtient naturellement

$$y(t) = y_w(t) + y_v(t) \quad (3.10)$$

3.2. Analyse de systèmes simples

On considère ici un asservissement très simple constitué seulement d'un gain variable K_a positif et d'un système décrit par sa fonction de transfert $G_a(s)$ (figure 3.5).

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

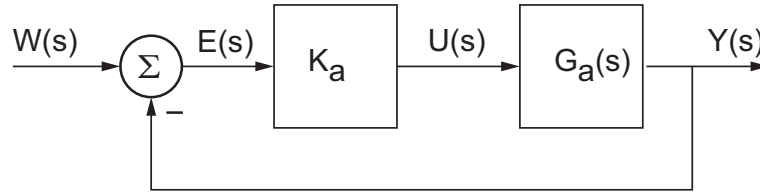


FIGURE 3.5.: Système asservi élémentaire

3.2.1. Systèmes d'ordre 1

Considérons un système d'ordre 1 décrit par

$$G_a(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte vaut alors

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{1 + s\tau}$$

Elle est caractérisée par son gain K_a et sa constante de temps τ .

Fonction de transfert en b.f. La fonction de transfert en boucle fermée se calcule simplement à partir de la formule de l'automaticien pour donner

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_a \frac{1}{1+s\tau}}{1 + K_a \frac{1}{1+s\tau}} = \frac{K_a}{1 + K_a + s\tau}$$

En écrivant $G_f(s)$ sous forme canonique

$$G_f(s) = \frac{K_a}{1 + K_a} \frac{1}{1 + s \frac{\tau}{1+K_a}}$$

on voit que le système asservi est caractérisé par un gain inférieur à K_a et une constante de temps plus rapide que τ

$$K_f = \frac{K_a}{1 + K_a} < 1, \quad \tau_f = \frac{\tau}{1 + K_a} < \tau$$

Comportement transitoire On rappelle que le comportement transitoire des systèmes est décrit par les pôles de la fonction de transfert. Dans ce cas, $G_f(s)$ étant d'ordre 1, il n'y a qu'un pôle qui vaut

$$p_1 = -\frac{1 + K_a}{\tau}$$

Le pôle étant à partie réelle négative, le système asservi sera toujours stable suivant la valeur du gain, on obtient les réponses indicielles illustrées par les graphes de la figure 3.6.

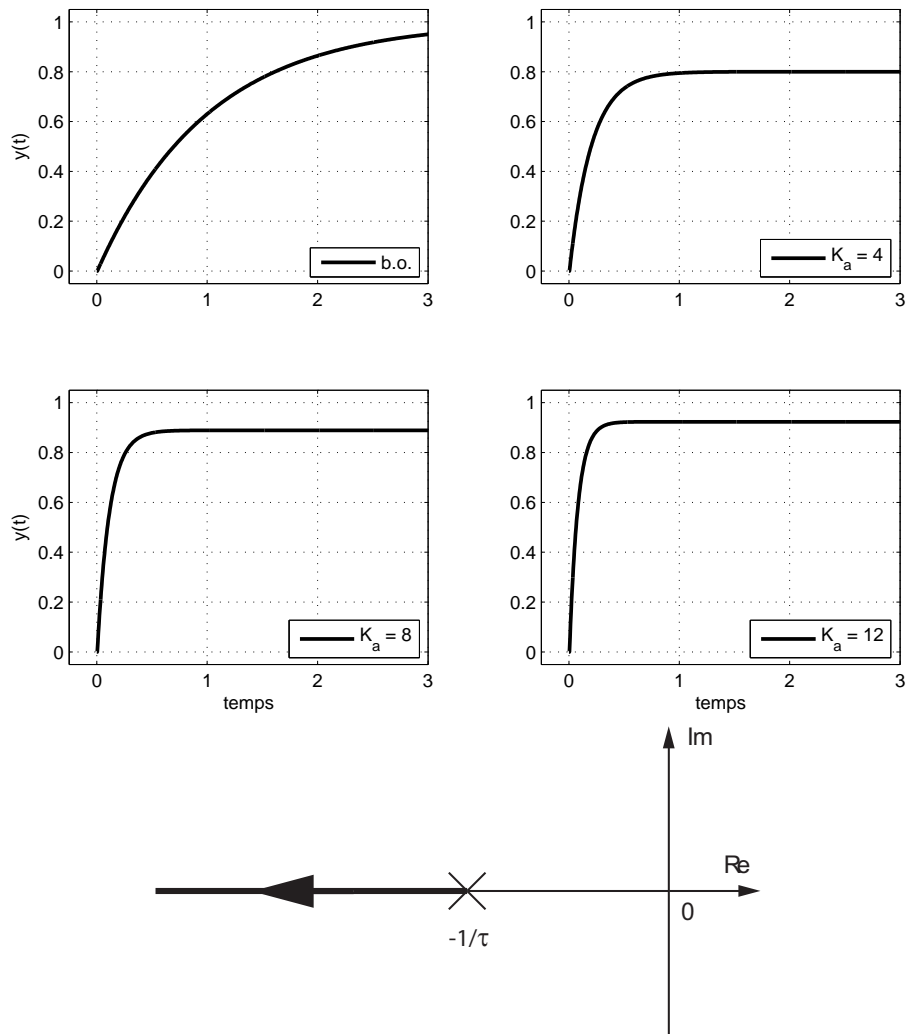


FIGURE 3.6.: Réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 1 et déplacement du pôle b.f. dans le plan complexe

Lieu du pôle en b.f. Il est intéressant de constater que, lorsque le gain K_a augmente, le pôle p_1 devient de plus en plus négatif. On voit ainsi que le système bouclé est d'autant plus rapide que le gain K_a est élevé. Une illustration du déplacement du pôle dans le plan complexe est présentée dans la figure 3.6.

3.2.2. Systèmes d'ordre 2

On reprend le système ci-dessus en lui ajoutant simplement une intégration

$$G_a(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(1+s\tau)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est alors d'ordre 2 et elle vaut

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}$$

On notera que sa réponse indicielle augmente linéairement avec le temps à cause de l'intégrateur. Ce qui correspond au fait que le gain DC d'un système intégrateur est infini.

Fonction de transfert en b.f. Le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée donne

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}}{1 + K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}} = \frac{K_a}{s^2\tau + s + K_a}$$

En écrivant $G_f(s)$ sous forme canonique

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + s \frac{1}{K_a} + s^2 \frac{\tau}{K_a}} = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

on voit que le système d'ordre 2 conduit à une fonction de transfert $G_f(s)$ caractérisée par :

1. Un gain DC égal à 1 grâce au terme intégrateur $1/s$ de la fonction de transfert $G_o(s)$

$$K_f = 1$$

2. Une pulsation naturelle variable qui augmente avec le gain K_a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_a}{\tau}}$$

3. Un coefficient d'amortissement qui diminue avec le gain K_a

$$\zeta = \frac{\omega_n}{2K_a} = \frac{1}{2\sqrt{K_a\tau}}$$

3.2. Analyse de systèmes simples

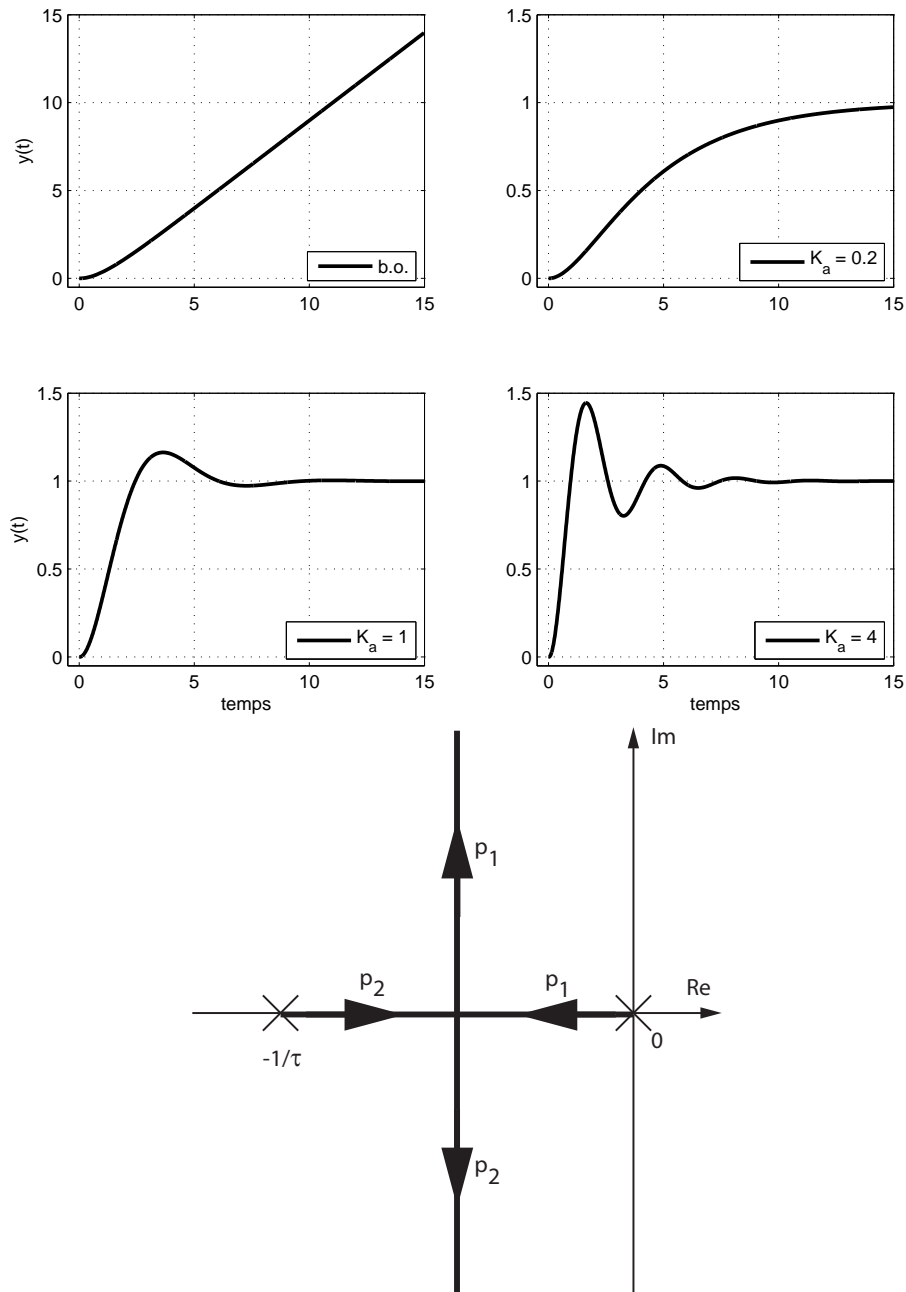


FIGURE 3.7.: Réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 2 et déplacement des pôles b.f. dans le plan complexe

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Comportement transitoire On voit ainsi (figure 3.7) que, dans un premier temps, la rapidité de la réponse augmente avec K_a . Puis, ζ diminuant, la réponse devient de plus en plus oscillante ($\zeta < 1$) sans que la durée du régime transitoire ne change car le produit $\zeta\omega_n$ est constant

$$\zeta\omega_n = \frac{1}{2\sqrt{K_a}\tau} \sqrt{\frac{K_a}{\tau}} = \frac{1}{2\tau}$$

On peut décrire plus précisément le comportement transitoire du système en calculant ses pôles qui sont les racines du dénominateur

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Ces pôles sont au nombre de 2 et valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

On voit ainsi que pour de **faibles gains**, on a

$$\zeta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_a \leq \frac{1}{4\tau}$$

Ce qui conduit à deux racines réelles négatives :

$$\text{une lente :} \quad p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

$$\text{une rapide :} \quad p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < p_1 < 0$$

Dans le cas de **forts gains**, on a

$$\zeta < 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_a > \frac{1}{4\tau}$$

Ce qui donne deux racines conjuguées complexes

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

La partie réelle détermine la rapidité du système bouclé

$$\tau_{bf} = \frac{1}{|Re(p_{1,2})|} = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 2\tau$$

alors que la partie imaginaire fixe la pulsation d'oscillation de la réponse transitoire

$$\omega_p = |Im(p_{1,2})| = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Les deux pôles étant à partie réelle négative, on en conclut que le système asservi sera toujours stable quelle que soit la valeur de K_a supérieure à 0.

Lieu des pôles en b.f. Une analyse plus détaillée de la valeur des pôles $p_{1,2}$ en fonction du gain K_a permet de voir les éléments suivants :

1. Pour $\zeta \geq 1$, c'est-à-dire $K_a \leq 1/(4\tau)$, les pôles sont situés entre l'origine du plan complexe et le pôle en boucle ouverte $-1/\tau$

$$-\frac{1}{\tau} < p_{1,2} < 0$$

Leur déplacement respectif conduit à une réponse indicielle qui tend de plus en plus rapidement vers la valeur asymptotique.

2. Pour $\zeta < 1$, c'est-à-dire $K_a > 1/(4\tau)$, les pôles ont une partie réelle constante et une partie imaginaire qui augmente avec K_a

$$Re(p_{1,2}) = -\zeta \omega_n = -\frac{1}{2\tau}$$

$$Im(p_{1,2}) = \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau K_a - \frac{1}{4}}$$

Comme la partie réelle reste constante, la rapidité du système ne change plus. Par contre, comme la partie imaginaire augmente en valeur absolue, la période d'oscillation diminue et le dépassement augmente fortement. En choisissant $\zeta = 1/\sqrt{2}$, on obtient un bon compromis entre la rapidité du temps de montée et un faible dépassement.

Une illustration du déplacement des deux pôles dans le plan complexe lorsque K_a varie de 0 à ∞ est présentée dans la figure 3.7.

3.2.3. Systèmes d'ordre supérieur à 2

Comme exemple illustratif, considérons un système d'ordre 3 décrit par

$$G_a(s) = \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte vaut alors

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}$$

Elle est caractérisée par son gain K_a et ses trois constantes de temps $\tau_{1,2,3}$.

Fonction de transfert en b.f. Le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée donne

$$\begin{aligned} G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{K_a \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}}{1 + K_a \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}} \\ &= \frac{K_a}{K_a + (1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)} \\ &= \frac{K_a}{1 + K_a + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) s^2 + (\tau_1 \tau_2 \tau_3) s^3} \end{aligned}$$

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

On voit ainsi que le système d'ordre 3 bouclé sur lui-même conduit à une fonction de transfert $G_f(s)$ d'ordre 3 caractérisée par :

1. Un gain DC

$$K_f = \frac{K_a}{1 + K_a}$$

2. Un dénominateur d'ordre 3 dont les racines dépendent de K_a .

Lieu des pôles en b.f. Une analyse plus détaillée de la valeur des pôles $p_{1,2,3}$ en fonction du gain K_a permet de voir que les pôles partent des pôles en boucle ouverte pour tendre vers trois asymptotes formant des angles égaux à $\pi/3$. Une illustration en est présentée dans la figure 3.8. On constate ainsi, que dans le cas de systèmes d'ordre supérieur à 2, la contre-réaction peut conduire à des pôles à partie réelle positive. Le système devient alors instable. Une illustration des réponses indicielles est donnée à la figure 3.8.

3.2.4. Conclusions

Des trois exemples ci-dessus, on peut tirer les conclusions générales suivantes. Dans un système asservi :

1. L'ordre du système asservi reste le même que celui du système en boucle ouverte.
2. Le gain en boucle fermée K_f est inférieur au gain K_a ; il tend vers 1 si K_a devient infiniment grand.
3. Si le système contient une intégration, le gain en boucle fermée K_f vaut 1.
4. La rapidité du système bouclé augmente avec K_a .
5. L'augmentation du gain K_a peut rendre le système asservi instable.

3.2. Analyse de systèmes simples

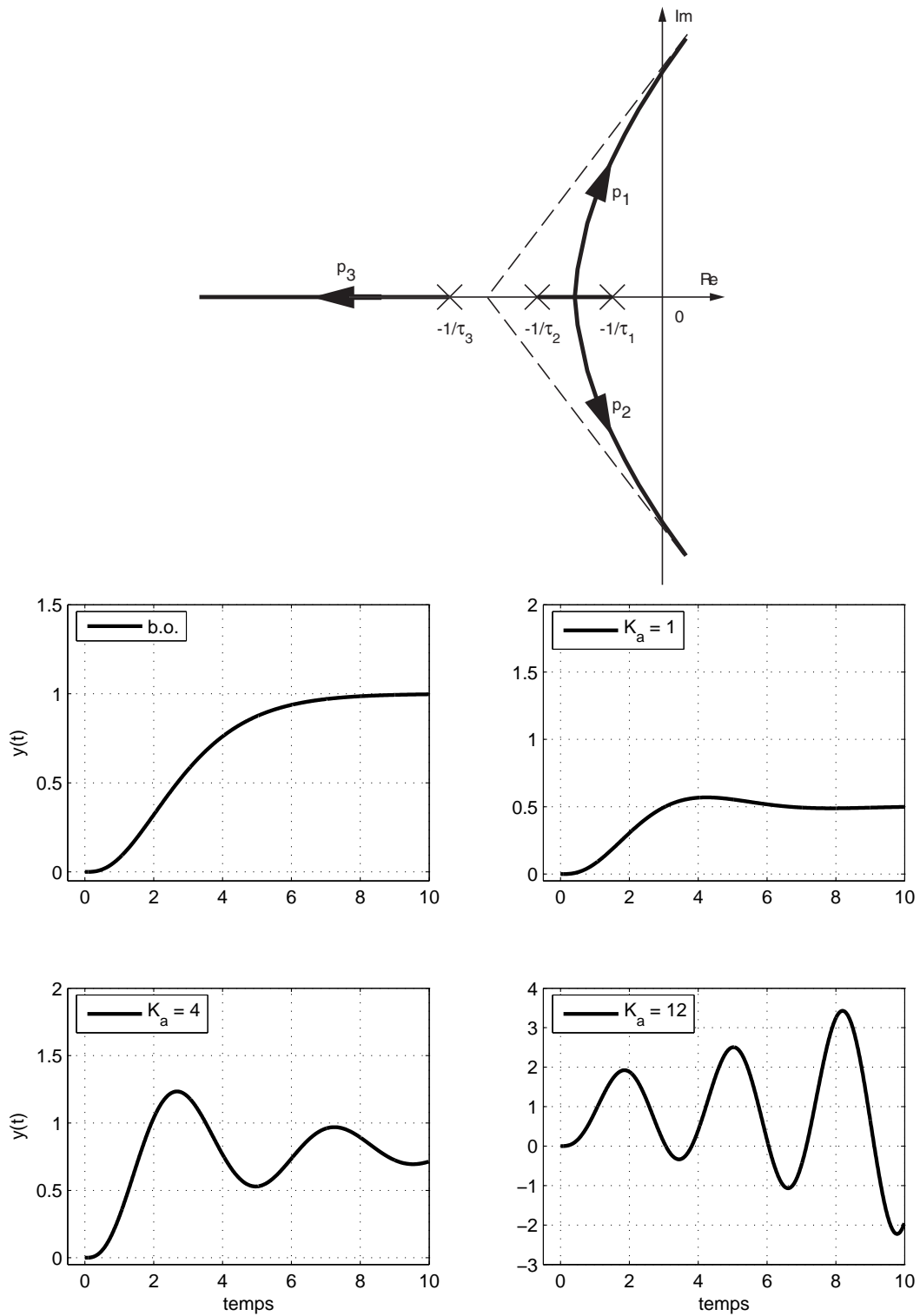


FIGURE 3.8.: Déplacement des trois pôles b.f. dans le plan complexe et réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 3

3.3. Calcul d'un asservissement de position

On considère à nouveau le moteur DC RE75 suivi d'un réducteur GP81 pour entraîner un disque en acier tel qu'il a été étudié dans le chapitre précédent. Cependant, afin de pouvoir asservir la position du disque, on y ajoute un amplificateur de puissance et un capteur de position potentiométrique tournant sur 360° environ.

Sachant que le réducteur a un rapport $N = 14$ et un rendement $\eta = 75\%$ et que le potentiomètre est alimenté par ± 15 [V], on demande :

1. Dessinez les schémas technologique et fonctionnel du système asservi comprenant l'amplificateur, le moteur (modèle d'ordre 1), le réducteur et le capteur de position.
2. Calculez la valeur numériques des paramètres du moteur K_{mot} , τ_{mot} ainsi que le gain K_θ du capteur de position.
3. Calculez les fonctions de transfert en boucles ouverte et fermée.
4. Calculez le gain K_a de l'amplificateur de puissance pour avoir une réponse optimum.
5. Calculez le temps de réglage de la position du disque.

Solution

- 1) Schémas technologique et fonctionnel du système asservi

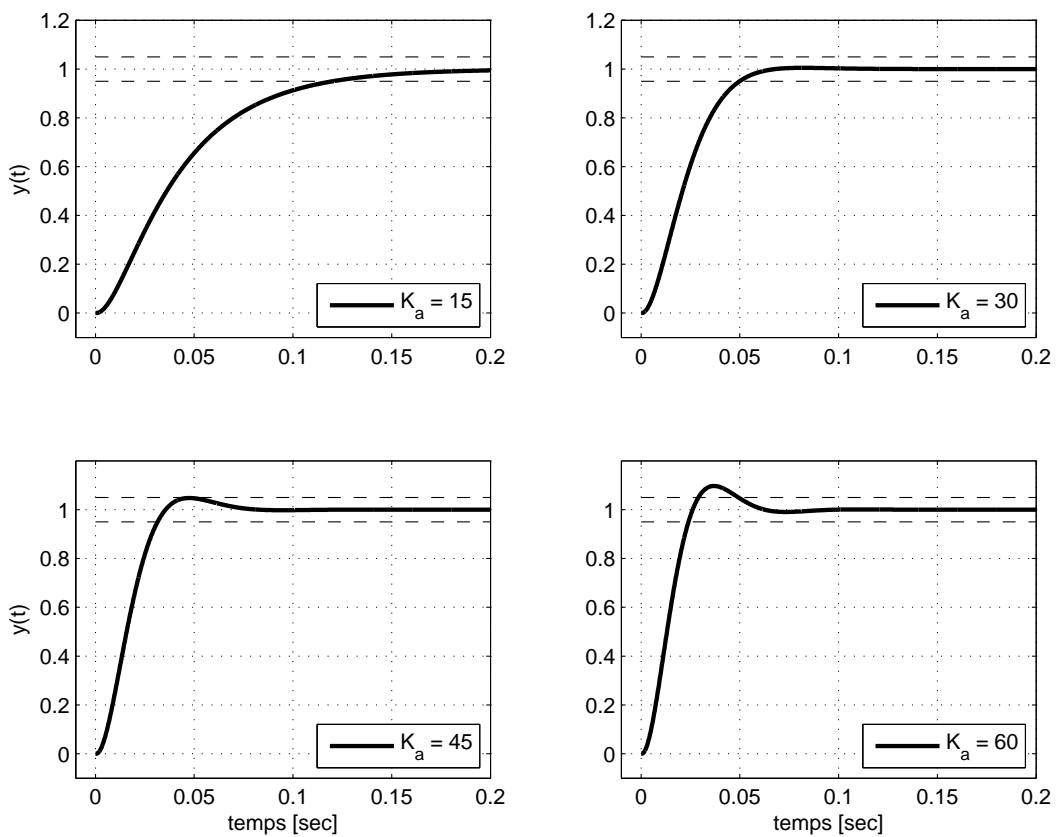
3.3. Calcul d'un asservissement de position

2) Valeurs des paramètres K_{mot} , τ_{mot} , K_θ

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3) Fonctions de transfert en boucles ouverte et fermée

4) Gain de l'amplificateur et temps de réglage de la position du disque



Réponses indicielles d'un asservissement de position

3.4. Étude d'un asservissement avec Matlab

Énoncé du problème On considère ici l'asservissement d'un système décrit par les fonctions de transfert du régulateur $G_c(s)$ et du processus $G_a(s)$

$$G_c(s) = \frac{2+s}{5s} \quad G_a(s) = \frac{1}{1+2s+3s^2}$$

Le but poursuivi est de trouver le gain K_a de l'amplificateur afin que la réponse indicielle ait un dépassement d'environ 10% (ceci est un bon compromis entre le temps de montée et la durée du régime transitoire).

Initialisation du fichier On commence par écrire l'entête d'un fichier que l'on enregistre sous un nom permettant de le retrouver facilement

```
% fichier: xple_asserv.m
% fmy - janvier 2006
% Analyse d'un asservissement
clear all; close all; clc;
format compact; format short g;
```

Donnée des fonctions de transfert Celles-ci sont décrites par le numérateur et dénominateur fournis sous forme de polynômes en s dans l'ordre décroissant

```
% fonctions de transfert
num = [1,2]; den = [5,0];
Gcs = tf(num,den);
num = 1; den = [3,2,1];
Gas = tf(num,den);
% fonction de transfert en b.o.
Ka = 1;
Gos = Ka *Gcs * Gas
```

Dans la fenêtre de commandes, Matlab affiche alors le résultat suivant :

```
Transfer function:
      s + 2
-----
15 s^3 + 10 s^2 + 5 s
```

Dynamique du système en b.o. Pour connaître le comportement transitoire, on extrait les numérateur et dénominateur de $G_o(s)$ afin de calculer les pôles du système :

```
[num_Go, den_Go] = tfdata(Gos, 'value');
zk = roots(den_Go)
```

```
pk = roots(den_Go)
tau_k = 1 ./ abs(real(pk))
T_k = 2*pi ./ abs(imag(pk))
t_trans = 5*tau_k
N_osc = t_trans ./ Tp_k
```

On obtient alors les résultats suivants :

zk =	pk =
-2	-0.333 ± j0.471
tau_k =	T_k =
Inf	Inf
3	13.329
3	13.329
t_trans =	N_osc =
Inf	NaN
15	1.1254
15	1.1254

La constante de temps τ_k et la période T_k infiniment grandes proviennent du pôle nul dû à l'intégration. Pour le reste, on voit que le système en boucle ouverte a un comportement légèrement oscillant durant environ 15 secondes. Une illustration de la dérivée du signal de sortie en b.o. est donnée dans le premier graphe de la figure 3.9.

Fonction de transfert en boucle fermée Avec $K_a = 1$, le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

```
Gfs = Gos / (1+Gos)
```

fournit le résultat suivant

```
Transfer function:
      15 s^4 + 40 s^3 + 25 s^2 + 10 s
-----
225 s^6 + 300 s^5 + 265 s^4 + 140 s^3 + 50 s^2 + 10 s
```

Ce résultat est surprenant, car on sait que la boucle d'asservissement ne change pas l'ordre du système qui dans notre cas vaut 3. Le résultat ci-dessus vient du fait qu'une simplification est possible entre le numérateur et le dénominateur. On peut le voir en demandant l'affichage de $G_f(s)$ avec la fonction `zpk` (zéro, pôle, gain) :

```
zpk(Gfs)
```

qui affiche le résultat suivant

```
Zero/pole/gain:
      0.0667 s (s+2) (s^2 + 0.6667s + 0.3333)
-----
s (s+0.4431) (s^2 + 0.2236s + 0.3009) (s^2 + 0.6667s + 0.3333)
```

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

On voit alors qu'une simplification par s ($s^2 + 0.6667s + 0.3333$) est possible. Celle-ci s'obtient avec la commande `minreal` (réalisation minimum) :

$$\text{Gfs} = \text{minreal}(\text{Gfs})$$

On obtient alors le résultat attendu :

$$\begin{array}{l} \text{Transfer function:} \\ 0.06667 s + 0.1333 \\ \hline s^3 + 0.6667 s^2 + 0.4 s + 0.1333 \end{array}$$

Analyse du système asservi Le système décrit par la fonction de transfert ci-dessus est d'ordre 3. Il possède un zéro et trois pôles

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 [1/\text{sec}] \\ p_1 &= -0.443 [1/\text{sec}] \\ p_{2,3} &= -0.1118 \pm j 0.537 [1/\text{sec}] \end{aligned}$$

On en déduit les temps caractéristiques suivants

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1/0.443 = 2.26 [\text{sec}] \\ \tau_{2,3} &= 1/0.1118 = 8.94 [\text{sec}] \\ t_{trans} &= 5 \tau_{2,3} \simeq 44 [\text{sec}] \\ T_{p,2,3} &= 2\pi/0.637 = 11.7 [\text{sec}] \\ N_{osc} &= 5\tau_{2,3}/T_{p,2,3} = 3.8 [\text{périodes}] \end{aligned}$$

Du théorème des valeurs limites, on tire les valeurs initiale et finale de sa réponse indicielle

$$y(t \rightarrow 0) = s Y(s)|_{s \rightarrow \infty} = s \frac{1}{s} G_f(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{0.1333}{s^3} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0$$

$$y(t \rightarrow \infty) = s Y(s)|_{s \rightarrow 0} = s \frac{1}{s} G_f(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{0.1333}{0.1333} = 1$$

On peut ainsi relever que grâce au terme d'intégration présent dans $G_c(s)$, la valeur finale $y(\infty)$ est égale à la consigne. Par contre, cette réponse indicielle est loin d'être optimale puisque l'on peut compter presque quatre périodes d'oscillation pendant la durée transitoire; ce qui est confirmé par le deuxième graphe de la figure 3.9. On est donc amené à devoir réduire le gain K_a du système asservi pour diminuer cette oscillation et, éventuellement, réduire la durée de réglage ou, ce qui est équivalent, son temps d'établissement.

Réponse indicielle en b.f. Pour le calcul et traçage de celle-ci, il faut définir auparavant le domaine temporel et la consigne $w(t)$:

```
% reponse temporelle
npts = 1000; tmax = 30;
dt = tmax/npts;
tt = 0:dt:tmax-dt;
% saut de consigne d'amplitude A
A = 2;
wt = A*ones(size(tt));
wt(1) = 0;
```

On calcule ensuite la réponse temporelle à un signal quelconque avec la fonction `lsim` (simulation de systèmes linéaires). Dans le cas de réponse indicielle, on peut se contenter d'utiliser la fonction `step`. Le calcul et traçage des réponses indiciaires pour différentes valeurs de gain K_a sont illustrés dans la figure 3.9.

```
figure;
Ka = [0.2,0.3,0.5,0.65];
for k1 = 1:length(Ka)
    Gfs = Ka(k1)*Gos / (1+Ka(k1)*Gos);
    Gfs = minreal(Gfs);
    yt = lsim(Gfs,wt,tt);
    subplot(2,2,k1);
    plot(tt,yt,'LineWidth',2);
    axis([-0.5,tmax,-0.05,2.5]); grid on;
    texte = ['K_a = ', num2str(Ka(k1),2)];
    if (k1 == 1) | (k1 == 3), ylabel('y(t)'), end;
    if (k1 == 3) | (k1 == 4), xlabel('temps'), end;
    legend(texte,4);
end;
```

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

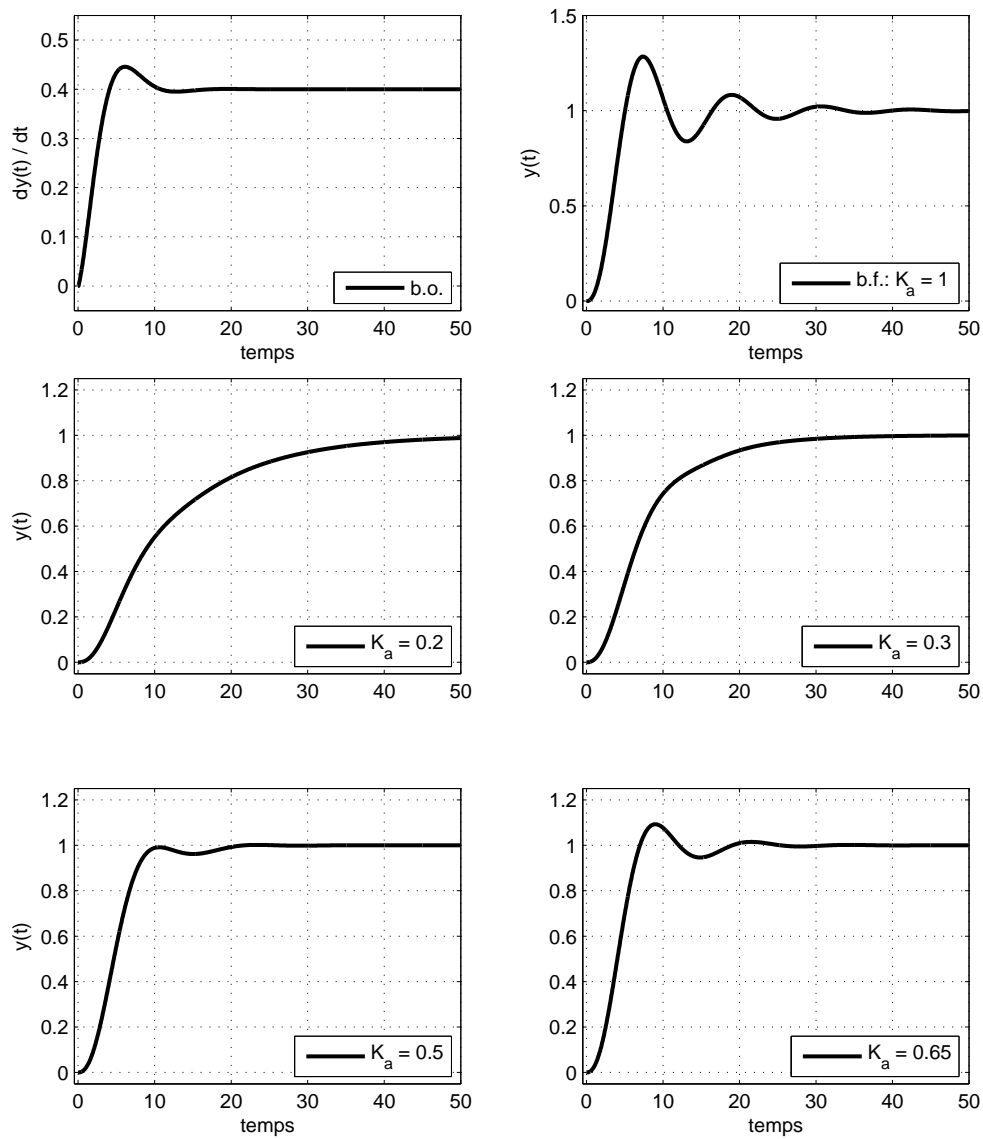


FIGURE 3.9.: Réponses indicielles d'un système asservi avec son optimisation

3.5. Une application : le circuit PLL

Les circuits à verrouillage de phase, communément désigné sous le nom de PLL (Phase Locked Loop) sont employés dans de très nombreuses applications telles que la démodulation de fréquence, la démodulation d'amplitude, la multiplication de fréquence, la synchronisation de signaux, etc. Une description détaillée du fonctionnement des PLL et de nombreux exemples d'applications sont donnés dans l'ouvrage de Michel Girard [2].

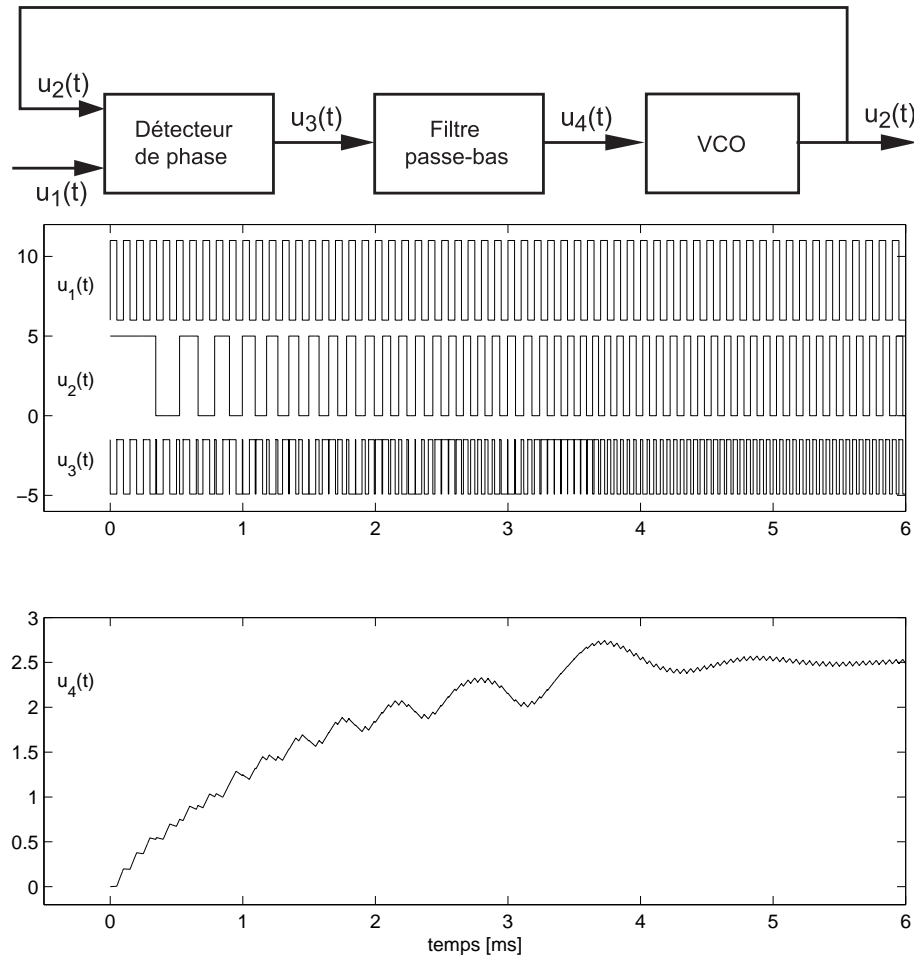


FIGURE 3.10.: Schéma de principe et signaux temporels d'un PLL

Les éléments nécessaires à la réalisation d'un tel système sont présentés avec les signaux dans la figure 3.10. On y trouve un détecteur de phase, un filtre passe-bas et un oscillateur commandé en tension (VCO). Avec le circuit PLL, on asservit la fréquence de l'oscillateur interne de manière à le synchroniser au signal de référence appliqué en entrée. Ce circuit est donc un système à contre-réaction dont le signal d'entrée est la pulsation $\omega_1(t)$ de la tension $u_1(t)$ alors que le signal de sortie est la pulsation $\omega_2(t)$ de la tension $u_2(t)$. L'illustration des signaux présents dans un circuit à verrouillage de phase montre très bien que, dans un premier temps (3ms environ), le PLL tente de "s'accrocher" au signal d'entrée. Dès lors qu'il y est parvenu, il se comporte comme un système linéaire.

3.5.1. Démodulation FM

Afin de rendre les choses plus concrètes, on peut encore décrire et observer les signaux rencontrés dans une opération de modulation–démodulation (figure 3.11). Ces signaux correspondent à l’émission et réception de signaux FM. On y trouve :

1. Le message à transmettre représenté ici par une sinusoïde de fréquence f_m de 1kHz.
2. Le signal envoyé par l’émetteur, de fréquence centrale $f_c= 15\text{kHz}$, qui transmet le message en variant légèrement celle-ci.
3. Le signal binaire lui correspondant.
4. Le signal de sortie du PLL.
5. Le signal fourni par le détecteur de phase.
6. Le signal démodulé comparé avec le message original.

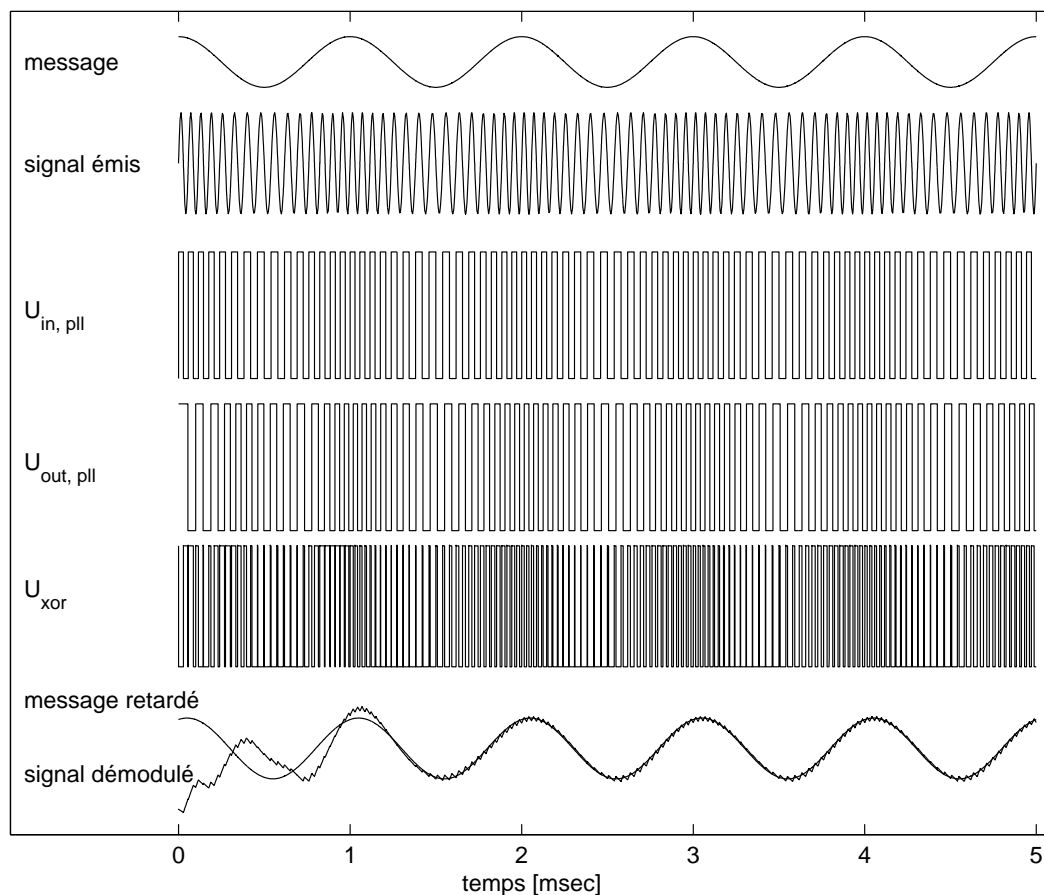
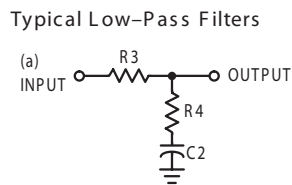
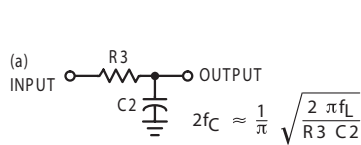
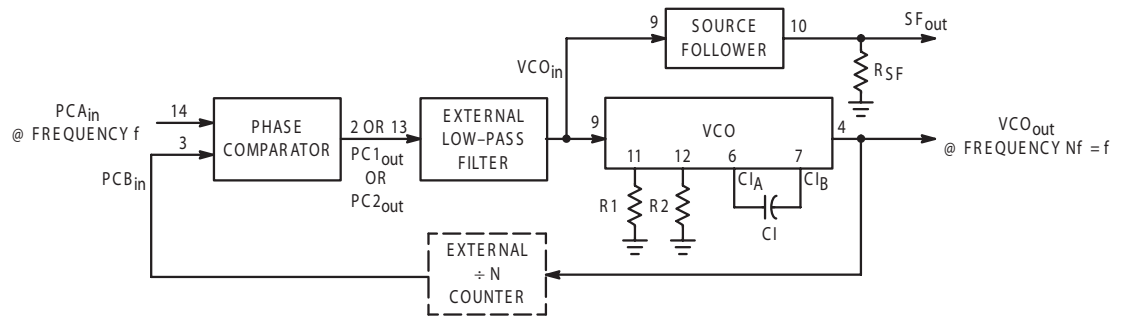


FIGURE 3.11.: Signaux d’un modulateur–démodulateur FM

Il est bien clair que les fréquences d’un système FM réel sont différentes puisque les émetteurs de radio FM transmettent les signaux audio (50Hz à 20kHz) avec une fréquence centrale d’environ 100MHz.

3.5. Une application : le circuit PLL



Typically:

$$R_4 C_2 = \frac{6N}{f_{\max}} - \frac{N}{2 \pi \Delta f}$$

$$(R_3 + 3,000\Omega) C_2 = \frac{100N\Delta f}{f_{\max}^2} - R_4 C_2$$

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$$

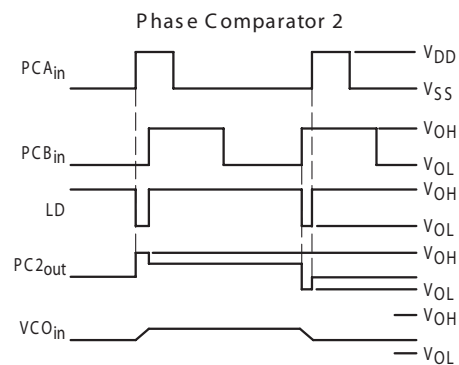
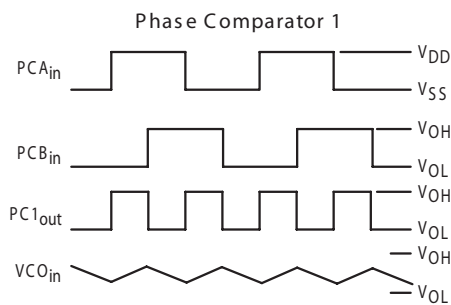
NOTE: Sometimes R3 is split into two series resistors each R3 ÷ 2. A capacitor C_C is then placed from the midpoint to ground. The value for C_C should be such that the corner frequency of this network does not significantly affect ω_n. In Figure B, the ratio of R3 to R4 sets the damping, R4 ≅ (0.1)(R3) for optimum results.

Definitions: N = Total division ratio in feedback loop
 K_φ = V_{DD}/π for Phase Comparator 1
 K_φ = V_{DD}/4 π for Phase Comparator 2
 $K_{VCO} = \frac{2 \pi \Delta f_{VCO}}{V_{DD} - 2 V}$
 for a typical design $\omega_n \cong \frac{2 \pi f_r}{10}$ (at phase detector input)
 $\zeta \cong 0.707$

LOW-PASS FILTER

Filter A	Filter B
$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\phi K_{VCO}}{N R_3 C_2}}$	$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\phi K_{VCO}}{N C_2 (R_3 + R_4)}}$
$\zeta = \frac{N \omega_n}{2 K_\phi K_{VCO}}$	$\zeta = 0.5 \omega_n (R_3 C_2 + \frac{N}{K_\phi K_{VCO}})$
$F(s) = \frac{1}{R_3 C_2 S + 1}$	$F(s) = \frac{R_3 C_2 S + 1}{S (R_3 C_2 + R_4 C_2) + 1}$

Waveforms



$$f_{\min} = \frac{1}{R_2(C_1 + 32 \text{ pF})} \quad (\text{VCO input} = V_{SS})$$

$$f_{\max} = \frac{1}{R_1(C_1 + 32 \text{ pF})} + f_{\min} \quad (\text{VCO input} = V_{DD})$$

Where: $10K \leq R_1 \leq 1 M$
 $10K \leq R_2 \leq 1 M$
 $100\text{pF} \leq C_1 \leq .01 \mu\text{F}$

FIGURE 3.12.: Extraits de la fiche technique du circuit MC14046B

3.5.2. Description d'un circuit PLL

Le circuit analysé par la suite est un 4046B (figure 3.12) pouvant travailler jusqu'à des fréquences de quelques MHz. Il est constitué de deux détecteurs de phase (nommés I et II), d'un VCO et d'un amplificateur suiveur de tension. Pour mener à bien son étude, il faut commencer par décrire exactement ce que fait chaque partie du circuit PLL.

Détecteur de phase

Le détecteur de phase I, dont on s'occupera ici, est une simple porte XOR recevant deux signaux carrés (figure 3.13). Son signal de sortie est un signal rectangulaire dont le rapport cyclique dépend de la différence de phase entre les signaux d'entrée. La tension moyenne, obtenue par filtrage passe-bas, est donc une mesure directe de ce déphasage

$$U_{3,moy} = \frac{V_{DD}}{\pi} \Delta\varphi \quad (3.11)$$

Filtre passe-bas ou à retard de phase

Le filtre passe-bas, nécessaire pour transmettre au VCO la tension moyenne en provenance du détecteur de phase, est un circuit externe composé de une ou deux résistances (R_3 et R_4) et d'une capacité C_2 (figure 3.14).

Caractéristique du VCO

Le domaine de fréquence dans lequel travaillera le VCO est choisi à l'aide des composants externes R_1 , R_2 et C_1 . La caractéristique d'un VCO est présentée dans la figure 3.16a. On y voit que pour une tension d'entrée comprise entre V_{min} et V_{DD} , la fréquence varie entre f_{min} et f_{max} et que f_0 est la fréquence obtenue lorsque $U_4 = V_{DD}/2$. Ces trois fréquences dépendent essentiellement des composants externes R_1 , R_2 et C_1 et relativement peu de la tension d'alimentation V_{DD} .

A la lecture des données fournies par les fabricants, on constate que les relations permettant d'évaluer la caractéristique du VCO sont très variables. On peut cependant retenir les relations suivantes valables pour une alimentation unipolaire $V_{DD} = 5[V]$:

$$f_{min} \simeq \frac{1}{R_2(C_1 + C_p)} \quad V_{min} \simeq 2V \quad (3.12)$$

$$f_{max} \simeq f_{min} + \frac{1}{R_1(C_1 + C_p)} \quad (3.13)$$

avec $10\text{ k}\Omega \leq R_{1,2} \leq 1\text{ M}\Omega$, $100\text{ pF} \leq C_1 \leq 10\text{ nF}$ et $C_p \simeq 35\text{ pF}$. On admet généralement que l'oscillateur est au repos lorsque la tension d'entrée vaut $V_{DD}/2$. Il oscille alors à sa fréquence de repos f_0 .

3.5. Une application : le circuit PLL

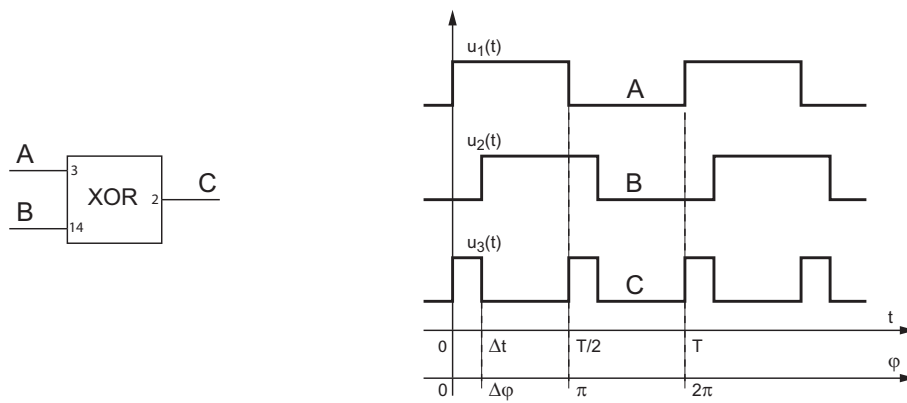


FIGURE 3.13.: Signaux d'un circuit XOR

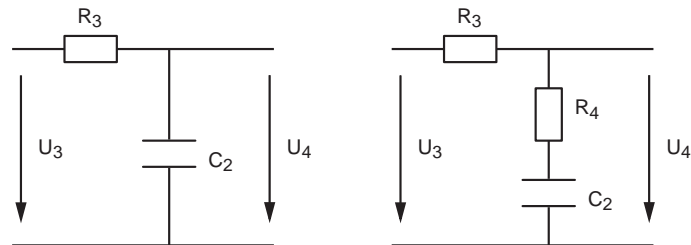


FIGURE 3.14.: Filtre passe-bas et filtre à retard de phase

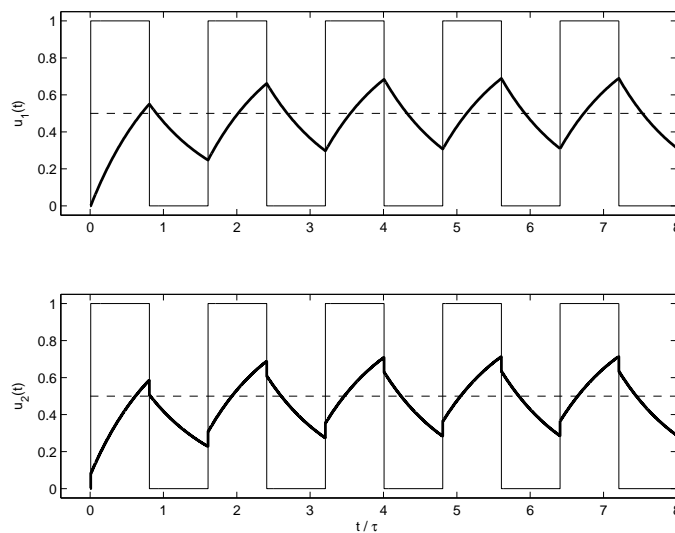


FIGURE 3.15.: Réponses temporelles d'un filtre passe-bas et d'un filtre à retard de phase

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

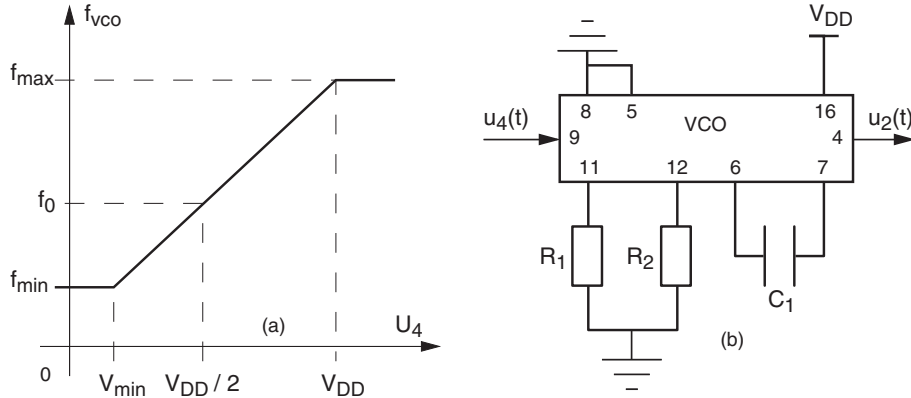


FIGURE 3.16.: Caractéristique d'un VCO (a) et son schéma de réalisation (b)

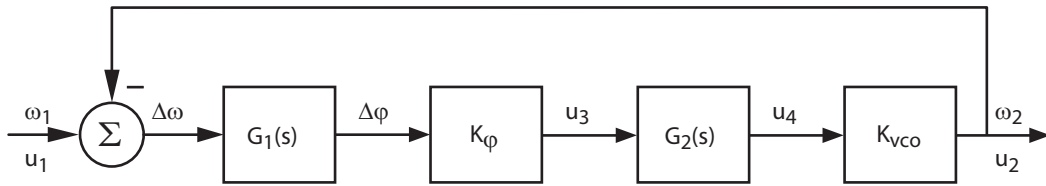


FIGURE 3.17.: Schéma fonctionnel d'un circuit à verrouillage de phase

3.6. Analyse du PLL en mode synchronisé

Nous considérons dans cette analyse la situation où le circuit PLL est déjà synchronisé sur la fréquence du signal extérieur. Le PLL est alors capable de suivre les variations de cette fréquence et son comportement peut être étudié à l'aide d'un modèle linéaire. Ce modèle linéaire est décrit par le schéma fonctionnel de la figure 3.17. On y trouve :

1. Le comparateur qui fait la différence des pulsations :

$$\Delta\omega(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$$

2. Le bloc qui fournit le déphasage instantané $\Delta\varphi(t)$ à partir de la différence des pulsations :

$$\Delta\varphi(t) = \int_0^t (\omega_1(t) - \omega_2(t)) dt = \int_0^t \Delta\omega(t) dt$$

En terme de fonction de transfert, ceci se traduit par

$$G_1(s) \equiv \frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta\Omega(s)} = \frac{1}{s} \text{ [sec]} \quad (3.14)$$

3. Le détecteur de phase qui relie la tension $u_3(t)$ au déphasage est décrit par son gain :

$$K_\varphi \equiv \frac{\Delta u_3}{\Delta\varphi} \left[\frac{\text{V}}{\text{rad}} \right] \quad (3.15)$$

4. Le filtre qui sert à lisser les variations de la tension $u_3(t)$:

$$G_2(s) \equiv \frac{U_4(s)}{U_3(s)} \left[\frac{\text{V}}{\text{V}} \right] \quad (3.16)$$

5. L'oscillateur (VCO) décrit par son gain :

$$K_{vco} \equiv \frac{\Delta\omega_2}{\Delta u_4} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (3.17)$$

3.6.1. Remarques importantes

A ce stade, il ne faut pas oublier que les signaux physiques sont uniquement des tensions :

- la tension d'entrée $u_1(t)$,
- la tension de sortie du VCO $u_2(t)$,
- la tension de sortie du détecteur de phase $u_3(t)$,
- la tension de sortie du filtre passe-bas $u_4(t)$.

Mais, les grandeurs qui nous intéressent sont :

- les **pulsations** $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$
- les **phases** $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ ou, leur différence, le déphasage $\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.

Contrairement à l'habitude prise en analyse fréquentielle, il faut bien voir que ces pulsations et phases sont des **variables temporelles**. Afin d'insister sur ce point, les grandeurs indiquées au-dessus des lignes du schéma fonctionnel sont celles sur lesquelles nous portons notre attention alors que les tensions mentionnées au-dessous ne sont que leurs correspondants.

De plus, il est important de comprendre que le comparateur Σ , l'intégrateur $G_1(s)$ et le gain K_φ n'existent pas séparément : ils sont inhérents au détecteur de phase.

3.6.2. Choix du filtre

Le but du filtre passe-bas est de transmettre au VCO la composante moyenne du signal provenant du détecteur de phase. Un simple filtre passe-bas d'ordre 1 suffit en principe. Cependant, l'expérience montre que le remplacement de ce filtre passe-bas par un atténuateur HF (aussi appelé filtre à retard de phase) facilite l'accrochage au signal d'entrée. On l'utilise donc de préférence au filtre passe-bas (figure 3.14), même si la restitution de la composante moyenne contient des discontinuités. On montre aisément que sa fonction de transfert est

$$G_2(s) = \frac{1 + sC_2R_4}{1 + sC_2(R_3 + R_4)} = \frac{1 + s/\omega_4}{1 + s/\omega_3} \quad (3.18)$$

3.6.3. Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert du circuit PLL en boucle ouverte vaut

$$G_o(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Delta\Omega(s)} = G_1(s) \cdot K_\varphi \cdot K_{vco} \cdot G_2(s) \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{rad/sec}} \right] \quad (3.19)$$

Afin d'alléger l'écriture, on définit le gain statique en boucle ouverte K_{bo}

$$K_{bo} \equiv K_\varphi \cdot K_{vco} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \quad (3.20)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit alors :

$$G_o(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Delta\Omega(s)} = K_{bo} \frac{1}{s} \frac{1 + s/\omega_4}{1 + s/\omega_3} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{rad/sec}} \right] \quad (3.21)$$

3.6.4. Fonction de transfert en boucle fermée

La fonction de transfert en boucle fermée est décrite par :

$$G_f(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{rad/sec}} \right] \quad (3.22)$$

Cette fonction de transfert $G_f(s)$ traduit, dans le domaine complexe, la relation existant entre la pulsation $\omega_1(t)$ de la tension d'entrée $u_1(t)$ et la pulsation $\omega_2(t)$ de la tension de sortie $u_2(t)$. Tenant compte de $G_o(s)$, il vient :

$$G_f(s) = \frac{\frac{K_{bo}}{s} \cdot \frac{1+s/\omega_4}{1+s/\omega_3}}{1 + \frac{K_{bo}}{s} \cdot \frac{1+s/\omega_4}{1+s/\omega_3}}$$

Multipliant numérateur et dénominateur par $s(1 + s/\omega_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} G_f(s) &= \frac{K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)}{s \cdot (1 + s/\omega_3) + K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)} \\ &= \frac{K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)}{K_{bo} + s \cdot \left(1 + \frac{K_{bo}}{\omega_4}\right) + \frac{s^2}{\omega_3}} \end{aligned}$$

Puis, divisant numérateur et dénominateur par K_{bo} , on obtient la forme canonique de la fonction de transfert décrivant le fonctionnement du circuit PLL :

$$G_f(s) = \frac{(1 + s/\omega_4)}{1 + s \cdot \left(\frac{1}{K_{bo}} + \frac{1}{\omega_4}\right) + \frac{s^2}{K_{bo}\omega_3}} \quad (3.23)$$

On voit donc que la fonction de transfert $G_f(s)$ est de la forme :

$$G_f(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_4}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.24)$$

3.6. Analyse du PLL en mode synchronisé

On y trouve un numérateur d'ordre 1 avec sa pulsation caractéristique ω_4 , un dénominateur d'ordre 2 caractérisé par sa pulsation naturelle ω_n et son coefficient d'amortissement ζ :

$$\omega_n = \sqrt{K_{bo} \cdot \omega_3} \quad (3.25)$$

$$2\zeta = \frac{1}{Q_0} = \omega_n \cdot \left(\frac{1}{K_{bo}} + \frac{1}{\omega_4} \right) \quad (3.26)$$

La réponse indicielle d'un système décrit par cette fonction de transfert dépend fortement du coefficient d'amortissement ζ ; elle est représentée dans la figure 3.18 pour différentes valeurs de ζ .

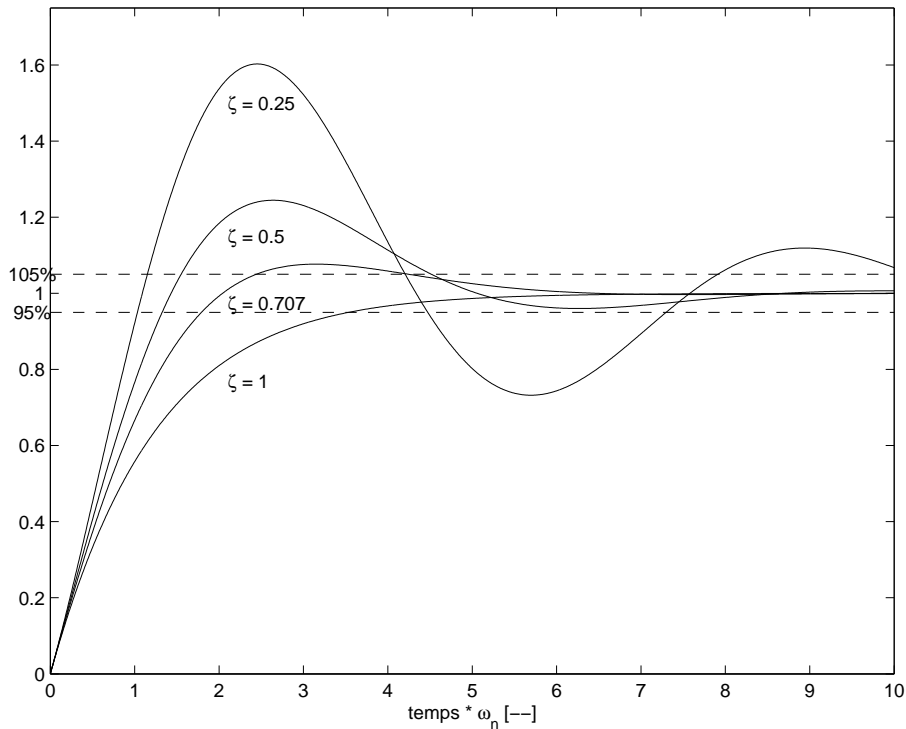


FIGURE 3.18.: Réponses indicielles d'un circuit PLL en boucle fermée

3.6.5. Calcul de ω_3 et ω_4

Dans l'étude générale des régimes transitoires, on a vu que l'on choisit généralement ζ compris entre 0.5 et 1 pour avoir un bon compromis entre un temps de montée rapide et un temps d'établissement court (figure 3.18). Le temps de réponse ou d'établissement du régime permanent à 5% près vaut alors

$$t_{5\%} \simeq 3\tau_{bf} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3.27)$$

Se souvenant que le gain en boucle ouverte K_{bo} dépend uniquement du comparateur et du VCO,

$$K_{bo} \equiv K_{\varphi} \cdot K_{vco} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \quad (3.28)$$

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

les équations (3.25) et (3.26) montrent que le temps d'établissement $t_{5\%}$ dépend essentiellement de la synthèse du filtre passe-bas au travers de ses deux pulsations caractéristiques ω_3 et ω_4 . Il faut donc trouver ces deux pulsations à partir de $t_{5\%}$ et ζ . De l'équation (3.27), on tire

$$\omega_n \simeq \frac{3}{\zeta t_{5\%}} \quad (3.29)$$

Portant ω_n dans les équations (3.25) et (3.26), on obtient alors les deux pulsations recherchées

$$\omega_3 = \frac{\omega_n^2}{K_{bo}} \quad (3.30)$$

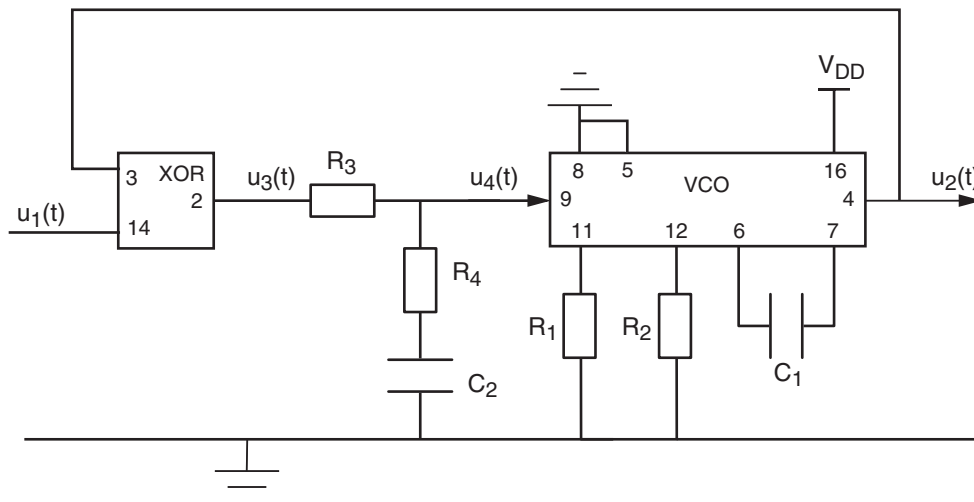
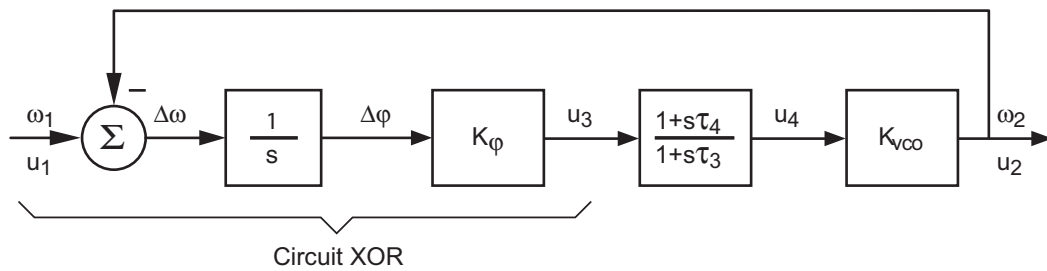
$$\omega_4 = \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{1}{K_{bo}} \right)^{-1} = \frac{\omega_n \cdot K_{bo}}{2\zeta \cdot K_{bo} - \omega_n} \quad (3.31)$$

3.7. Calcul d'un circuit PLL

Dans ce qui suit, on souhaite réaliser un circuit PLL caractérisé par :

- sa tension d'alimentation : $V_{DD} = 5 [V]$
- son domaine de fréquences : $0 < f < 25 [kHz]$
- un temps de réponse de $t_{5\%} \simeq 1 [msec]$
- un coefficient d'amortissement $\zeta \simeq 0.25$ ou $Q_0 = 1/(2\zeta) \simeq 2$.

3.7.1. Schémas fonctionnel et de réalisation



3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3.7.2. Détecteur de phase (XOR)

3.7.3. Filtre à retard de phase

3.7.4. Oscillateur

3.7.5. PLL en boucle ouverte

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3.7.6. PLL en boucle fermée

3.7.7. Calcul du filtre

Les résultats de la simulation de ce circuit sont présentés dans la figure 3.19. On peut constater que le temps d'établissement souhaité $t_{5\%} \simeq 1$ ms est bien respecté.

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

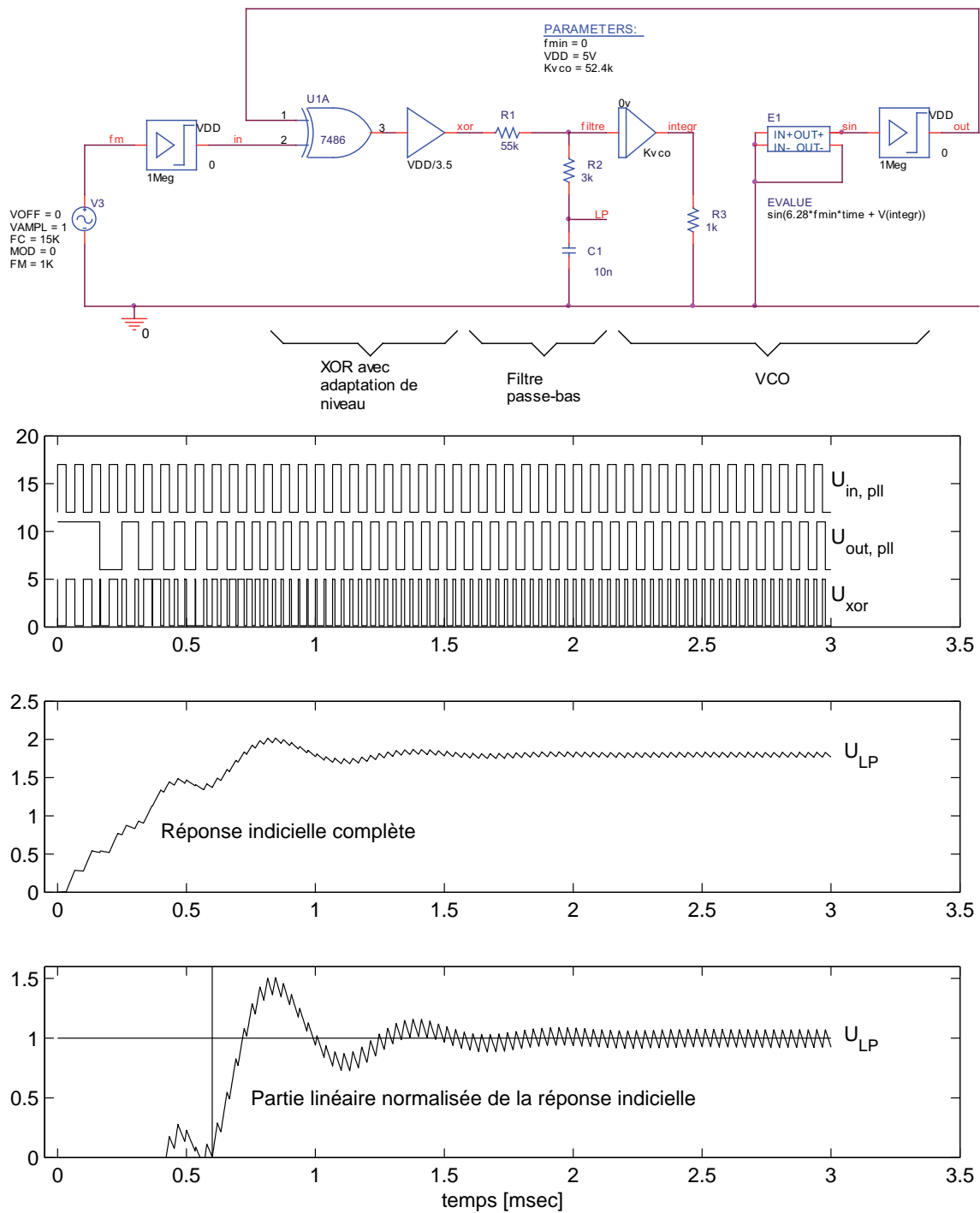


FIGURE 3.19.: Schéma de simulation et résultats avec $f_1 = 0.6 f_{max} = 15$ [kHz]

3.8. Simulation d'un circuit PLL

Le schéma de simulation proposé dans la figure 3.19 est tiré d'une note d'application de MicroSim [3]. C'est une très jolie illustration de la manière dont on peut résoudre avec Spice un problème décrit mathématiquement : ici, le fonctionnement du VCO. La description mathématique de celui-ci doit traduire le fait que la pulsation $\omega(t)$ du signal de sortie est commandée par la tension d'entrée $u_{in}(t)$.

Partant de la description fondamentale d'un signal sinusoïdal (avec l'argument $\theta(t)$ et non la pulsation $\omega(t)$), on a

$$u_{vco}(t) = A \sin(\theta(t)) \quad \text{avec} \quad \theta(t) \equiv \int_0^t \omega(t) dt$$

Comme la pulsation générée par le VCO vaut

$$\omega(t) = 2\pi f(t) = 2\pi (f_{min} + K'_{vco} u_{in}(t))$$

il vient

$$\begin{aligned} \theta(t) &\equiv \int_0^t \omega(t) dt = 2\pi \int_0^t (f_{min} + K'_{vco} u_{in}(t)) dt \\ \theta(t) &= 2\pi f_{min} t + K_{vco} \int_0^t u_{in}(t) dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

C'est cette dernière équation qui est introduite dans la partie VCO de la simulation du PLL où l'on a

```
V(integr)= Kvco * int(V(filtre))
Evaluate = sin(6.28*fmin*time + V(integr))
```

Le circuit E1 est une source de tension commandée par l'expression `Evalue` dont l'amplitude est ensuite transformée en un signal carré compris entre 0 et V_{DD} .

La réponse indicelle illustrée par la figure 3.19 montre très bien les tentatives d'accrochage successives jusqu'en $t \simeq 0.6$ [ms]. À partir de là, l'accrochage étant établi, la synchronisation se fait avec un comportement linéaire comme le prévoit la théorie.

3.9. Circuit PLL en mode non - synchronisé

Lorsque la fréquence du signal d'entrée est trop différente du domaine de fonctionnement du PLL, celui-ci ne parvient plus à suivre la fréquence d'entrée f_1 . Pour que le PLL puisse se synchroniser, il faut que f_1 entre dans le domaine d'accrochage soit depuis le bas en f_{a1} , soit depuis le haut en f_{a2} (figure 3.20). Le domaine d'accrochage est alors défini par la relation suivante :

$$\Delta f_a = f_{a2} - f_{a1}$$

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Une fois le PLL synchronisé sur le signal d'entrée, la fréquence du signal de sortie f_2 pourra varier dans un domaine plus large tout en restant synchronisée avec f_1 . On se trouve alors dans le domaine de synchronisation défini par

$$\Delta f_s = f_{s1} - f_{s2}$$

où f_{s1} est la fréquence de sortie du domaine de synchronisation par le haut, alors que f_{s2} est celle de sortie par le bas.

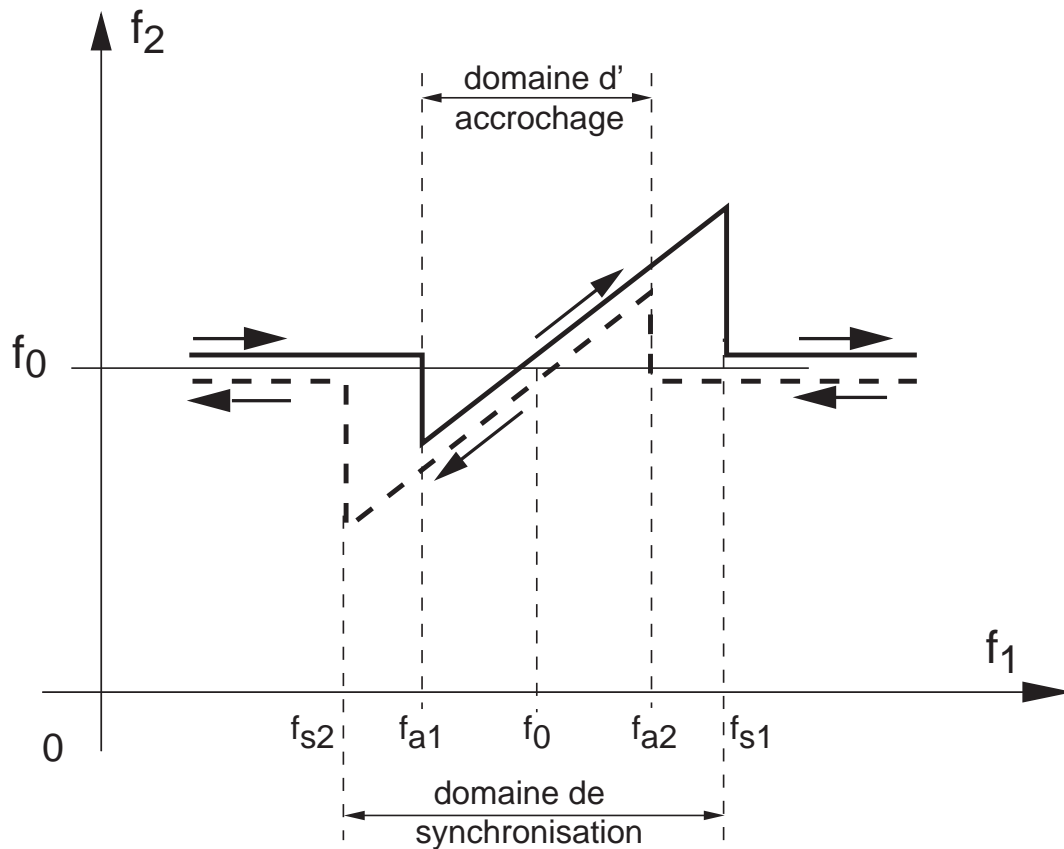


FIGURE 3.20.: Fonctionnement d'un PLL en mode non-synchronisé

3.10. Exercices

Reg 1 Considérant un système constitué d'un gain K_a et de deux constantes de temps τ_1 et τ_2 décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{(1 + s \tau_1)} \frac{1}{(1 + s \tau_2)}$$

1. Que valent ω_n , ζ et le gain K_{bo} du système en boucle ouverte ?
2. On boucle le système sur lui-même avec une réaction négative,
 - a) calculez la fonction de transfert en boucle fermée $G_w(s)$;
 - b) que valent ω_n , ζ et le gain K_{bf} du système bouclé ?
 - c) admettant $\tau_1 = \tau_2$, que doit valoir le gain K_a pour que $\zeta = 0.5$?
 - d) admettant $\tau_1 \gg \tau_2$, que doit valoir le gain K_a pour que $\zeta = 0.5$?

Rép. : $K_a = 3$; $K_a \simeq \tau_1/\tau_2$

Reg 2 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{s(s + 10)}$$

bouclé sur lui-même avec une réaction négative,

1. Quelle valeur faut-il donner au gain K_a pour que le dépassement de la réponse indicielle soit de 10% ?
2. Que valent alors le temps de montée t_r , le temps d'établissement $t_{5\%}$ et le gain K_{bf} ?

Rép. : $\zeta = 0.59$; $K_a = 71.5$; $K_{bf} = 1$; $t_r \simeq 0.2 [sec]$; $t_{5\%} \simeq 0.6 [sec]$

Reg 3 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{(s + a)} \frac{1}{(s + 25)}$$

que l'on boucle sur lui-même avec une réaction négative, trouvez la valeur du gain K_a et la position du pôle $-a$ qui permettront d'avoir un dépassement inférieur à 10% et un temps d'établissement $t_{5\%}$ inférieur à 0.1 seconde.

Rép. : $\zeta > 0.59$; $\omega_n > 50.7 [rad/sec]$; $a \Rightarrow 35 [1/sec]$; $K_a > 1.7 \cdot 10^3$

Reg 4 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a G_{a1}(s) G_{a2}(s) = K_a \frac{(s + z)}{(s + a)} \frac{1}{s(s + 3)}$$

que l'on boucle sur lui-même avec une réaction négative, trouvez les valeurs de K_a , z et a pour que la réponse indicielle ait un dépassement de 10% et un temps d'établissement $t_{5\%}$ d'une seconde.

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Reg 5 Considérant le schéma fonctionnel d'un asservissement de vitesse (figure 3.21) constitué d'un amplificateur de gain $K_a = 5$ [V/V], d'une génératrice tachymétrique de gain $K_g = 2$ V/1000 rpm et d'un moteur représenté par

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}} \text{ avec } \begin{cases} K_{mot} = 5 \text{ [(rad/sec)/V]} \\ \tau_{mot} = 10 \text{ [msec]} \end{cases}$$

1. Exprimez en unité SI la valeur du gain DC en boucle ouverte K_{bo} .
2. Recherchez ce que valent, **en boucle fermée**, la durée du régime transitoire et la vitesse permanente du moteur (en rpm) lorsque la consigne $w(t)$ vaut 10 [V].

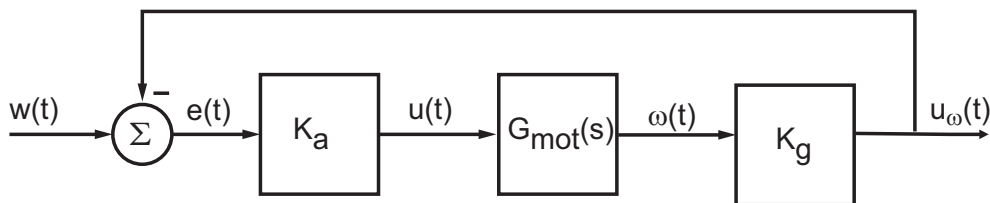


FIGURE 3.21.: Schéma fonctionnel d'un asservissement de vitesse

Reg 6 Considérant le schéma fonctionnel d'une régulation de position réalisée avec un moteur préalablement asservi en vitesse (figure 3.22) :

1. Calculez sa fonction de transfert en boucle fermée.
2. Recherchez la valeur du gain K_a pour que la réponse indicielle soit optimum lorsque

$$K_1 = 3 \frac{\text{rad/sec}}{\text{V}}, \quad K_g = 2 \frac{\text{mV}}{\text{rad/sec}}, \quad \tau_1 = 10 \text{ msec}$$

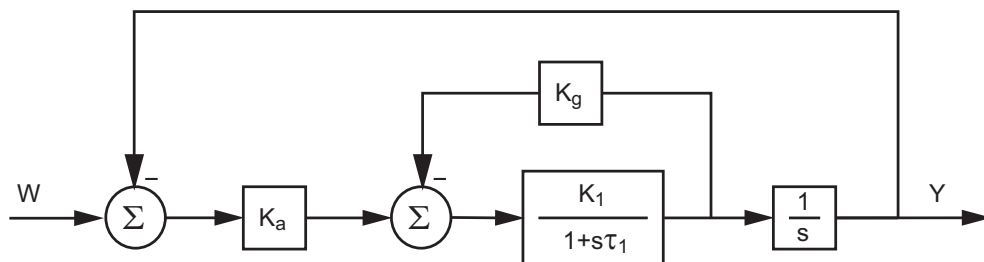


FIGURE 3.22.: Schéma fonctionnel d'un asservissement de position

Reg 7 On s'intéresse ici à un problème classique de la régulation automatique : la sustentation magnétique d'une sphère. La figure 3.23 en présente une photographie avec son schéma technologique. L'équation décrivant le mouvement de la sphère est très simple :

$$m\ddot{Y}(t) = -mg + F(Y(t), I(t))$$

La difficulté du problème réside dans le fait que la force $F(Y, I)$ dépend non linéairement de la position de la sphère et du courant circulant dans la bobine. On doit donc linéariser cette fonction autour d'un point de fonctionnement $\{Y_0, I_0\}$. En décrivant les variations de la position et du courant autour de ces valeurs, il vient

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + y(t) & I(t) &= I_0 + i(t) \\ F(Y(t), I(t)) &= F(Y_0, I_0) + F(y(t), i(t)) \\ &\simeq F_0 + k_1 y(t) + k_2 i(t) \end{aligned}$$

En portant ce résultat dans l'équation de Newton, on obtient

$$m\ddot{Y}(t) = m\ddot{y}(t) = -mg + F_0 + k_1 y(t) + k_2 i(t)$$

Comme autour du point de fonctionnement la force F_0 équilibre le poids mg , on trouve que le mouvement de la sphère est décrit par

$$m\ddot{y}(t) = +k_1 y(t) + k_2 i(t)$$

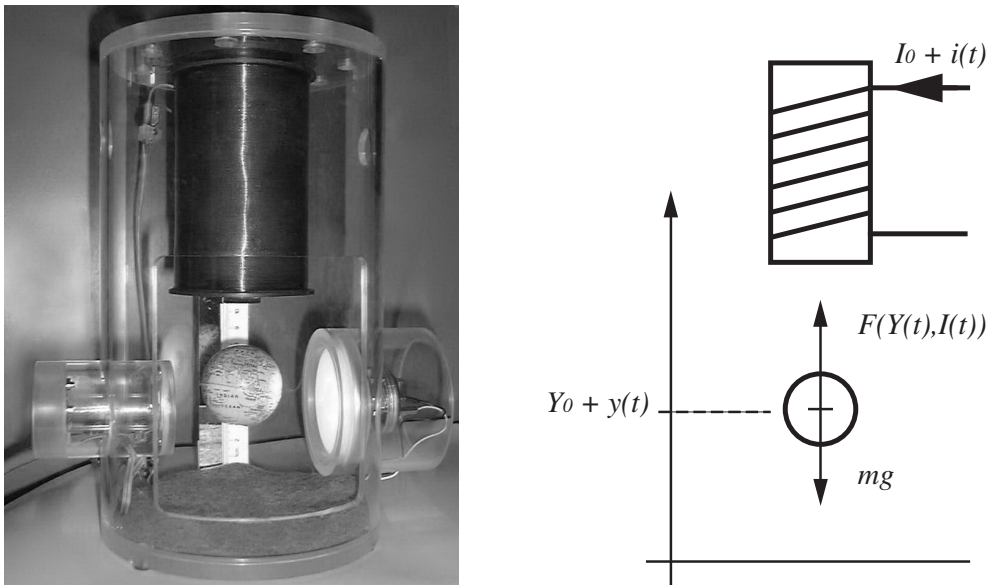


FIGURE 3.23.: Sustentation magnétique (réalisation heig-vd)

Pour maintenir la sphère à une hauteur donnée, il faut la placer dans une boucle de régulation contenant un correcteur qui génère le courant circulant dans la bobine. Ce correcteur, de type proportionnel-dérivé, est décrit par l'équation

$$i(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Étant donné ces préalables, on demande :

1. Calculez la fonction de transfert du système $G_a(s) = Y(s)/I(s)$ et montrez que le système seul est instable.

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

2. Calculez la fonction de transfert du correcteur $G_c(s) = I(s)/E(s)$.
3. Dessinez le schéma fonctionnel du système asservi; indiquez la position des variables $w(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $y(t)$ et calculez sa fonction de transfert $G_f(s) = Y(s)/W(s)$.
4. Montrez que le système bouclé est stable si K_p est suffisamment grand. *Remarque* : un système d'ordre 2 est stable si tous les coefficients du dénominateur de $G(s)$ sont du même signe.
5. Le but de la régulation est de trouver les paramètres du correcteur de manière à satisfaire un cahier des charges. Dans notre cas, on peut trouver K_p et T_d de manière à ce que le système soit suffisamment rapide (ω_n) avec un amortissement satisfaisant (ζ). Pour le voir, écrivez $G_f(s)$ sous forme canonique et montrez que K_p et T_d dépendent des valeurs choisies pour ω_n et ζ de la manière suivante

$$K_p = \frac{m\omega_n^2 + k_1}{k_2}, \quad T_d = \frac{2\zeta\omega_n m}{K_p k_2}$$

6. Admettant que les paramètres de la sustentation magnétique valent

$$m = 0.012 \text{ kg}, \quad k_1 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad k_2 = 0.66 \frac{\text{N}}{\text{A}}$$

et que l'on souhaite avoir $\omega_n = 20 \text{ rad/sec}$ et $\zeta = 0.5$, calculez les valeurs de K_p et T_d ainsi que leurs unités. Que vaudra le temps d'établissement $t_{5\%}$?

7. Montrez que le correcteur peut être réalisé avec un amplificateur inverseur de gain $-Z_2/Z_1$ où $Z_2 = R_2$ et $Z_1 = R_1//C$. Dessinez son schéma.

PLL 0 Pour les exercices qui suivent, on considère un circuit PLL de type 4046B avec $V_{DD} = 5 \text{ [V]}$ et $V_{vco,min} = 2 \text{ [V]}$. De plus, on admettra que la capacité C_1 prend en compte la capacité interne du VCO.

PLL 1 On applique à un circuit XOR deux signaux carrés de même période 200 [\mu s] décalés de 20 [\mu s] .

1. Dessinez le signal de sortie du XOR; que valent le rapport cyclique et la période de ce signal? Que vaut le gain du comparateur XOR?
2. Le circuit XOR est relié à un filtre à retard de phase réalisé avec $R_3 = 45 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $R_4 = 5 \text{ [k}\Omega\text{]}$ et $C_2 = 5 \text{ [nF]}$. Que vaut la tension moyenne que l'on peut mesurer à la sortie du XOR, à la sortie du filtre et aux bornes de C_2 ? Que vaut la constante de temps du filtre?
3. Dessinez le signal de sortie du filtre et la tension aux bornes de C_2 .

PLL 2 Un VCO est réalisé avec $R_1 = R_2 = 33 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $C_1 = 2.2 \text{ [nF]}$; calculez son domaine de fonctionnement. Dessinez sa caractéristique et calculez son gain.

PLL 3 On considère un PLL dont le gain en boucle ouverte K_{bo} vaut 10^5 [1/sec]. Dessinez son schéma fonctionnel puis calculez les trois composants pour que ce circuit ait un temps de réponse de 100 [μ sec] et un coefficient d'amortissement égal à 0.5.

PLL 4 Un PLL est réalisé avec $R_1 = 100$ [k Ω], $R_2 = 25$ [k Ω], $R_3 = 10$ [k Ω], $R_4 = 3.3$ [k Ω] et $C_1 = 1$ [nF], $C_2 = 10$ [nF].

1. Dessinez son schéma électronique et son schéma fonctionnel.
2. Calculez son domaine de fonctionnement.
3. Calculez le coefficient d'amortissement et le temps de réponse du PLL.
4. Considérant sa réponse $f_2(t)$ à un saut de fréquence $f_1(t)$, que valent t_{trans} et N_{osc} ? Esquissez l'évolution de la fréquence $f_2(t)$.

PLL 5 On veut réaliser un PLL dont le domaine de travail se situe entre 50 kHz et 150 kHz.

1. Dessinez la caractéristique du VCO puis calculez les trois composants nécessaires à son fonctionnement.
2. Le PLL reçoit en entrée un signal carré dont la fréquence varie entre 80 et 120 kHz; que vaut la tension d'entrée du VCO?

PLL 6 Calculez les composants d'un PLL fonctionnant entre 10 kHz et 50 kHz pour qu'il puisse suivre l'entrée avec un temps d'établissement $t_s \simeq 0.5$ [msec] et un coefficient d'amortissement $\zeta \simeq 0.5$.

Simulez votre circuit avec une fréquence d'entrée de 30 kHz. Combien de temps faut-il au PLL pour qu'il entre dans sa zone de fonctionnement linéaire? Son temps de réponse correspond-il à celui souhaité?

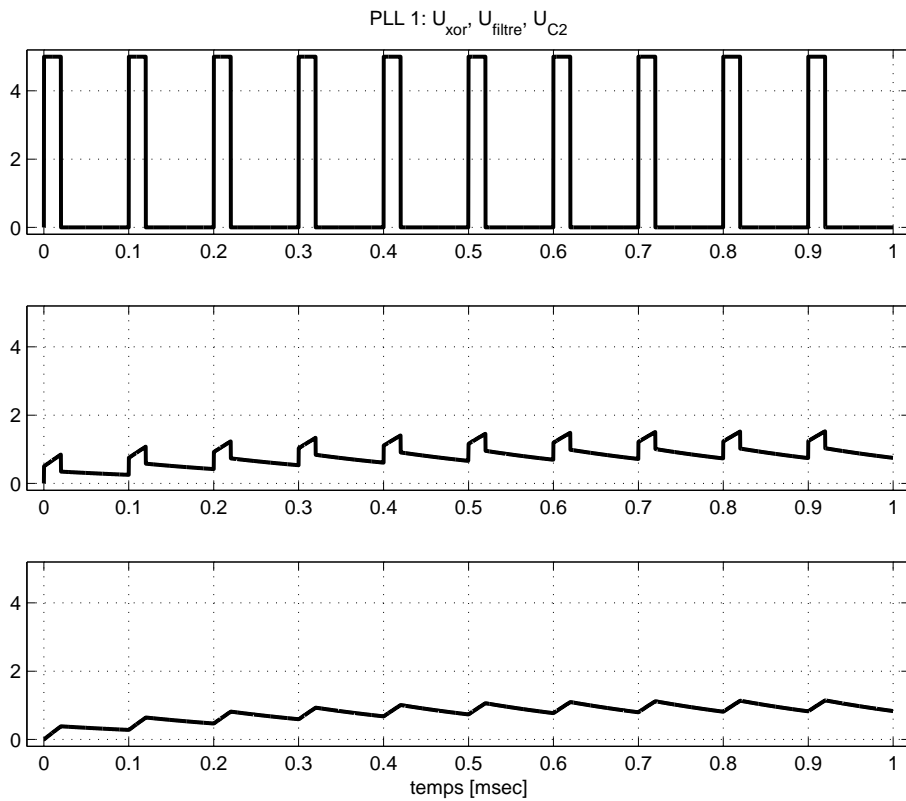
PLL 7 On veut réaliser un circuit PLL dont la fréquence de sortie est deux fois supérieure à la fréquence d'entrée alors que celle-ci varie entre 20 et 30 [kHz].

1. Dessinez le schéma de réalisation.
2. Calculez les composants du filtre à retard de phase permettant d'avoir un temps de réponse de 1 msec environ avec un coefficient d'amortissement $\zeta = 0.5$.

3. ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Quelques réponses :

PLL 1	1	$\eta = 0.2, T_{xor} = 0.1$ [msec]	$K_{\varphi} = V_{DD}/\pi$
	2	$U_{dc} = 1.0$ [V]	$\tau = 0.25$ msec
PLL 2		13.8 [kHz] $\leq f \leq 27.5$ [kHz]	$K'_{vco} = 4.59$ [kHz/V]
PLL 3		$C_2 = 1$ [nF]	$R_3 = 21$ [k Ω], $R_4 = 6.7$ [k Ω]
PLL 4	2	40 [kHz] $\leq f \leq 50$ [kHz]	$K_{vco} = 20.9 \cdot 10^3$ [(rad/sec)/V]
	3	$\omega_n = 15'830, \zeta = 0.5$	$t_{5\%} = 0.18$ [msec]
	4	$t_{trans} = 0.3$ [msec]	$N_{osc} \simeq 1.4$
PLL 5	1	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 10$ [k Ω], $R_2 = 20$ [k Ω]
	2	$K'_{vco} = 33.3 \cdot 10^3$ [(rad/sec)/V]	2.9 [V] $\leq U_{vco} \leq 4.1$ [V]
PLL 6	VCO	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 25$ [k Ω], $R_2 = 100$ [k Ω]
	filtre	$C_2 = 10$ [nF]	$R_3 = 85$ [k Ω], $R_4 = 7.6$ [k Ω]
	Spice	$t_{lin} \simeq 0.58$ [ms]	$t_s \simeq 0.46$ [ms]
PLL 7	VCO	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 50$ [k Ω], $R_2 = 25$ [k Ω]
	filtre	$C_2 = 10$ [nF]	$R_3 = 170$ [k Ω], $R_4 = 15$ [k Ω]



Bibliographie

- [1] M. Etique : *Cours de régulation automatique*, eivd-iAi, 2004
- [2] Michel Girard, *Boucles à verrouillage de phase*, McGraw-Hill, 1988
- [3] MicroSim Application Notes, version 8.0, june 1997, pp. 303-305

Deuxième partie .

Étude des signaux analogiques

4. Analyse des signaux périodiques

4.1. Introduction

L'analyse harmonique ou fréquentielle est l'instrument majeur de la théorie des signaux. Le développement en séries de Fourier et, plus généralement, la transformation de Fourier permettent d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

Les calculs et mises en forme des résultats à venir sont grandement facilités si l'on maîtrise et sait utiliser les relations suivantes :

$$A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\varphi + \operatorname{atg}\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\sin(2\pi f t + \alpha))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\varphi) & = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \\ 2j \sin(\varphi) & = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2. Deux représentations pour un seul signal

Le temps et la fréquence sont deux bases servant à la description des signaux. Ce sont deux points de vue différents d'une même réalité ; ils sont complémentaires. Il est important de bien comprendre les relations qui existent entre ces deux bases ; c'est le but de ce chapitre.

Une grandeur sinusoïdale est décrite par l'équation

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \quad (4.4)$$

Son évolution temporelle est contenue dans le mot *cos* ; dès lors, on sait que le signal $x(t)$ ondule avec une forme précise fixée par la fonction cosinus. Cependant, des informations supplémentaires sont données : l'amplitude A , la phase α et la fréquence f_0 . Ce sont ces informations qui sont fournies par la représentation fréquentielle ou spectrale.

Comme le temps et la fréquence sont les deux composantes de la description d'un même signal, une sinusoïde devrait être représentée dans un espace à trois dimensions (fig. 4.1). Une telle représentation étant mal pratique, on la remplace par ses projections sur les plans temporel et fréquentiel.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Dans la projection sur l'axe du temps, on retrouve le dessin bien connu d'une sinusoïde, alors que la projection sur l'axe des fréquences conduit à une raie située en $f = f_0$ et de hauteur A . Comme cette projection ne fournit que l'amplitude A , il est nécessaire, pour la fréquence considérée, de donner également la phase α . Ces deux diagrammes portent le nom de *spectres d'amplitudes et de phases*.

Considérons un signal composé de deux sinusoïdes

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}A \cos(4\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}) \quad (4.5)$$

La figure 4.2a illustre le comportement temporel de ce signal et de ses deux composantes. La figure 4.2b montre ce qui se passe alors dans l'espace des fréquences. On notera que la somme des deux sinusoïdes dans l'espace temps conduit également à la somme des spectres d'amplitudes et de phases.

4.3. Séries de Fourier

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales. Une illustration de la construction d'un signal périodique non-sinusoïdal est donnée à la figure 4.3 : le signal résultant est la somme de trois sinusoïdes dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0 .

4.3.1. Définition de la série de Fourier

Considérons un signal périodique $x(t)$ de période $T = 1/f_0$. Son développement en série de Fourier est alors le suivant

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (4.6)$$

où $f_0 = 1/T$ est la fréquence fondamentale du signal, $a_0/2$ est la valeur moyenne ou composante continue et a_k, b_k sont les coefficients de Fourier du développement en cosinus et sinus.

Les coefficients de Fourier a_k et b_k se calculent comme suit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 0 \quad (4.7)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 1 \quad (4.8)$$

N.B. : Cette représentation qui sert de point de départ au développement en séries de Fourier n'a aucun intérêt en traitement du signal ; elle est remplacée par la série en cosinus et la série complexe.

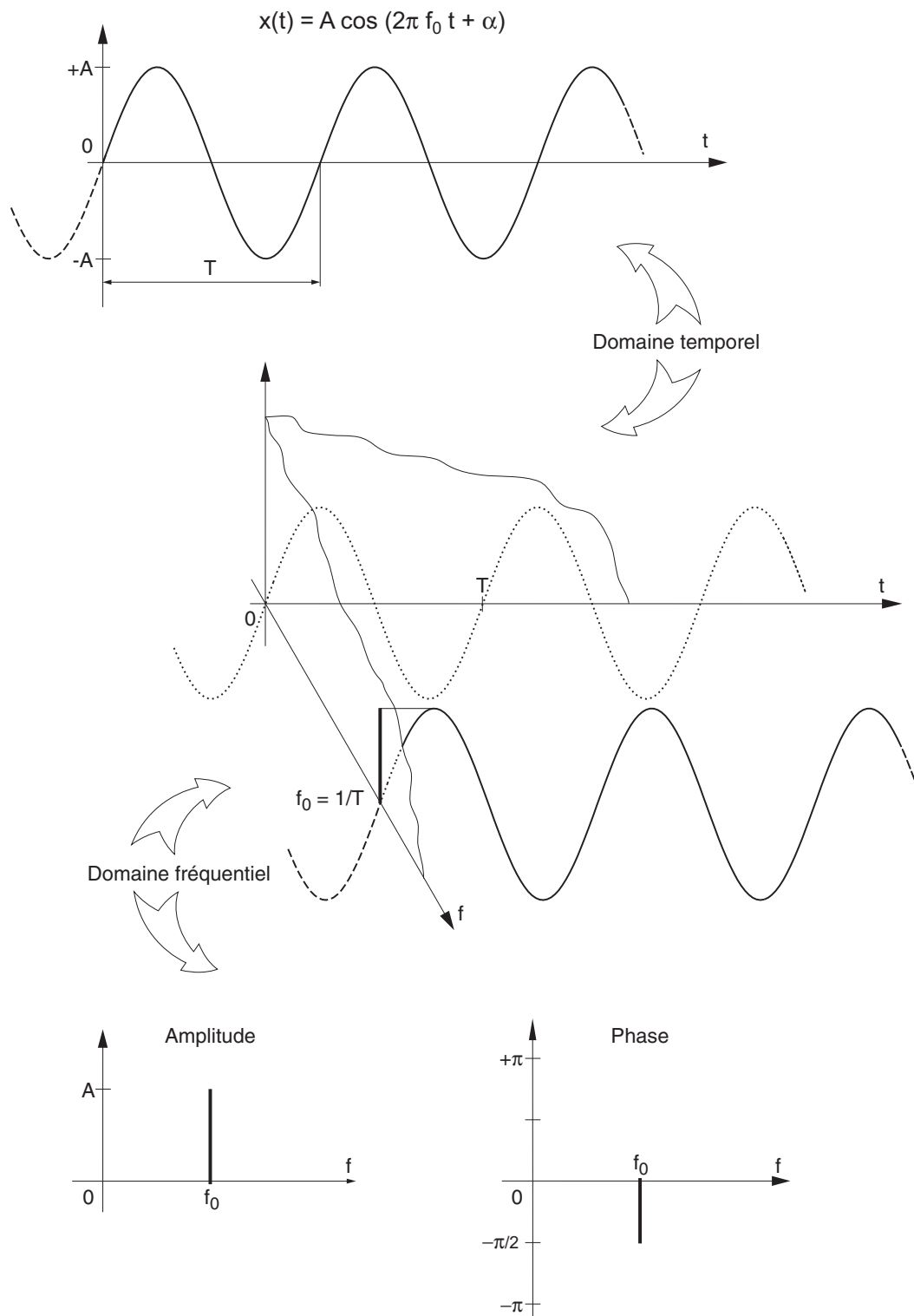


FIGURE 4.1.: Descriptions temporelle et fréquentielle d'une sinusoïde

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

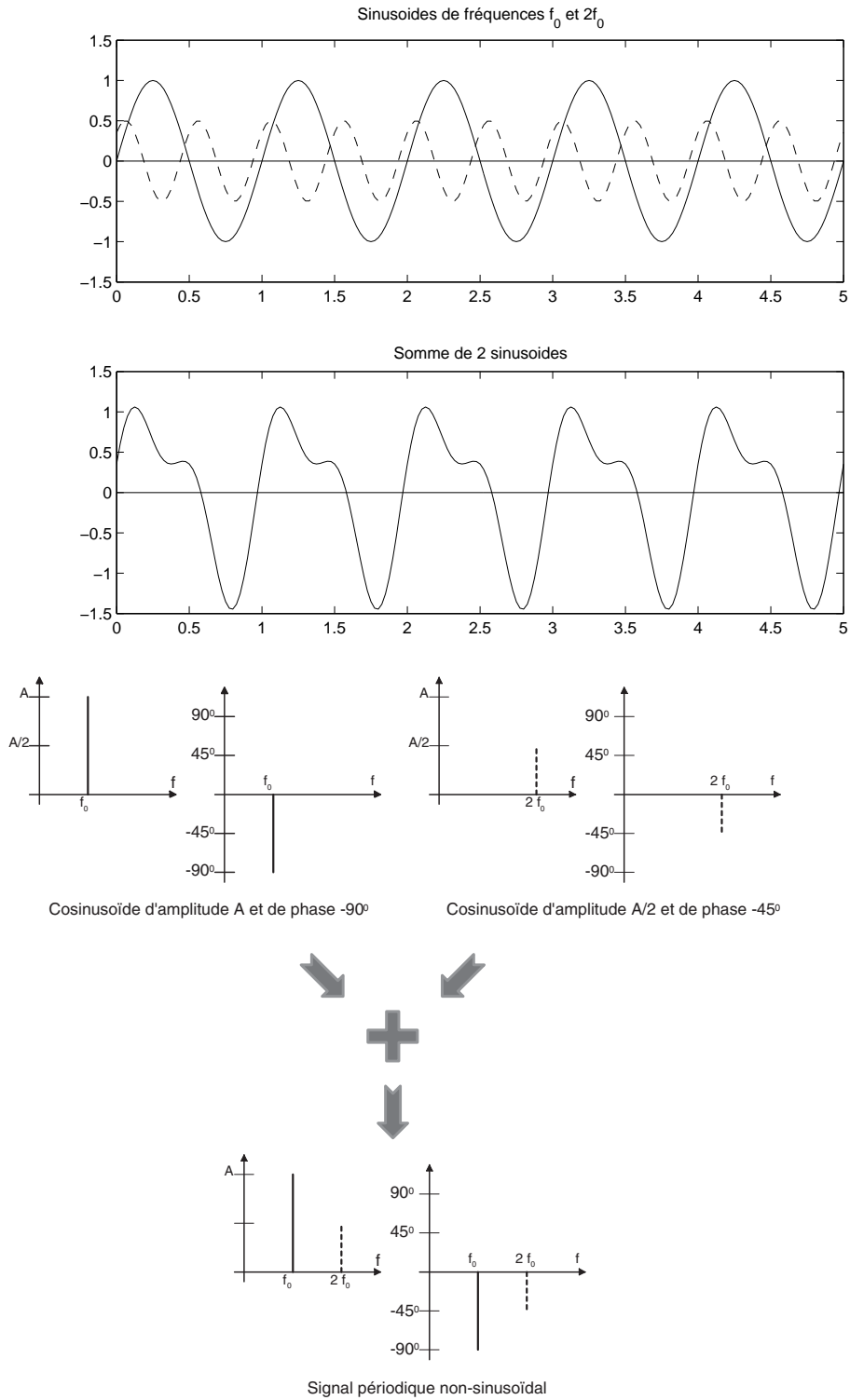


FIGURE 4.2.: Représentation de la somme de deux sinusoïdes de fréquences différentes dans les domaines temporel et fréquentiel

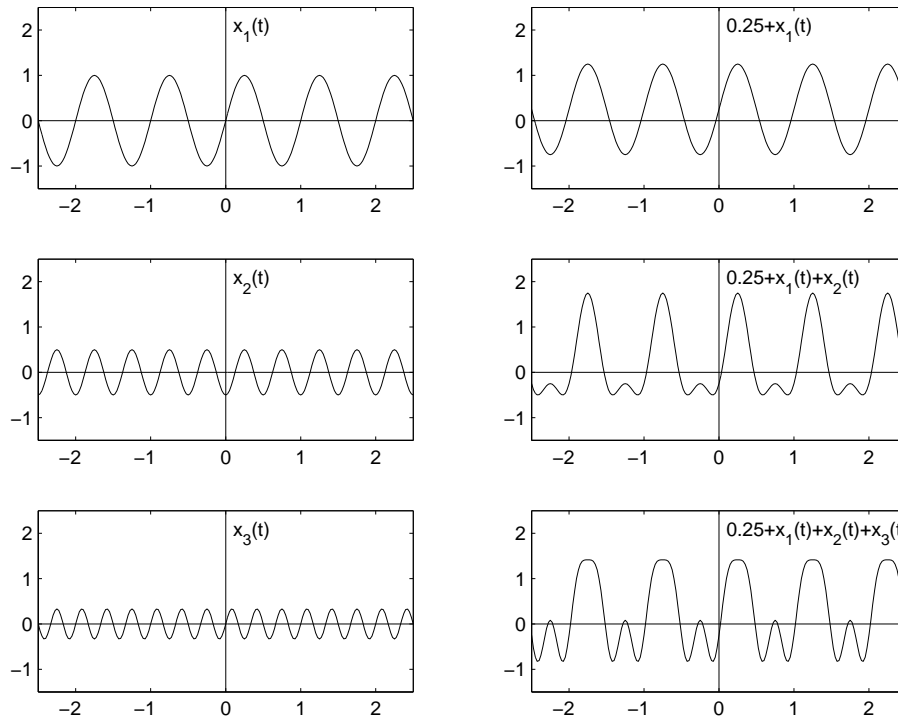


FIGURE 4.3.: Construction d'un signal périodique non-sinusoïdal

4.3.2. Série de Fourier en cosinus

Prenant en compte la relation trigonométrique suivante

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (4.9)$$

on voit que le développement en série de Fourier peut également s'écrire

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (4.10)$$

avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \quad (4.11)$$

Cette série en cosinus est extrêmement importante car elle correspond à la description bien connue des signaux en régime sinusoïdal permanent où l'on représente un courant ou une tension par leur amplitude et leur phase. D'un point de vue pratique, cela revient à considérer que le signal $x(t)$ est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux. La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de *spectre unilatéral*.

Une illustration en est donnée à la figure 4.4. On y voit une onde périodique en dents de scie qui peut être reconstruite par une superposition d'ondes sinusoïdales. Cette superposition peut être présentée dans l'espace temps ou, de manière équivalente et plus explicite, dans l'espace des fréquences.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

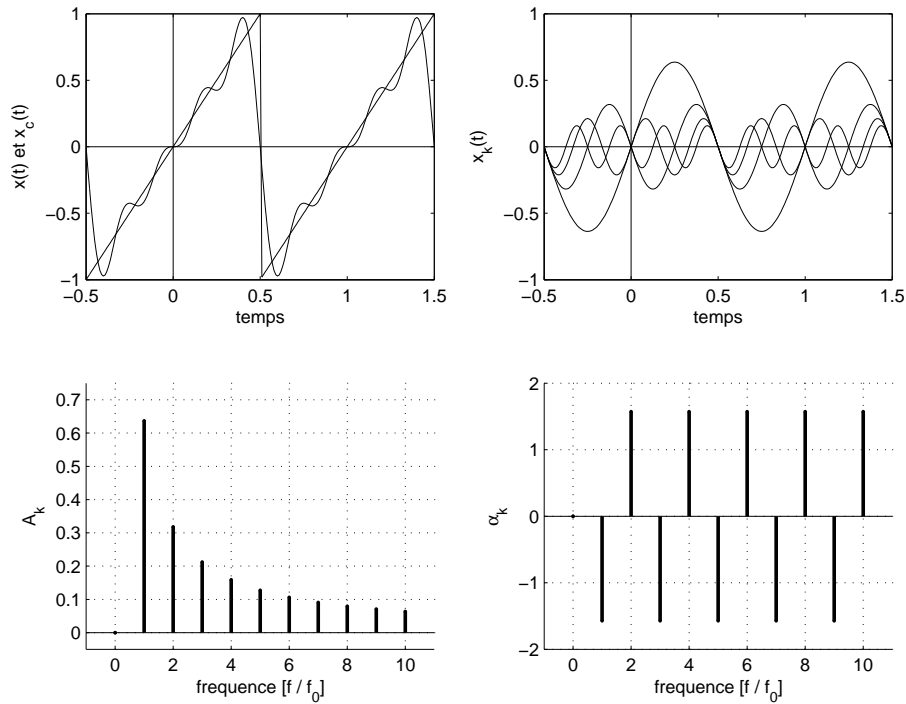


FIGURE 4.4.: Onde en dents de scie, composantes et spectres d'amplitudes et de phases

4.3.3. Série de Fourier complexe

Se souvenant des relations d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(+jx) + \exp(-jx)) \quad (4.12)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (\exp(+jx) - \exp(-jx)) \quad (4.13)$$

on montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad (4.14)$$

Les coefficients $X(jk)$ sont alors complexes et valent

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad -\infty < k < +\infty \quad (4.15)$$

La représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de *spectre bilatéral*. Pour la suite du cours, on retiendra essentiellement cette description car elle est analytiquement plus intéressante que la forme en cosinus.

On remarquera au passage que la formule d'Euler remplace les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles à exposant imaginaire appelées *phaseurs*. Ces phaseurs ne sont rien d'autres que des fonctions complexes oscillant cosinusoidalement sur l'axe réel et sinusoidalement sur l'axe imaginaire.

4.3.4. Relations entre les trois représentations de Fourier

Les relations existant entre les trois représentations de Fourier sont présentées et illustrées par le tableau et le graphe vectoriel de la figure 4.5. Ce graphe est important car il permet de voir en un coup d'oeil les relations simples liant les trois représentations spectrales. On retiendra également la relation existant entre les coefficients spectraux et la valeur efficace d'une composante spectrale

$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)| \quad (4.16)$$

Remarque À ce stade, il est important de souligner que, partant d'un signal connu $x_0(t)$, on commence par faire *l'analyse de ce signal en calculant ses coefficients de Fourier* $A(k)$, $\alpha(k)$ ou $X(\pm jk)$. Puis, une fois ceux-ci connus, *en calculant la somme de Fourier, on fait la synthèse du signal $x(t)$* . Et, comme le verra plus loin, dans certains cas (phénomène de Gibbs), le signal synthétique $x(t)$ ne sera pas exactement égal à $x_0(t)$.

4.4. Théorème de la puissance ou de Parseval

Dans l'espace temps, la définition de la puissance moyenne normalisée est la suivante

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = X_{eff}^2 \quad (4.17)$$

On notera que cette définition coïncide avec celle du carré de la valeur efficace du signal $x(t)$. La puissance normalisée ne s'exprime donc pas en [W], mais en [V²] ou [A²] selon que le signal est une tension ou un courant électrique.

Le théorème de Parseval montre que la puissance normalisée d'un signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. En effet, comme dans l'espace des fréquences, le signal $x(t)$ est représenté par des générateurs d'amplitude A_k , il s'ensuit que la puissance totale est égale à la somme des puissances fournies par chaque générateur. On en déduit alors :

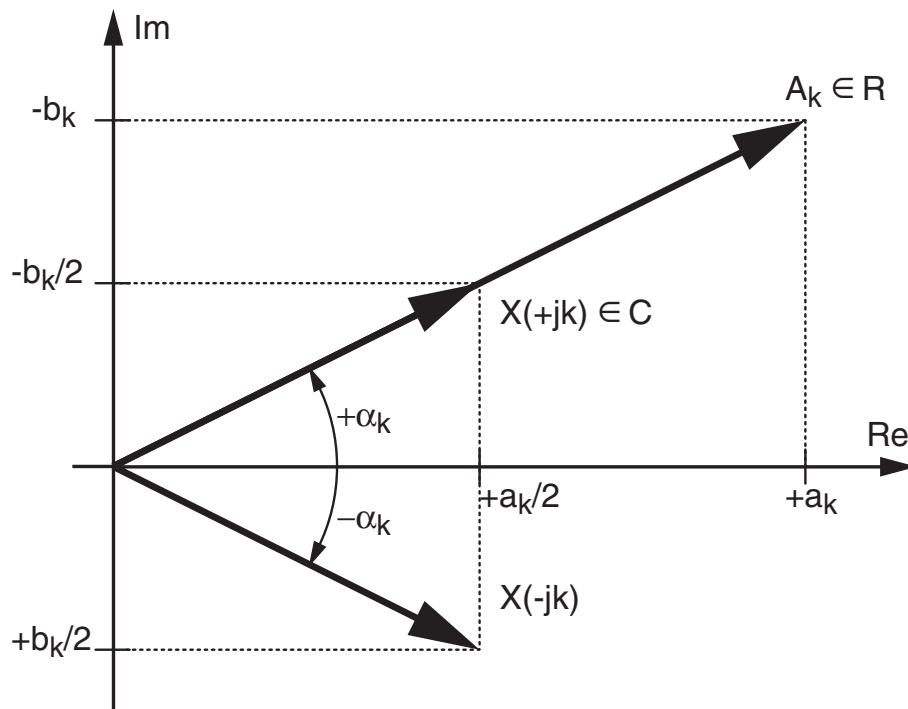
$$\begin{aligned} P = X_{eff}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k &= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = P_{dc} + P_{ac} \\ &= X(0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2 \cdot |X(jk)|)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \end{aligned}$$

De ces résultats, on conclut que la puissance peut se calculer avec l'une ou l'autre des équations (4.18) à (4.21) et que

le carré de la valeur efficace d'un signal est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune de ses composantes.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

$k = 0$	$a_0/2$	A_0	$X(0)$
$k > 0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm jk)$
a_k	a_k	$+A_k \cos(\alpha_k)$	$+2 \operatorname{Re}\{X(jk)\}$
b_k	b_k	$-A_k \sin(\alpha_k)$	$-2 \operatorname{Im}\{X(jk)\}$
A_k	$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	A_k	$2 X(jk) $
α_k	$\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	α_k	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{X(+jk)\}}{\operatorname{Re}\{X(+jk)\}}\right)$
$X(+jk)$	$\frac{1}{2}(a_k - jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(+j\alpha_k)$	$X(+jk)$
$X(-jk)$	$\frac{1}{2}(a_k + jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(-j\alpha_k)$	$X(-jk)$



$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)|$$

FIGURE 4.5.: Relations entre les trois représentations spectrales

4.5. Spectres d'amplitudes et de phases

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \equiv X_{eff}^2 \quad (4.18)$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = X(0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad (4.19)$$

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (4.20)$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2 \quad (4.21)$$

À ce stade, il est intéressant de rappeler ce que valent les puissances des trois signaux usuels que sont le carré, le sinus et le triangle à valeur moyenne nulle ($P_{dc} = 0$) et d'amplitude A :

$$x(t) = A \text{ sqr}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{1} \quad (4.22)$$

$$x(t) = A \sin(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{2} \quad (4.23)$$

$$x(t) = A \text{ tri}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{3} \quad (4.24)$$

4.5. Spectres d'amplitudes et de phases

4.5.1. Spectres unilatéraux et bilatéraux

La description de $x(t)$ avec les fonctions cosinusoidales conduit aux *spectres unilatéraux* d'amplitudes et de phases (A_k et α_k) du signal $x(t)$. Ici, les fréquences sont positives ou nulles car le compteur k des harmoniques varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.6). La description de $x(t)$ avec les fonctions complexes conduit aux *spectres bilatéraux* d'amplitudes et de phases ($|X(jk)|$ et $\angle X(jk)$). Ici, les fréquences sont négatives et positives car le compteur k varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours des *fonctions paires* car on a

$$|X(+jk)| = |X(-jk)| = \frac{A_k}{2}, \quad k \neq 0 \quad (4.25)$$

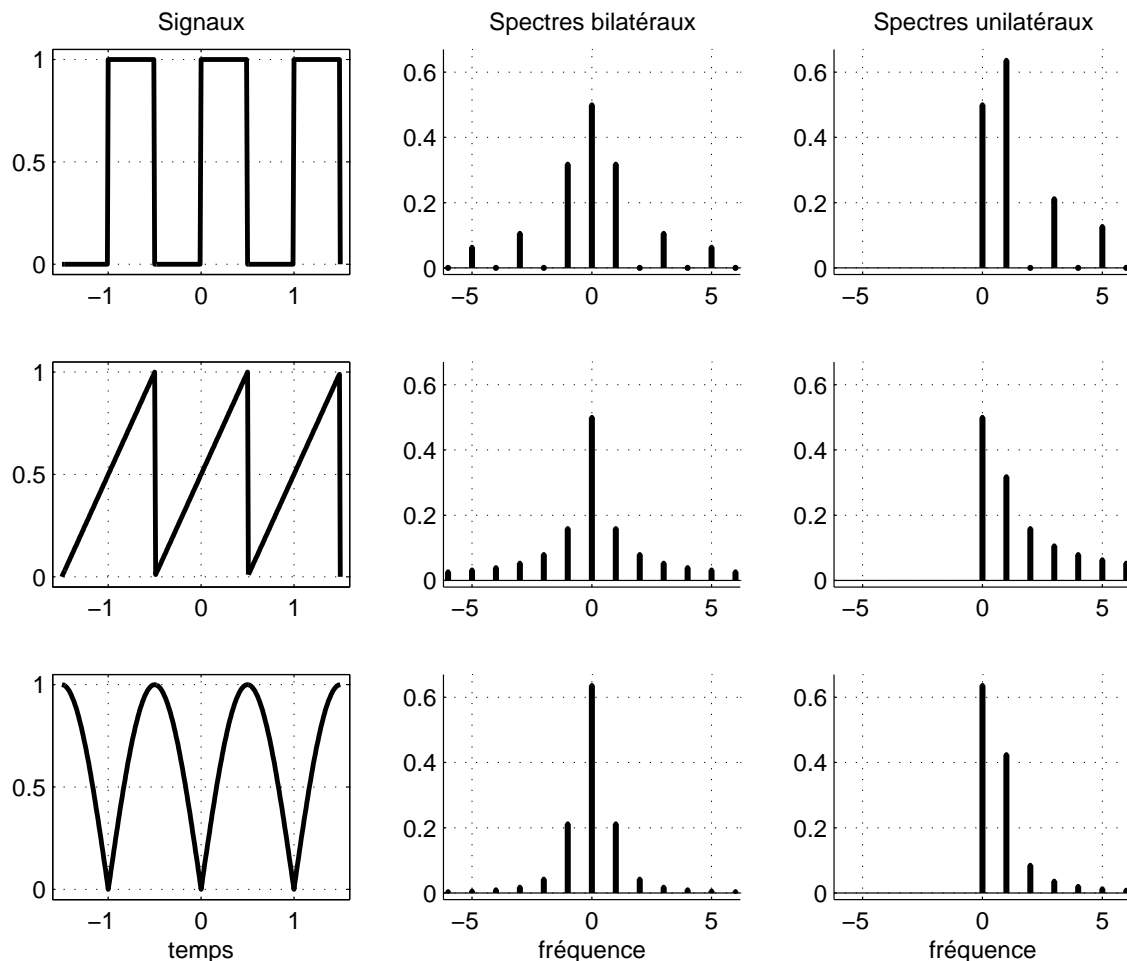
alors que les spectres de phases sont toujours des *fonctions impaires*. On a en effet

$$\angle X(+jk) = -\angle X(-jk) = \alpha_k, \quad k \neq 0 \quad (4.26)$$

Pour le cas particulier de la composante continue du signal, on a

$$|X(0)| = A_0, \quad \angle X(0) = 0, \pi$$

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES



Signaux	P	$X(0)$	$X(jk)$
carré :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j \frac{1}{k\pi}$ si k est impair, 0 sinon
dents-de-scie :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+j \frac{(-1)^k}{2k\pi}$ $-\infty < k < +\infty$
sinus redressé :	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}$ $-\infty < k < +\infty$

FIGURE 4.6.: Quelques signaux avec leurs puissances et spectres d'amplitudes unilatéraux et bilatéraux

4.5.2. Coefficients spectraux et symétries des signaux

Si l'on tient compte des symétries du signal, le calcul des séries de Fourier est simplifié. On démontre en effet aisément les propriétés suivantes :

– une *fonction paire* est représentée par des cosinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = 0, \pm\pi \quad \text{Im}\{X(jk)\} = 0 \quad (4.27)$$

– une *fonction impaire* est représentée par des sinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \text{Re}\{X(jk)\} = 0 \quad (4.28)$$

– une *fonction à symétrie demi-onde* ne possède pas d'harmoniques pairs :

$$X(jk) = 0, \quad \text{si } k \text{ est pair} \quad (4.29)$$

Les fonctions à symétrie demi-onde sont telles qu'une rotation autour de l'abscisse de l'alternance positive ou négative permet de reproduire l'autre alternance (figure 4.7).

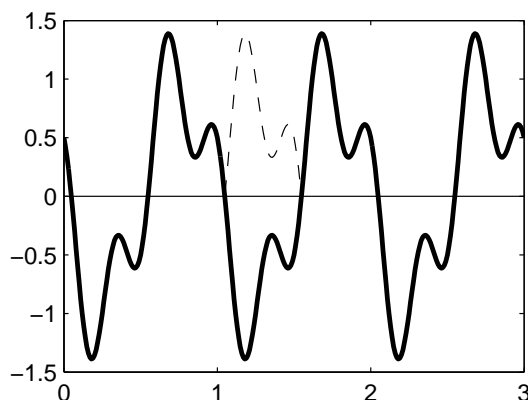


FIGURE 4.7.: Exemple d'une fonction à symétrie demi-onde

4.5.3. Exemple de représentations spectrales d'un signal

Considérant le signal

$$x(t) = 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin(6\pi f_0 t + \pi/4)$$

on souhaite le décrire dans les représentations spectrales uni- et bi-latérales.

La simple observation de l'expression de $x(t)$ montre que ce signal est constitué d'une composante DC et de deux composantes AC d'ordre 1 et 3. Utilisant les règles de trigonométrie, on obtient la forme en cosinus :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 + \sqrt{2^2 + 3.464^2} \cos\left(2\pi f_0 t + \arctan\left(\frac{-(-3.464)}{2}\right)\right) + 2 \cos\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3 + 4 \cos(2\pi \cdot 1 \cdot f_0 t + \pi/3) + 2 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot f_0 t - \pi/4) \\ &= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \alpha_1) + A_3 \cos(6\pi f_0 t + \alpha_3) \end{aligned}$$

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale unilatérale* de laquelle on déduit immédiatement les composantes spectrales unilatérales

$$\begin{aligned} A_0 \angle \alpha_0 &= 3 \angle 0 \\ A_1 \angle \alpha_1 &= 4 \angle +\pi/3 \\ A_2 \angle \alpha_2 &= 0 \angle 0 \\ A_3 \angle \alpha_3 &= 2 \angle -\pi/4 \end{aligned}$$

Appliquant les règles d'Euler à l'expression en cosinus, on obtient la forme complexe :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \exp(+j(2\pi f_0 t + \pi/3)) + 2 \exp(-j(2\pi f_0 t + \pi/3)) \\ &\quad + 1 \exp(+j(6\pi f_0 t - \pi/4)) + 1 \exp(-j(6\pi f_0 t - \pi/4)) \\ &= 3 + 2 \exp(+j\pi/3) \exp(+j2\pi f_0 t) + 2 \exp(-j\pi/3) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ &\quad + 1 \exp(-j\pi/4) \exp(+j6\pi f_0 t) + 1 \exp(+j\pi/4) \exp(-j6\pi f_0 t) \\ &= X(0) + X(+j1) \exp(+j2\pi f_0 t) + X(-j1) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ &\quad + X(+j3) \exp(+j6\pi f_0 t) + X(-j3) \exp(-j6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale bilatérale* de laquelle on tire immédiatement les composantes spectrales bilatérales

$$\begin{aligned} X(0) &= 3 = 3 \angle 0 \\ X(\pm j1) &= 2 \exp(\pm j\pi/3) = 2 \angle \pm \pi/3 \\ X(\pm j2) &= 0 \angle 0 \\ X(\pm j3) &= 1 \exp(\mp j\pi/4) = 1 \angle \mp \pi/4 \end{aligned}$$

De la lecture de ces descriptions découle immédiatement le tracé des spectres d'amplitudes et de phases dans les deux représentations spectrales (figure 4.8). On notera que, pour $k \neq 0$, les amplitudes du spectre bilatéral sont 2 fois plus petites que celles du spectre unilatéral.

Les puissances et valeurs efficaces associées à ce signal se calculent aisément à partir du spectre unilatéral. Afin de pouvoir préciser les unités, on admet que le signal $x(t)$ est une tension électrique ; on a alors :

$$\begin{aligned} P_{dc} = A_0^2 = 3^2 = 9 \text{ V}_{dc}^2 & \quad P_{ac} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} A_k^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 0 + 2^2) = 10 \text{ V}_{ac}^2 \\ P = P_{dc} + P_{ac} = 19 \text{ V}_{eff}^2 & \quad X_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{19} = 4.36 \text{ V}_{eff} \\ X_{dc} = A_0 = 3 \text{ V}_{dc} & \quad X_{ac} = \sqrt{P_{ac}} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ V}_{ac} \end{aligned}$$

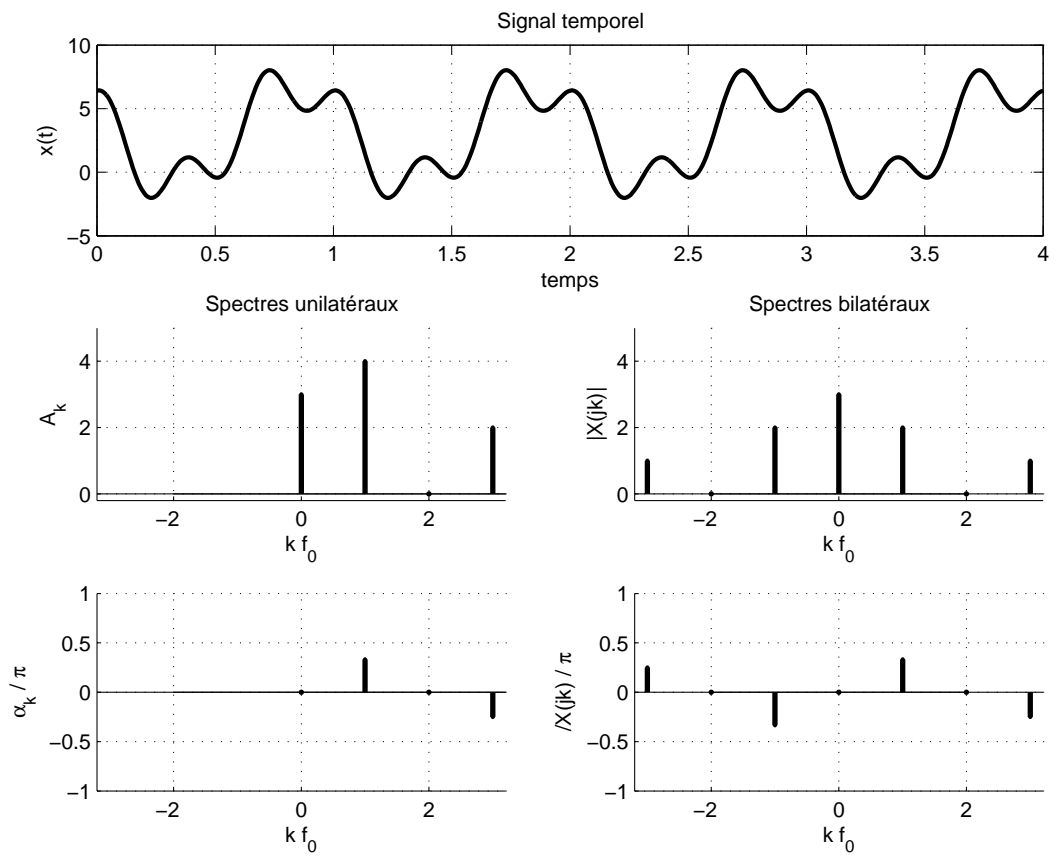


FIGURE 4.8.: Représentations spectrales d'un signal périodique

4.6. Suite d'impulsions

4.6.1. Suite d'impulsions rectangulaires

La suite d'impulsions rectangulaires (SIR) est un signal particulièrement important car elle apparaît dans de nombreuses applications telles que l'échantillonnage, la modulation d'impulsions, etc. Évaluons donc la série de Fourier complexe de la SIR $x(t)$ représentée à la figure 4.9.

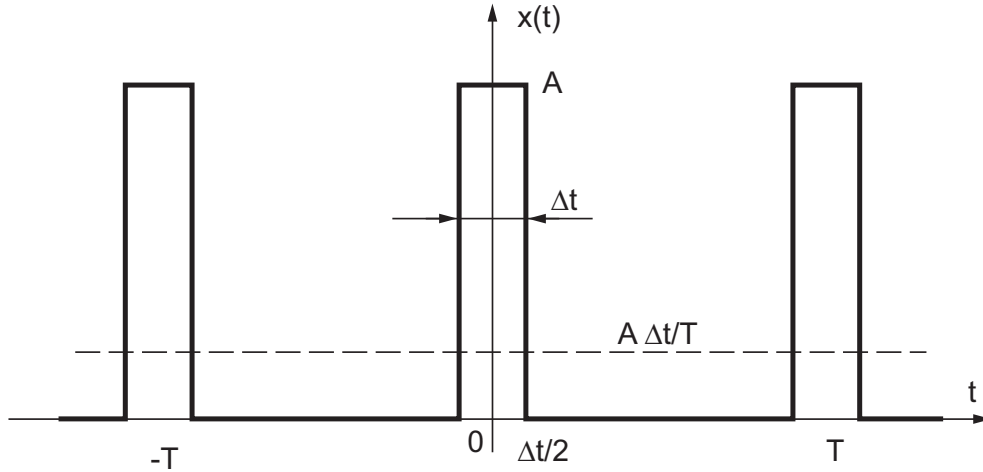


FIGURE 4.9.: Suite d'impulsions rectangulaires

Par définition des coefficients complexes $X(jk)$, on a

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad \text{avec } f_0 = \frac{1}{T}$$

En tenant compte de la définition de la SIR

$$x_T(t) = \begin{cases} A & \text{si } -\Delta t/2 < t < +\Delta t/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

il vient

$$\begin{aligned} X(jk) &= \frac{A}{T} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{-1}{j2\pi k f_0} \left(\exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \right) \end{aligned}$$

Les relations d'Euler permettent de passer de la différence des exponentielles à un sinus et d'écrire ces coefficients sous la forme

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \quad (4.31)$$

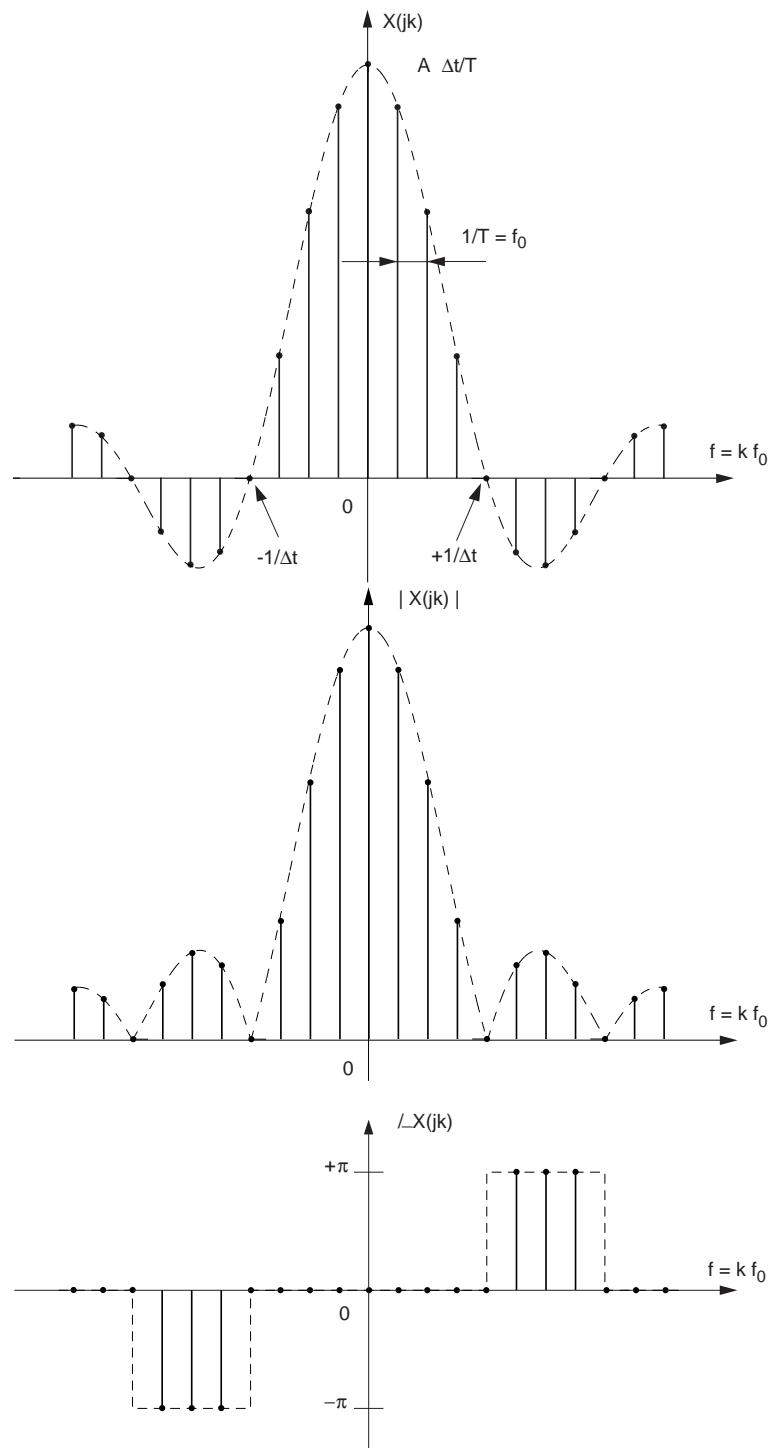


FIGURE 4.10.: Descriptions spectrales d'une suite d'impulsions rectangulaires :
 a) spectre complexe (ici purement réel car la SIR est paire)
 b) spectres d'amplitudes et de phases

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

On notera que l'amplitude du spectre $X(jk)$ est fixée par la valeur moyenne ou composante DC ($k = 0$) de la SIR car la fonction $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. De plus, et comme on pouvait s'y attendre, les coefficients de Fourier sont purement réels puisque le signal est pair. Leur enveloppe (figure 4.10a) est une fonction en $\sin(x)/x$ qui porte le nom de *sinus cardinal* défini comme suit

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (4.32)$$

Le spectre d'une SIR s'écrit donc sous une des deux formes suivantes

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}(k f_0 \Delta t) \quad (4.33)$$

On remarquera que plus les impulsions sont étroites par rapport à la période T , plus le spectre s'étale. En effet, le premier passage par zéro se fait à la fréquence $1/\Delta t$. Par contre, la distance entre raies spectrales ne change pas puisqu'elle est égale à l'inverse de la période de la SIR $f_0 = 1/T$.

Il est fréquent que le spectre d'un signal soit complexe. Dans ce cas, sa représentation dans un plan ne peut se faire qu'au travers du traçage distinct des spectres d'amplitudes et de phases (figure 4.10b).

On peut relever au passage que la puissance totale d'une SIR vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (4.34)$$

et que le premier lobe du spectre d'une SIR en contient environ le 90%.

4.6.2. Suite d'impulsions triangulaires

Il existe une autre suite d'impulsions qui est également très importante en télécommunications; il s'agit de la suite d'impulsions triangulaires (SIT). Le signal $x(t)$ et son spectre $X(jk)$ sont représentés à la figure 4.11. Afin que les surfaces de la SIR et de la SIT soient égales, la largeur à la base du triangle est égale à $2\Delta t$. L'expression de $X(jk)$ est alors la suivante

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \quad (4.35)$$

La puissance totale d'une SIT vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} 2 \int_0^{\Delta t} \left(\frac{A}{\Delta t} t \right)^2 dt = \frac{2}{3} A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (4.36)$$

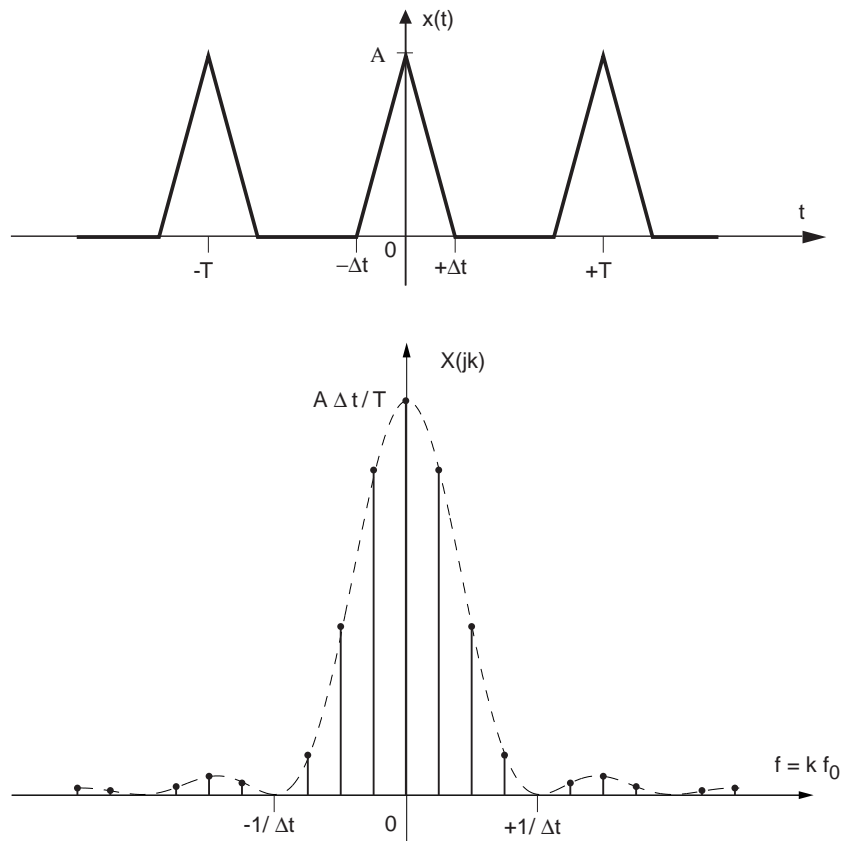


FIGURE 4.11.: Suite d'impulsions triangulaires avec son spectre

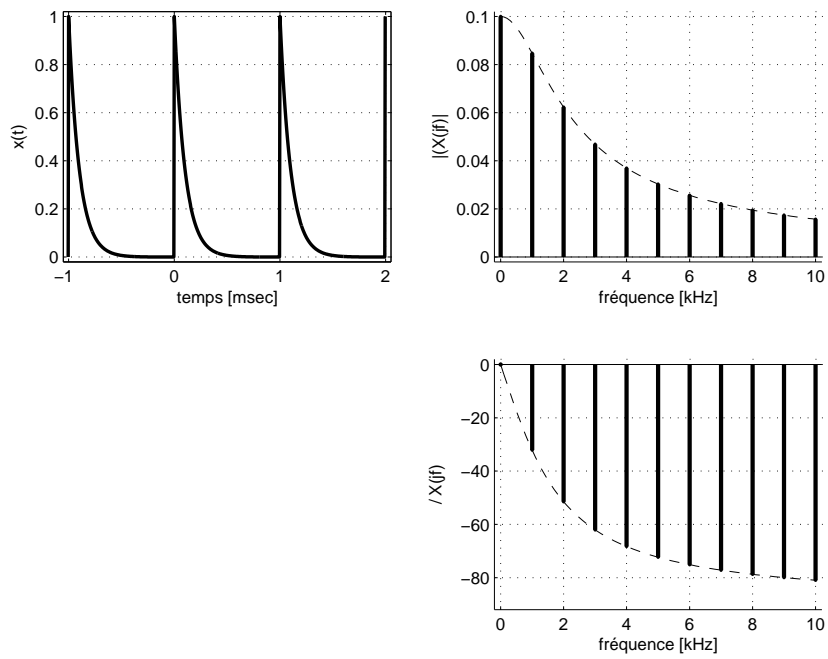


FIGURE 4.12.: Suite d'exponentielles décroissantes ($\tau \ll T$) et sa représentation spectrale

4.6.3. Suite d'exponentielles décroissantes

Considérons une exponentielle qui se répète périodiquement aux instants kT (figure 4.12)

$$x(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

Le calcul de son spectre se fait en appliquant la définition de $X(jk)$

$$\begin{aligned} X(jk) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp(-t/\tau) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right) dt \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right)}{-\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)} \Bigg|_0^T \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{-\tau}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \left[\exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

En admettant que la constante de temps τ est beaucoup plus petite que la période T , on permet à l'exponentielle de revenir à zéro à la fin de chaque période. Dans ce cas, le premier terme entre crochets est beaucoup plus petit que 1 et peut être négligé. On obtient alors le résultat intéressant suivant

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T \quad (4.37)$$

On peut relever que dans ce résultat on trouve la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pondérée par le rapport $A \frac{\tau}{T}$. La représentation des raies spectrales d'amplitudes (figure 4.12) coïncidera donc, à un coefficient près, avec le module de la réponse fréquentielle de ce filtre alors que celle des phases seront les mêmes.

Dans le cas où $\tau \ll T$, la puissance totale d'une SIE vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (A \exp(-t/\tau))^2 dt = \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{T} \quad (4.38)$$

4.7. Reconstruction des signaux

4.7.1. Synthèse d'un signal

On se souvient que, connaissant le spectre $X(jk)$, on peut toujours reconstruire une approximation d'ordre N du signal temporel. Dans le cas d'une **suite d'impulsions**

rectangulaires cela donne

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Pour la suite d'impulsions triangulaires, on a de même

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Signal carré symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIR vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Signal triangulaire symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIT vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &= 2 \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \cos(2\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \cos(6\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Une illustration de la synthèse de ces deux signaux est donnée à la figure 4.13. On constate que, contrairement au signal triangulaire, la convergence est très lente pour le signal carré.

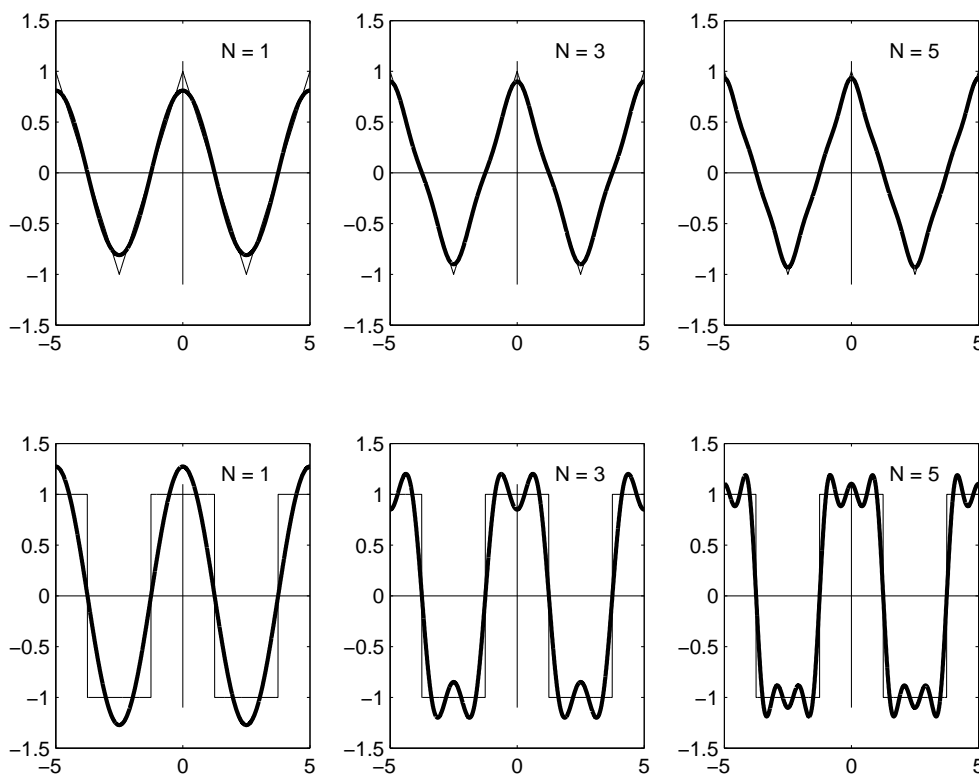


FIGURE 4.13.: Synthèse de signaux triangulaire et carré par l'addition successive des harmoniques

4.7.2. Phénomène de Gibbs

En général, lorsqu'on reconstruit un signal $x(t)$ à partir de ses coefficients de Fourier :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N X(jk) \exp(j2\pi k f_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (4.39)$$

on remarque une convergence rapide vers le signal original au fur et à mesure que N augmente. Cependant, cela n'est plus vrai lorsque le signal possède des discontinuités d'ordre 0. Il apparaît alors, à l'endroit de la discontinuité, des oscillations que l'on désigne sous le nom de phénomène de Gibbs. L'amplitude du dépassement dû à ces oscillations est égale au 9% de l'amplitude de la discontinuité (figure 4.14).

4.7.3. Importance de la phase

Il est fréquent en traitement du signal de ne parler que des spectres d'amplitudes et de délaier quelque peu les spectres de phases. Cette attitude est due au fait que

4.7. Reconstruction des signaux

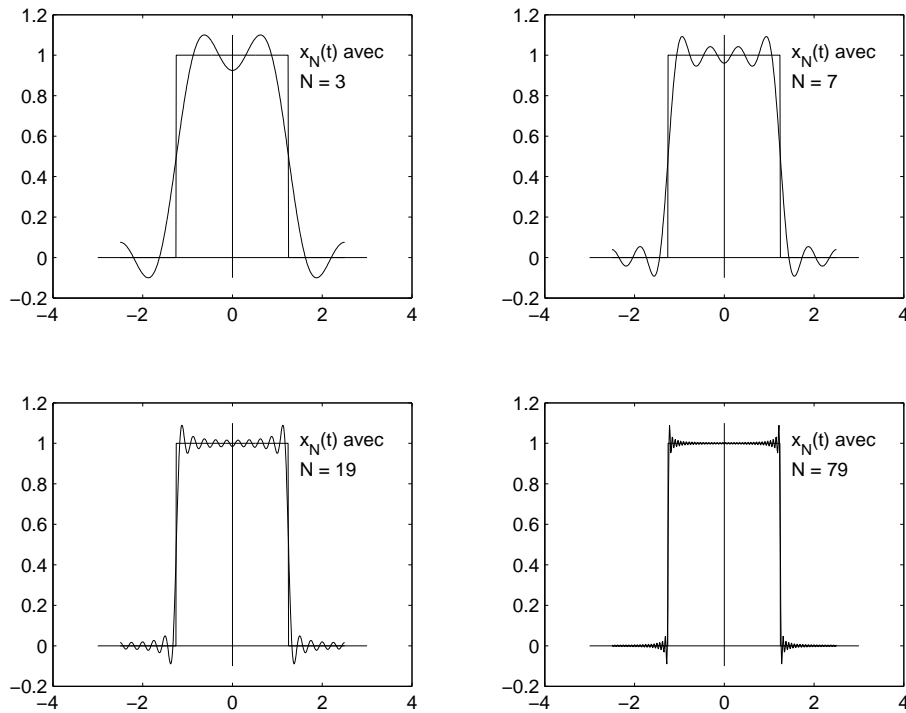


FIGURE 4.14.: Illustration du phénomène de Gibbs

lors du filtrage de signaux audio, on se contente de modifier le spectre d'amplitudes car l'oreille est peu sensible aux distorsions de phase. Cependant, lorsque l'on désire conserver la forme d'un signal, en particulier dans le cas du filtrage d'images, il est très important de ne pas négliger le spectre de phases.

Un exemple en est donné à la figure 4.15 où une série de photos basées sur le portrait de Joseph Fourier illustre l'importance de la phase dans la reconstitution des signaux.

1. L'image du haut de la figure est le portrait de Joseph Fourier.
2. Au centre, on y voit les spectres d'amplitudes et de phases de l'image de Fourier ; les niveaux de gris correspondent à la valeur de ces fonctions.
3. Les deux images du bas sont des images reconstruites par transformation inverse. Pour construire celle de gauche, on a utilisé le spectre d'amplitudes et remplacé le spectre de phases par un spectre de phases nulles. Pour celle de droite, on a fait l'inverse : le spectre de phases a été conservé alors que le spectre d'amplitudes a été remplacé par des amplitudes constantes.

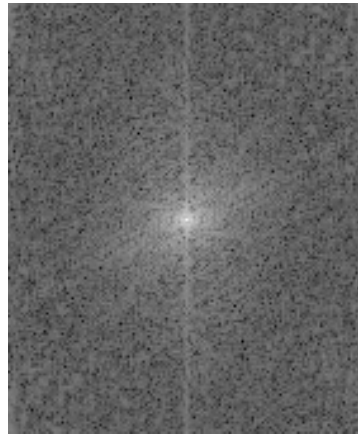
De ces illustrations, on en déduit que la phase contient une part importante de l'information concernant la *forme d'un signal*. Les deux dernières images illustrent particulièrement bien ce fait puisque le portrait initial ne peut pas être reconstruit avec un seul des deux spectres.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

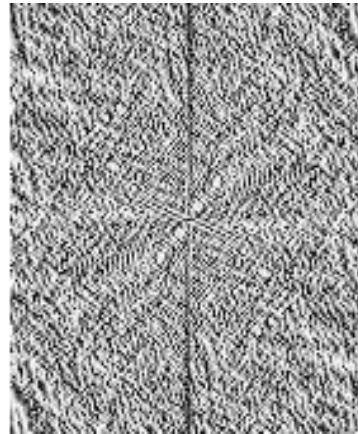
original



module



phase



TF inverse du module



TF inverse de la phase



FIGURE 4.15.: Transformations de Fourier directes et inverses d'une image

4.8. Quelques théorèmes utiles

4.8.1. Décalage temporel

Il est fréquent en analyse des signaux de devoir décaler temporellement un signal $x(t)$; on obtient alors un nouveau signal $y(t) = x(t + t_d)$. Ce décalage t_d peut être positif (signal avancé) ou négatif (signal retardé) (fig. 4.16). On montre alors qu'entre les espaces temps et fréquences, il existe la relation suivante :

$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk) \quad (4.40)$$

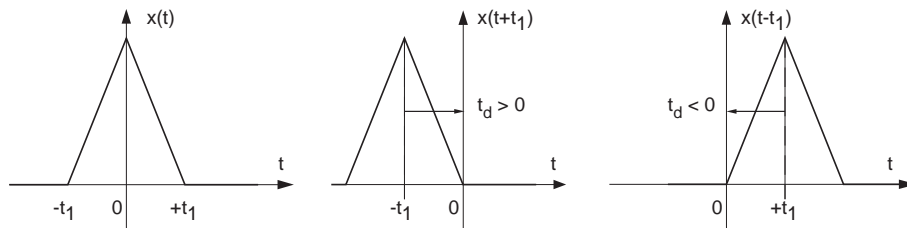


FIGURE 4.16.: Décalage temporel : signal original, signal avancé, signal retardé

Comme le module du phaseur $\exp(+j2\pi k f_0 t_d)$ vaut toujours un, il s'ensuit que seul le spectre de phases est modifié par un décalage temporel. On a donc :

$$|Y(jk)| = |X(jk)|, \quad \beta_k = \alpha_k + 2\pi k f_0 t_d \quad (4.41)$$

À un décalage temporel correspond une phase variant linéairement avec la fréquence.

4.8.2. Modulation d'amplitude

Il est fréquent en télécommunications de devoir émettre des signaux dont le spectre a été préalablement déplacé dans un domaine de fréquences permettant la transmission des messages par ondes électromagnétiques. Une des possibilités consiste à moduler l'amplitude de la porteuse $p(t)$ à l'aide du message $m(t)$.

La modulation d'amplitude est généralement obtenue par la multiplication des deux signaux entre eux (figure 4.17)

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) \quad (4.42)$$

Dans le cas particulier où la porteuse $p(t)$ est une fonction sinusoïdale, on peut la remplacer par deux phaseurs de fréquence $\pm f_p$ grâce aux formules d'Euler

$$\cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} (\exp(+j2\pi f_p t) + \exp(-j2\pi f_p t))$$

On a donc affaire, de manière plus fondamentale, à une multiplication du message $m(t)$ par un phaseur :

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) = m(t) \cdot \exp(\pm j2\pi f_p t) \quad (4.43)$$

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

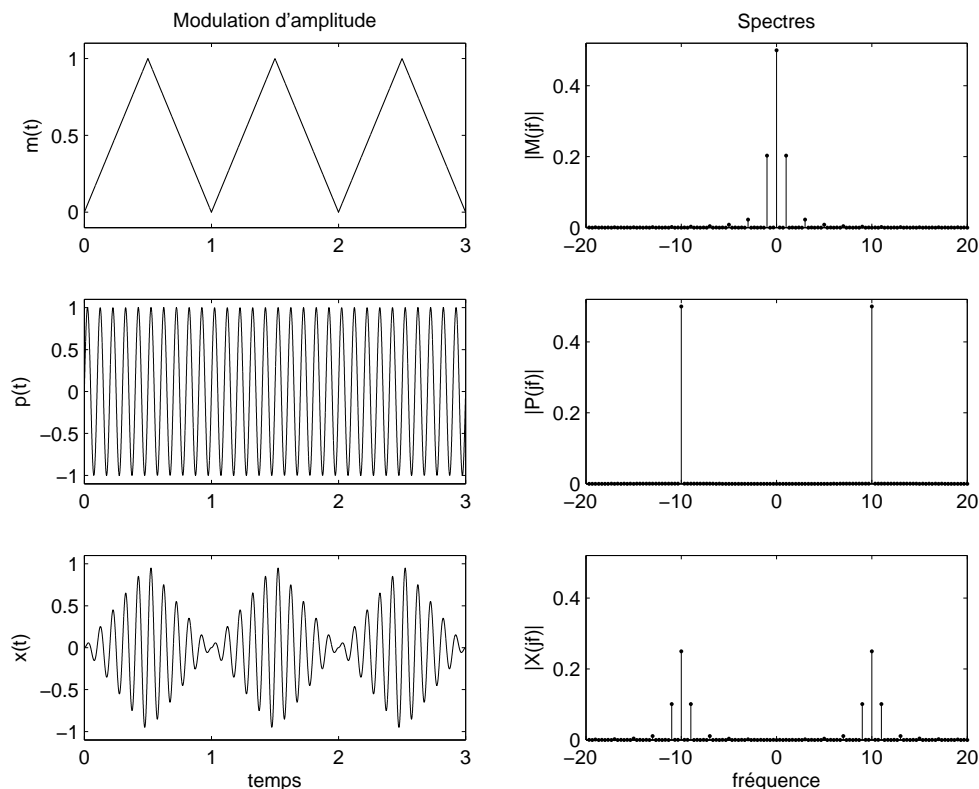


FIGURE 4.17.: Modulation d'amplitude : signaux et spectres

On montre alors aisément la propriété suivante :

$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(jkf_0 \mp f_p) \quad (4.44)$$

À une multiplication par un phaseur dans le domaine temporel correspond un décalage dans l'espace des fréquences.

La figure 4.17 illustre la modulation d'amplitude d'une porteuse de fréquence 10kHz par un signal triangulaire de fréquence 1kHz. Au niveau fréquentiel, on voit très bien que le spectre original situé autour de la fréquence nulle est déplacé autour des fréquences de la porteuse ± 10 kHz avec une amplitude réduite de moitié. On notera que le signal modulé $x(t)$ n'est périodique que si le rapport des fréquences f_p/f_0 est rationnel.

4.8.3. Rotation autour de l'ordonnée

La rotation d'un signal autour de son ordonnée est décrite par $y(t) = x(-t)$. Dans ce cas, on montre que

$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X(-jk) = X^*(jk) \quad (4.45)$$

À une rotation du signal temporel autour de l'ordonnée correspond le conjugué complexe dans le domaine fréquentiel.

Par exemple, si l'on s'intéresse à une suite périodique d'exponentielles croissantes décrite par

$$x(t)|_T = A \cdot \exp(+t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

son spectre se calcule aisément à partir de celui de la suite d'exponentielles décroissantes

$$x_o(t)|_T = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

$$X_o(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

On voit en effet que l'on a

$$x(t) = x_o(-t)$$

donc

$$X(jk) = X_o(-jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 - j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

4.9. Calcul de quelques spectres

Le but de ce paragraphe est de montrer, au travers de quelques exemples simples, comment on calcule, trace et interprète les spectres d'un signal.

4.9.1. Suite d'impulsions composites

Considérant le signal de la figure 4.18a, on aimerait calculer ses composantes spectrales et obtenir son approximation d'ordre 3.

La résolution de ce problème est immédiate dès l'instant où l'on remarque que le signal $x(t)$ est composé d'une somme de deux SIR $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les caractéristiques sont, respectivement, leur largeur : $\Delta t_1 = 0.25[msec]$, $\Delta t_2 = 0.5[msec]$, et leur amplitude : $A_1 = 1 [V]$, $A_2 = 2 [V]$.

Utilisant la propriété de linéarité des séries de Fourier, on a :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) \quad (4.46)$$

Comme le signal $x(t)$ et ses deux SIR constitutives sont paires, leurs spectres sont réels

$$X_1(jk) = A_1 \frac{\Delta t_1}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_1)}{k\pi f_0 \Delta t_1} = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}$$

$$X_2(jk) = A_2 \frac{\Delta t_2}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_2)}{k\pi f_0 \Delta t_2} = 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

$$X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4} + 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

Le calcul de quelques composantes spectrales fournit les valeurs numériques suivantes :

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

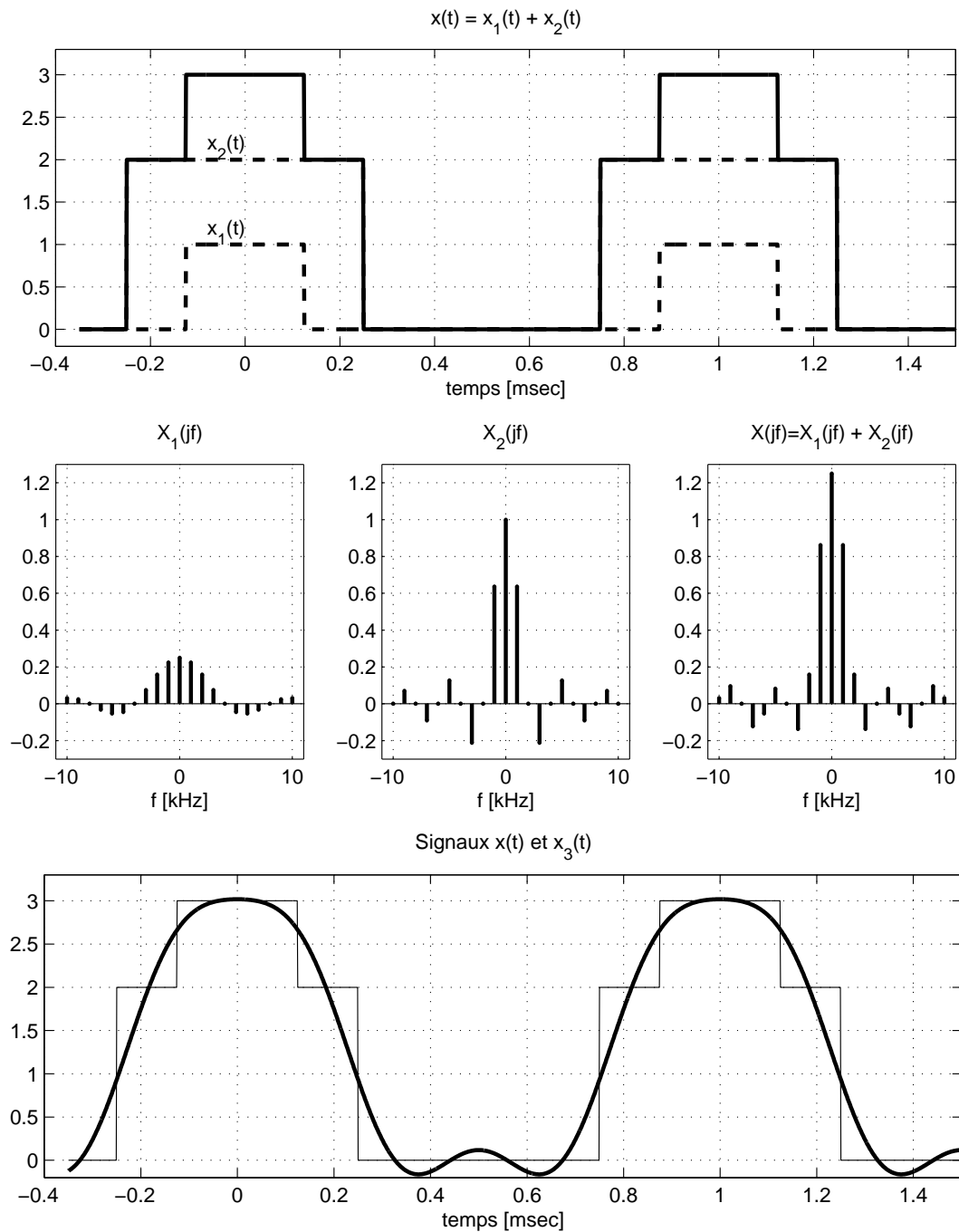


FIGURE 4.18.: Suite d'impulsions composites :

- a) les signaux temporels
- b) les spectres respectifs
- c) la reconstruction d'ordre 3

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
$X_1(jk)$	-0.045	0	+0.075	+0.159	+0.225	+0.25	+0.225	+0.159	+0.075	0	-0.045
$X_2(jk)$	0.127	0	-0.212	0.00	+0.637	1.00	0.637	0.00	-0.212	0	0.127
$X(jk)$	+0.082	0	-0.137	+0.159	+0.862	1.25	+0.862	+0.159	-0.137	0	+0.082
A_k						1.25	1.724	0.318	0.274	0	0.164
α_k							0.00	0.00	π	0	0.00

La figure 4.18c représente l'approximation d'ordre 3 du signal décrite par :

$$x_{(3)}(t) = 1.25 + 1.724 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + 0.318 \cdot \cos(4\pi f_0 t) + 0.274 \cdot \cos(6\pi f_0 t + \pi)$$

À titre d'exercice, on peut montrer que les puissances des signaux $x(t)$ et $x_{(3)}(t)$ valent respectivement $P_x = 3.25 V_{eff}^2$, $P_{x(3)} = 3.14 V_{eff}^2$.

4.9.2. SIR décalée

Considérons le cas d'une SIR non centrée démarrante à l'instant $t = 0$, de largeur Δt et de période T (figure 4.19a). Dans ce cas, la SIR est retardée d'une demi-largeur d'impulsion et le temps de décalage vaut donc $t_d = -\Delta t/2$. Partant d'une SIR centrée et utilisant le théorème du retard, on obtient :

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \quad (4.47)$$

Si l'on désigne $X(jk)$ par le produit de 3 facteurs $X(jk) = X_0 \cdot X_1(jk) \cdot X_2(jk)$, le spectre d'amplitudes s'obtient en effectuant le produit des modules

$$\begin{aligned} |X(jk)| &= |X_0| \cdot |X_1| \cdot |X_2| \\ &= A \frac{\Delta t}{T} \cdot \left| \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right| \cdot 1 \end{aligned}$$

alors que le spectre de phases est obtenu en sommant les phases :

$$\begin{aligned} \angle X(jk) &= \angle X_0 + \angle X_1 + \angle X_2 \\ &= 0 + (0; \pm\pi) + (-\pi k f_0 \Delta t) \end{aligned}$$

Considérant que l'on a $\Delta t = 0.1 [msec]$, $T = 1 [msec]$, la combinaison de ces termes spectraux est illustrée par la figure 4.19. Comme attendu, on constate que le décalage temporel du signal ne modifie pas le spectre d'amplitudes, mais introduit une phase variant linéairement avec la fréquence.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

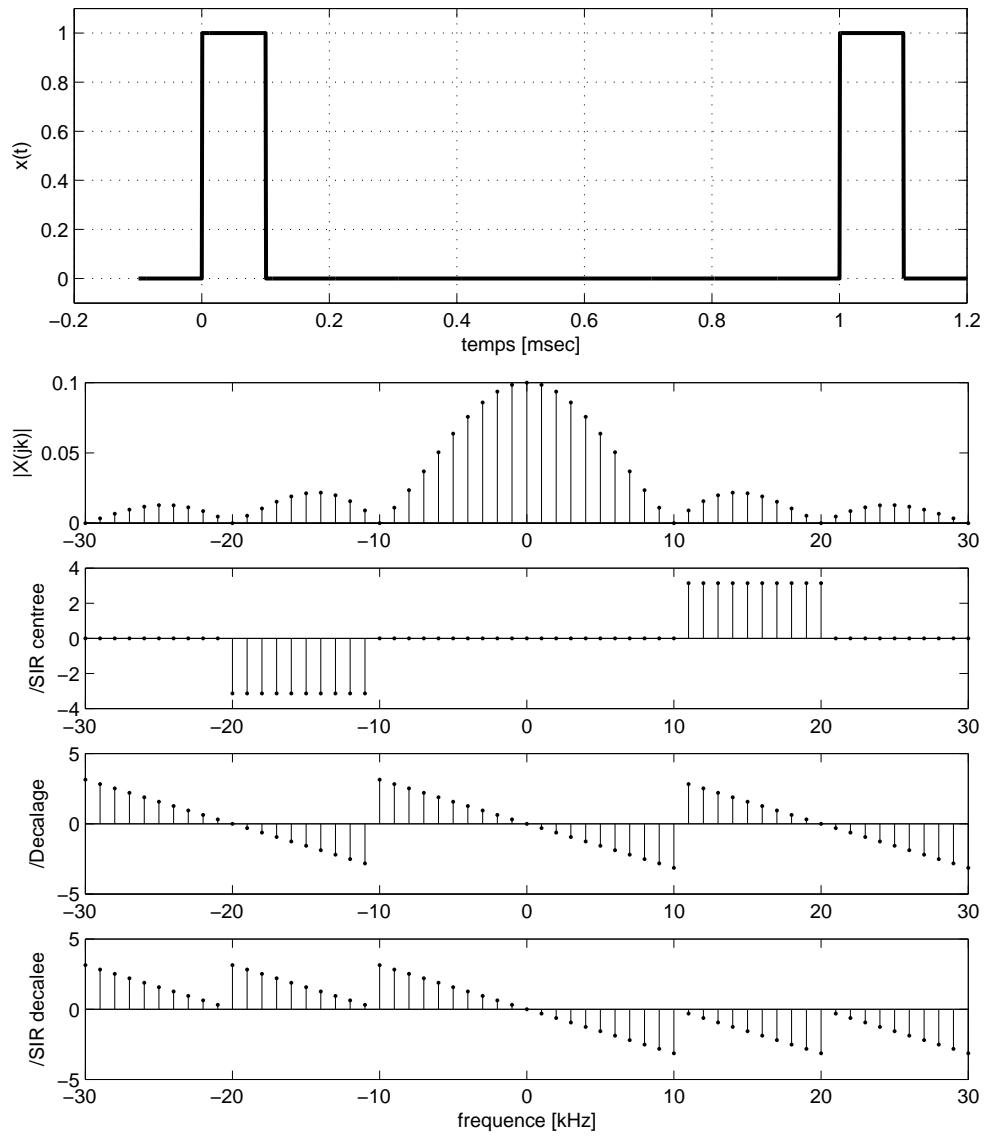


FIGURE 4.19.: SIR démarrant à l'instant $t = 0$ et son spectre

4.10. Réponse d'un système linéaire

Considérons, comme exemple, un filtre attaqué par une SIR (figure 4.20a). Comme ce signal est périodique, on retrouvera à la sortie du circuit un signal périodique $y(t)$ de même période T_0 . La décomposition de ces 2 signaux en série de Fourier donnera les spectres $X(jk)$ et $Y(jk)$ qui seront liés l'un à l'autre par la réponse fréquentielle $G(j\omega)$ du filtre.

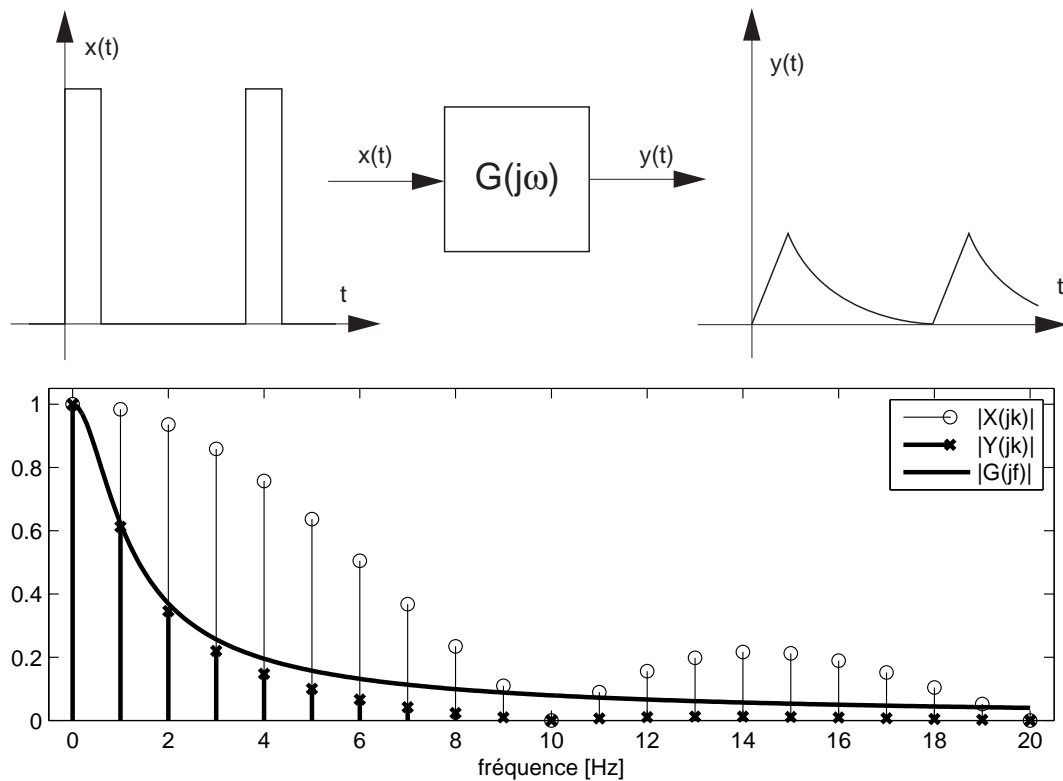


FIGURE 4.20.: Réponses temporelle et fréquentielle d'un filtre à une SIR

Comme les signaux périodiques sont représentés par des ondes sinusoïdales de fréquences kf_0 et que les systèmes linéaires conservent la fréquence des signaux appliqués, on retrouve pour $Y(jk)$ des raies spectrales situées aux mêmes fréquences que celles de $X(jk)$ (figure 4.20b). De plus, l'amplitude et la phase de ces raies spectrales sont liées au signal d'entrée par la relation bien connue $Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot X(j\omega)$. Dans le cas de signaux périodiques, la pulsation ω est un multiple de la fondamentale $2\pi f_0$. On a donc

$$Y(jk) = X(jk) \cdot G(j\omega)|_{\omega=2\pi kf_0} \quad (4.48)$$

4.10.1. Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Considérant le circuit L-R de la figure 4.21 et la SIR qui lui est appliquée, on aimerait :

1. connaître la fonction de transfert de ce filtre et sa constante de temps τ ;

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

- calculer la composante continue $U_{2,dc}$;
- esquisser le signal de sortie $u_2(t)$ en tenant compte des valeurs numériques $L = 100 [mH]$, $R = 100 [\Omega]$;
- calculer le spectre $U_2(jk)$;
- calculer les valeurs efficaces $U_{1,eff}$, $U_{2,eff}$, $U_{2,ac,eff}$;
- estimer la valeur de crête de l'ondulation $u_{2,ac}(t)$.

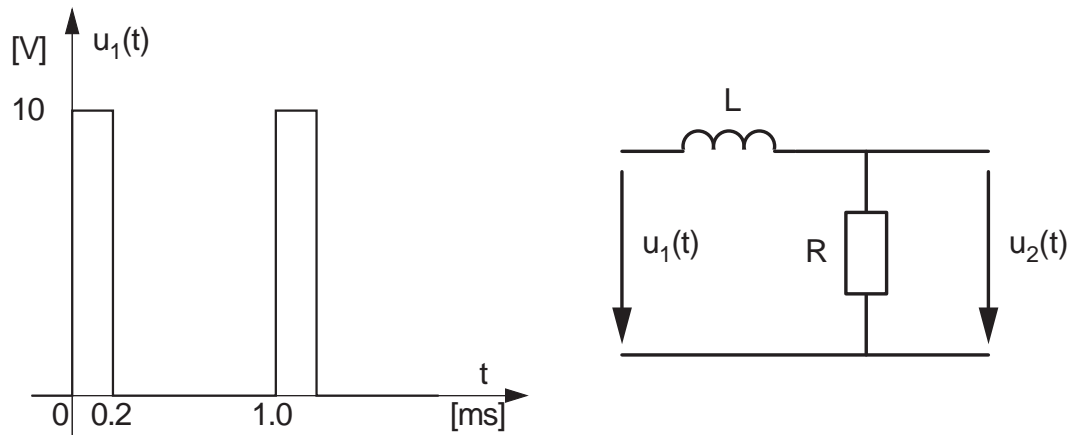


FIGURE 4.21.: Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Solution :

4.10. Réponse d'un système linéaire

4.11. Réponse d'un système non-linéaire

La caractéristique essentielle des systèmes non-linéaires est de déformer les signaux sinusoïdaux. Le signal de sortie est donc périodique non-sinusoïdal. Il s'en suit que son spectre est constitué d'un grand nombre de raies spectrales, alors qu'à l'entrée il n'y avait qu'une seule raie.

Dans la pratique, il est important de pouvoir chiffrer cette déformation puisque les amplificateurs réels, quelle que soit leur qualité, possèdent des non-linéarités. On mesure cette déformation à l'aide du *taux de distorsion harmonique* (TDH). Celui-ci est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques d'ordre supérieur à 1 avec la valeur efficace du premier harmonique

$$TDH = \frac{X_{eff}(k > 1)}{X_{eff}(k = 1)} = \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \quad (4.49)$$

4.11.1. Distorsion due à une diode

Considérons comme exemple de système non linéaire, une diode à laquelle on applique une tension sinusoïdale superposée à une tension continue (figure 4.22)

$$u(t) = U_0 + \Delta U(t) = U_0 + A \sin(2\pi f_0 t)$$

Cette diode est caractérisée par la loi exponentielle bien connue

$$I_D = I_S (e^{U_D/nV_T} - 1) \quad (4.50)$$

Admettant les valeurs numériques suivantes

$$U_0 = 0.5 [V], \quad A = 0.05 [V], \quad f_0 = 100 [Hz]$$

$$I_S = 10 [pA], \quad n = 1, \quad V_T = 26 [mV]$$

on désire :

1. calculer I_0 , I_{max} et I_{min}
2. esquisser $u(t)$ et $i(t)$
3. calculer $U(jk)$ et $I(jk)$
4. calculer le TDH du courant.

Solution :

1. Le calcul de I_0 , I_{max} et I_{min} se fait par simple application numérique de l'équation de la diode; on obtient alors :
 - a) le courant au point de fonctionnement $I_0 = 2.54 mA$;
 - b) sa valeur maximum $I_{max} = 17.2 mA$;
 - c) sa valeur minimum $I_{min} = 0.36 mA$.

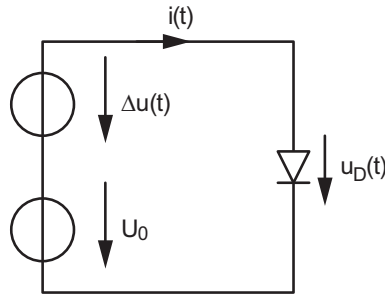


FIGURE 4.22.: Circuit à diode

2. La simulation temporelle avec Spice a donné les résultats de la figure 4.23. On y voit que la variation sinusoïdale de la tension de la diode (50 mV) autour du point de fonctionnement (500 mV) entraîne une variation non sinusoïdale du courant caractérisé par les valeurs calculées ci-dessus.
3. L'analyse spectrale obtenue par FFT (Fast Fourier Transform) donne les résultats suivants.
 - a) La tension de la diode ne contient que 2 raies spectrales (figure 4.24a) :
 - i. la composante DC : $U_{dc} = 0.5 V$;
 - ii. la composante AC : $U_1 = 50 mV$.
 - b) Le courant non sinusoïdal est composé d'un grand nombre de raies spectrales dont les 10 premières sont les plus significatives (figure 4.24b). On y trouve en particulier
 - i. la composante DC : $I_{dc} = 5.41 mA$;
 - ii. la composante fondamentale : $I_1 = 7.43 mA$.
4. Le calcul du taux de distorsion se fait en appliquant la définition du TDH :

$$\begin{aligned}
 TDH &= \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{3.14^2 + 0.94^2 + 0.22^2 + 0.041^2 + 0.0065^2 + \dots}{7.43^2}} \\
 &= 44\%
 \end{aligned}$$

Cette valeur élevée est le signe de la forte déformation de la sinusoïde causée par la variation exponentielle du courant.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

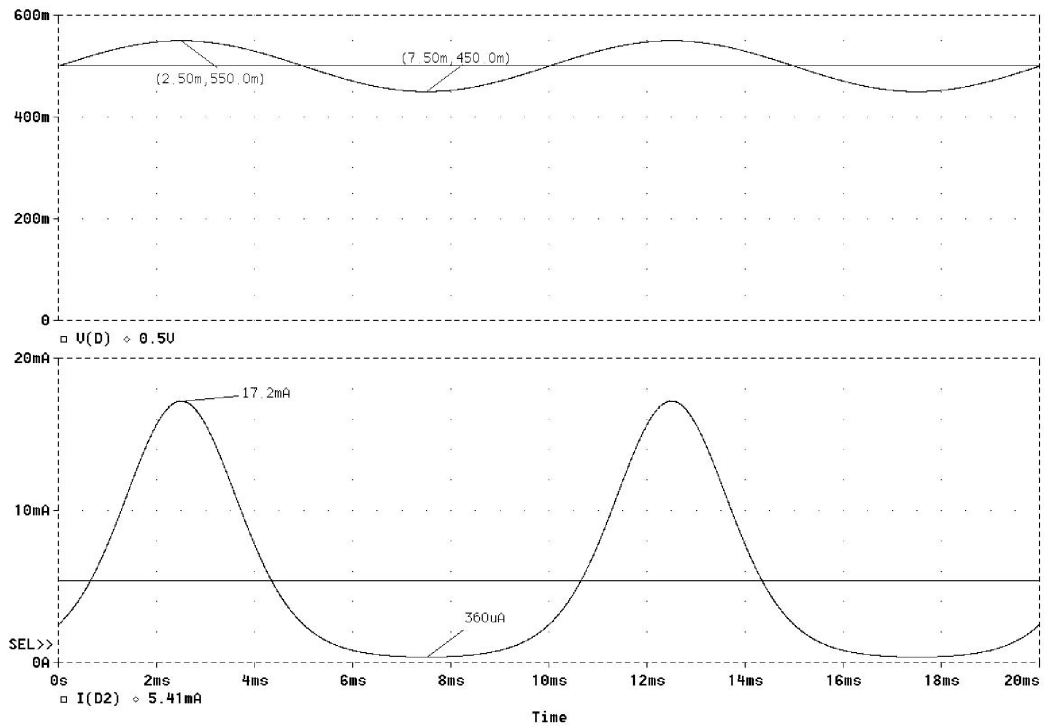


FIGURE 4.23.: Tension et courant de la diode

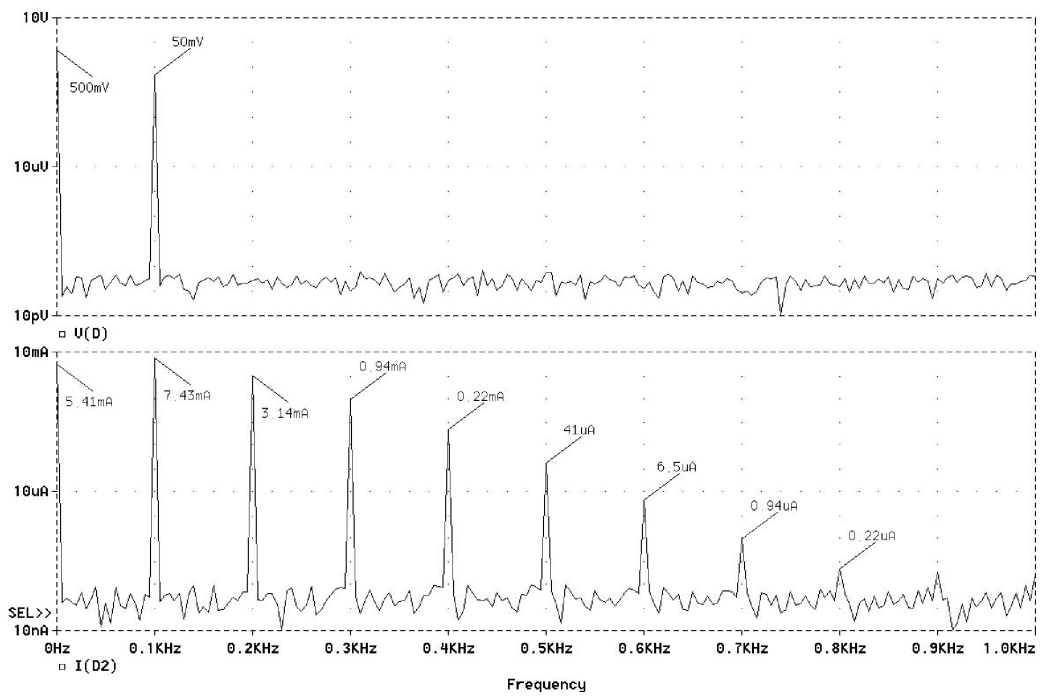


FIGURE 4.24.: Spectres unilatéraux de la tension et du courant de la diode

4.12. Exercices

SF 1 Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1 [kHz]$:

$$x_1(t) = 6 - 2 \cos(2\pi f_0 t) + 3 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_2(t) = 4 + 1.8 \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + 0.8 \sin(6\pi f_0 t)$$

1. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. écrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

SF 2 Utilisez les formules d'Euler pour montrer que la série de Fourier du signal suivant

$$x(t) = \left(1 + \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \cos(10\pi f_0 t)$$

est décrite par les harmoniques 4, 5 et 6. Pour ce faire :

1. remplacez chaque fonction cosinus par deux phaseurs ; effectuez le produit ;
2. écrivez $x(t)$ sous la forme d'une somme de phaseurs ;
3. que valent les coefficients $X(jk)$ non-nuls ?
4. dessinez les spectres bilatéraux et unilatéraux d'amplitude et de phase ;
5. calculez sa puissance.

SF 3 Considérant un signal périodique de période $T = 20 [ms]$ décrit par son spectre bilatéral $X(jk)$:

k	0	± 1	± 2
$X(jk)$	2	$-3 \pm j2$	$+1 \pm j3$
$ X $			
$\angle X$			

retrouvez sa description temporelle en cosinus après avoir rempli les cases libres du tableau. Calculez les valeurs de X_{dc} , X_{ac} et P .

SF 4 À partir des spectres d'amplitude et de phase d'une SIR vus au cours,

1. calculez les spectres complexes des deux signaux Ex SF4 ;
2. esquissez leurs spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

SF 5 Considérant les spectres unilatéraux Ex SF5 d'un signal $x(t)$:

1. donnez l'expression de $x(t)$;
2. dessinez son spectre bilatéral ;
3. calculez ses valeurs efficaces AC et totale.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

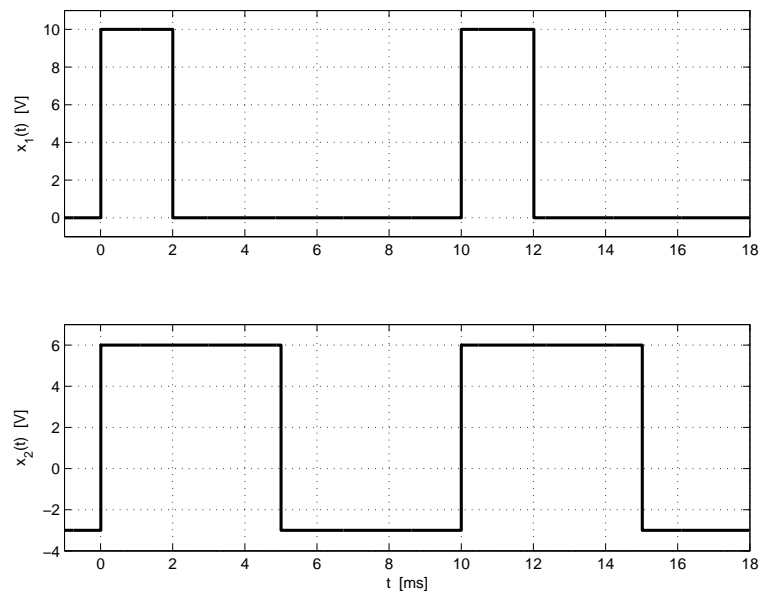


FIGURE 4.25.: Ex SF 4

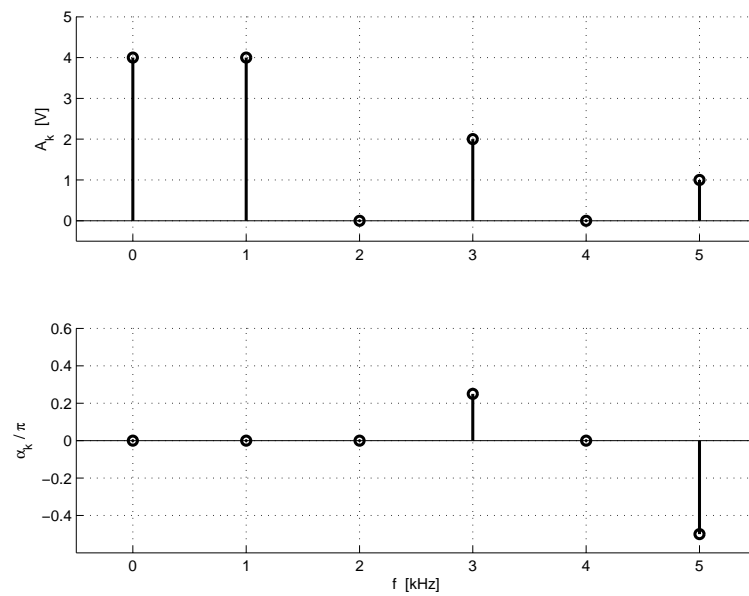


FIGURE 4.26.: Ex SF 5

SF 6 Considérant les trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de période $T = 1 \text{ ms}$ décrits par leurs spectres respectifs (tableau Ex SF6) :

1. donnez l'expression temporelle correspondant à leur représentation ;
2. écrivez ces expressions à l'aide de cosinus seulement ;
3. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase uni- et bilatéraux ;
4. calculez la puissance de chacun des trois signaux.

	k	0	1	2	3	4
$x_1(t)$	a_k	+2	+5	-2	+1	0
	b_k		+4	+3	-1	0
	k	0	1	2	3	4
$x_2(t)$	A_k	1	3	0	2	0
	α_k	0	$-\pi/3$	0	$+\pi/2$	0
	k	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$x_3(t)$	$X(jk)$	5	$4 \pm j3$	0	$-2 \mp j$	0

TABLE 4.1.: Ex SF 6

SF 7 Étant donné un signal caractérisé par les propriétés suivantes :

1. $x(t)$ est réel et impair ;
2. $x(t)$ est périodique avec $T = 2 \text{ [msec]}$;
3. $X(jk) = 0$ pour $|k| > 1$;
4. $P = 1$;

trouvez deux signaux satisfaisant à ces propriétés.

SF 8 Considérant le signal $x(t) = 2 + \sin(2\pi f_0 t) + 0.25 \cos(6\pi f_0 t)$

1. écrivez $x(t)$ dans les formes cosinus et complexe ;
2. donnez les composantes spectrales dans les trois représentations :

$$\{a_k, b_k\}, \quad \{A_k, \alpha_k\}, \quad \{X(jk)\}$$

3. vérifiez que la puissance de ce signal calculée à l'aide des trois représentations donne le même résultat ;
4. comment calculeriez-vous la puissance dans l'espace temps ? voyez-vous des moyens de simplifier ce calcul ? si oui, le résultat est immédiat.

SF 9 On considère une SIR d'amplitude $A = 2 \text{ [V]}$, de période $T = 1 \text{ [ms]}$ de largeur $\Delta t = 0.2 \text{ [ms]}$; cette SIR est avancée de $T/4$ par rapport à une SIR centrée :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez son spectre $X(jk)$;
3. esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase ;
4. calculez la puissance de cette SIR.

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

SF 10 Considérant la suite d'impulsions impaires de la figure Ex SF10 :

1. le spectre sera-t-il réel, imaginaire ou complexe ;
2. calculez ses coefficients de Fourier complexes ;
3. quelle est la puissance de ce signal ?
4. dans le cas où $A = 10 [V]$, $T = 10 [ms]$ et $\Delta t = 1 [ms]$, esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

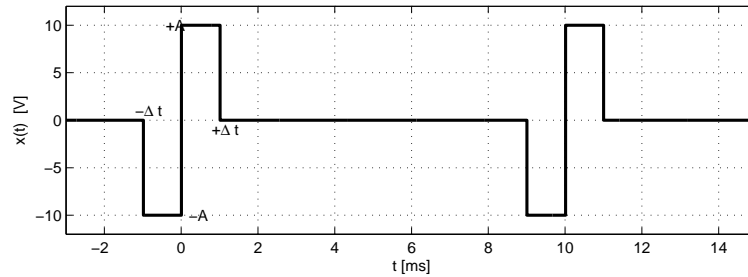


FIGURE 4.27.: Ex SF 10

SF 11 On considère un signal périodique $x(t)$ retardé d'une valeur t_r par rapport au signal original $x_0(t)$. Montrez que :

1. son spectre complexe vaut $X(jk) = X_0(jk) e^{-j2\pi k f_0 t_r}$;
2. son spectre d'amplitude n'est pas modifié ;
3. son spectre de phase vaut $\angle X = \angle X_0 - 2\pi k f_0 t_r$.

SF 12 Esquissez avec soin les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase des signaux Ex SF12a et Ex SF12b. Expliquez les différences apparaissant entre les spectres.

SF 13 Partant d'une SIR, calculez le spectre d'un signal carré d'amplitude $A = \pm 5 V$ et de période $T = 1 ms$. Faites de même pour un signal triangulaire à partir de la SIT.

SF 14 Considérant les quatre signaux de la figure Ex SF14 d'amplitude A , de période T , de largeur et constante de temps $\Delta t = \tau = 0.2 T$:

1. calculez leur valeur efficace ;
2. à partir du spectre d'une suite d'exponentielles décroissantes, utilisez deux théorèmes proposés dans le cours pour trouver les spectres des signaux $x_2(t)$ et $x_4(t)$.

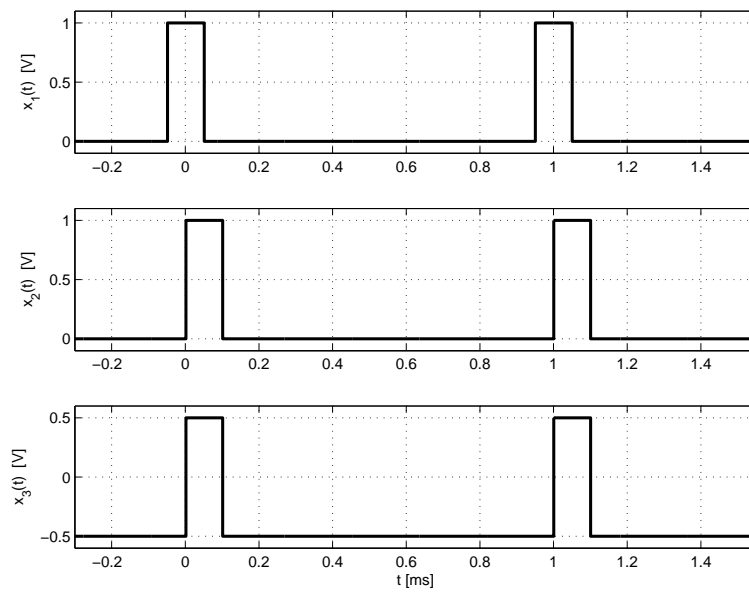


FIGURE 4.28.: Ex SF 12a

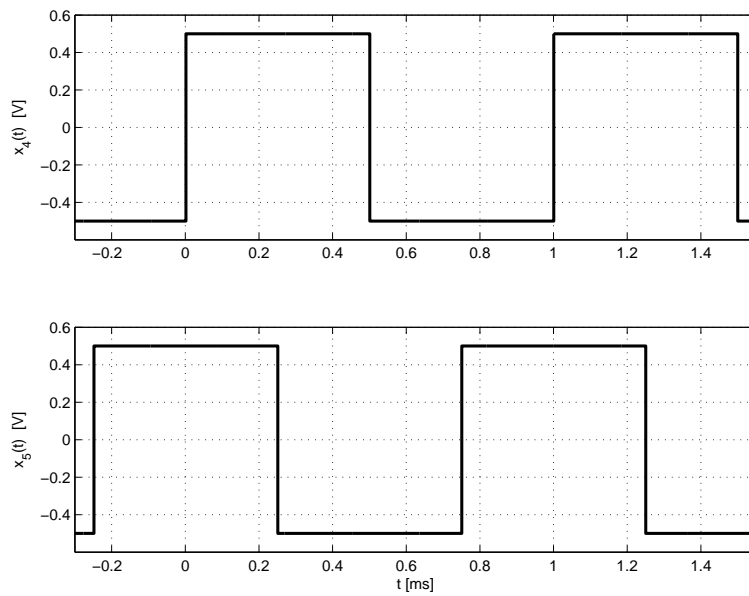


FIGURE 4.29.: Ex SF 12b

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

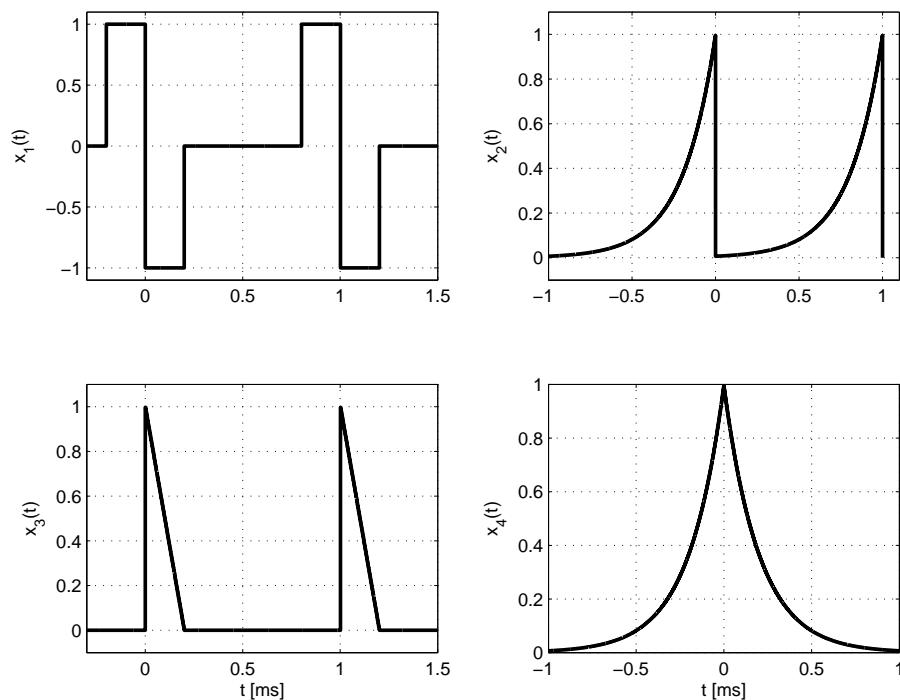


FIGURE 4.30.: Ex SF 14

SF 15 Considérant une SIR centrée de période $T = 100 [\mu s]$, de largeur $\Delta t = 20 [\mu s]$ et d'amplitude $A = 10 [V]$,

1. calculez le pourcentage de puissance comprise dans le premier lobe du sinus cardinal ;
2. admettant que cette SIR est appliquée à un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H(jf) = \frac{1}{1 + jf/f_c}, \quad f_c = 10 [kHz]$$

que valent l'amplitude et la phase des composantes 10 kHz, 40 kHz et 150 kHz ?

SF 16 Un filtre passe-bas RC réalisé avec $R = 1 [k\Omega]$ et $C = 0.1 [\mu F]$ est attaqué par un signal carré $u_1(t)$ de période $T = 1 [ms]$ et d'amplitude comprise entre 0 et 20 V :

1. esquissez le signal de sortie $u_2(t)$ et le courant $i(t)$;
2. pour chacun des 3 signaux $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i(t)$, calculez leurs valeurs DC, efficace totale et efficace AC.

SF 17 Soit un filtre RC passe-bas dont la constante de temps est mal connue. On lui applique une SIR $x(t)$ d'amplitude $A = 10 [V]$, de période $T = 20 [ms]$ et de largeur $\Delta t = 1 [ms]$.

1. que valent les composantes continues des signaux d'entrée et de sortie ?

2. quelle est la fonction de transfert $H(j\omega)$ du circuit ;
3. que valent les spectres bilatéraux $X(jk)$ et $Y(jk)$?
4. admettant que la constante de temps est de l'ordre de 2 ms, esquissez les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$; estimez la valeur maximum de $y(t)$;
5. pour la fréquence $f = 5 f_0$, l'analyseur spectral du signal de sortie fournit le coefficient complexe $Y(j5) = 0.0659 - j 0.154$; calculez l'amplitude et l'argument de la fonction de transfert pour cette fréquence ;
(Rép. : $|H| = 0.37$, $\angle H = -68^\circ$)
6. que valent la constante de temps et la fréquence de coupure du filtre ?
(Rép. : $\tau = 1.6 [ms]$, $f_c = 100 [Hz]$)

SF 18 Pour identifier un système linéaire possédant une résonance, on injecte dans celui-ci une SIR $x(t)$ de période T . La sortie sera donc périodique et son spectre $Y(jk)$ sera constitué de raies distantes de $1/T$. Afin d'obtenir une image spectrale représentative du système $H(j\omega)$, il faut que les raies spectrales soient en nombre suffisant et que le premier lobe de la SIR couvre le domaine de fréquences désiré ($\simeq 10 f_{res}$).

On demande de déterminer les paramètres T et Δt d'une SIR permettant de mesurer la réponse harmonique d'un circuit LC-R dont on connaît approximativement les valeurs $L \simeq 1 mH$, $C \simeq 0.1 \mu F$, $R \simeq 20 \Omega$.

Pour ce faire :

1. esquissez $H(f)$ dans un diagramme linéaire,
2. précisez le nombre de raies spectrales BF et HF que vous estimez nécessaires ;
3. estimez la distance inter-spectrale nécessaire pour observer le pic de résonance ;
4. calculez T et Δt ; adoptez des valeurs entières ;
5. si l'amplitude des impulsions est de 10 V, quelle est l'amplitude de la raie spectrale située près de la résonance f_{res} ? près de $5 f_{res}$?
6. pour ces mêmes fréquences, quelles sont les amplitudes des raies mesurées à la sortie du filtre LC-R ?

SF 19 Un circuit RC de résistance $R = 1 k\Omega$ et de capacité $C = 1 \mu F$ est attaqué par une SIR $u_1(t)$ d'amplitude $E = 10 V$, de largeur $\Delta t = 0.2 ms$ et de période $T = 1 ms$:

1. quelles sont les valeurs moyennes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. que vaut la constante de temps du circuit ?
3. esquissez $u_2(t)$;
4. calculez $Z(j\omega)$ et $I(jk f_0)$;
5. quelle est la puissance dissipée dans la résistance ?

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

SF 20 Un circuit redresseur double alternance suivi d'un filtre RC (R et C en parallèle avec le pont redresseur) est utilisé pour réaliser une conversion AC-DC. Tenant compte des hypothèses simplificatrices suivantes

- le courant $i(t)$ est considéré comme une suite d'impulsions rectangulaires de largeur Δt beaucoup plus petite que la période $T = 10$ ms ;
- la réactance du condensateur est négligeable par rapport à la résistance de charge R.

dessinez le schéma du circuit puis :

1. calculez les coefficients de Fourier $U(jk)$ de la tension de sortie $u(t)$;
2. calculez la puissance de chaque harmonique ;
3. calculez une borne supérieure pour la puissance d'ondulation, sachant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. calculez le taux d'ondulation maximum ;
5. si l'on veut un taux d'ondulation inférieur à 0.1, quelle capacité faut-il choisir lorsque la résistance R vaut 100Ω ?
6. estimez l'amplitude du générateur $u_1(t)$ pour que $U_{dc} \simeq 15 V$.

SF 21 Un circuit non linéaire de type parabolique est modélisé par la caractéristique de transfert suivante :

$$u_2(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_1^2(t)$$

Sachant qu'on lui applique une tension sinusoïdale $u_1(t) = A \sin(\omega t)$:

1. déterminez les composantes spectrales que l'on obtient à la sortie ;
2. quelle est la puissance normalisée P_2 du signal de sortie ?
3. que vaut-elle par rapport à celle du signal d'entrée P_1 ?
4. faites l'A.N. avec $A = 10 V$, $\omega = 2\pi 100 \text{ rad/s}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.21/V$
5. esquissez $u_2(t)$; quel est son taux de distorsion harmonique ?

SF 22 Considérant les deux signaux ci-dessous :

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{20}{7}t\right)$$

précisez si ces signaux sont périodiques ou non. Pour cela, il vous faut trouver :

1. les fréquences constitutives de chaque signal,
2. les rapports existant entre ces fréquences,
3. la fréquence fondamentale si elle existe,
4. les harmoniques présents.

SF 23 : Les deux signaux de la figure Ex SF23 caractérisés par

$$A_1 = 2V, \quad \Delta t = 0.2ms, \quad T = 1ms$$

$$A_2 = 5V, \quad \tau = 0.1ms, \quad T = 1ms$$

passent au travers d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 4.5kHz$. Après avoir rappelé ce qu'est la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas **idéal**,

1. calculez les puissances P_{x1} , P_{x2} de chacun des signaux d'entrée ;
2. calculez les puissances P_{y1} , P_{y2} de chacun des signaux de sortie.

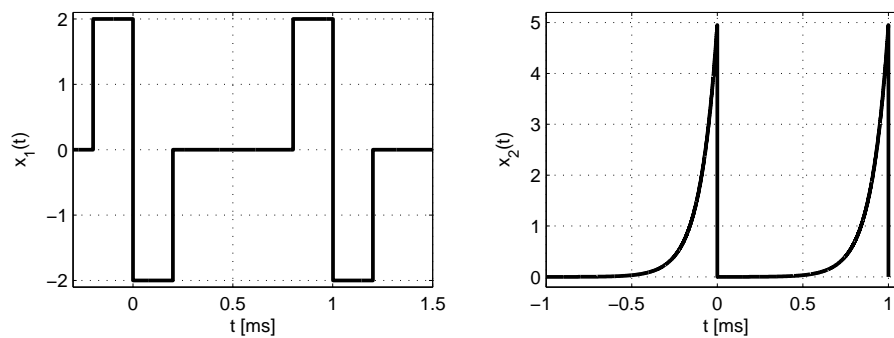


FIGURE 4.31.: Ex SF 23

SF 24 A cause de son taux de variation limité (slew-rate), un amplificateur opérationnel transforme un sinus en un signal triangulaire symétrique d'amplitude A . Calculez le taux de distorsion de cette déformation.

SF 25 Un signal sinusoïdal d'amplitude 10V et de fréquence 1 kHz est appliqué à un filtre RC passe-bas de fréquence de coupure 2 kHz. Calculez le TDH du signal de sortie.

SF 26 On applique un signal sinusoïdal d'amplitude 0.1V et de fréquence 10 kHz à un amplificateur inverseur de gain 100. Visuellement, le signal de sortie semble parfaitement sinusoïdal. Cependant, une analyse spectrale a fourni les composantes A_k du tableau ci-dessous. Calculez la valeur efficace du signal de sortie et son TDH.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_k [V]	81e-3	6.46	87e-6	0.105	55e-6	2.66e-3	58e-6	213e-6	57e-6	48e-6

SF 27 La figure Ex SF27 présente une sinusoïde $x(t)$ d'amplitude 10V et une sinusoïde $y(t)$ saturée à $\pm 9V$ avec les spectres correspondants. Sachant que les composantes spectrales unilatérales fournies par l'analyseur spectral sont les suivantes :

4. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

k	1	3	5	7	9
$A_x(k)$ [dB]	0.0				
$A_y(k)$ [dB]	-0.33	-30.0	-33.2	-33.8	-50.7
$A_x(k)$ [V]					
$A_y(k)$ [V]					

1. calculez les amplitudes spectrales unilatérales et complétez le tableau ;
2. calculez les valeurs efficaces des deux signaux ;
3. calculez le TDH de $y(t)$;
4. expliquez pourquoi les harmoniques pairs du signal $y(t)$ sont nuls.

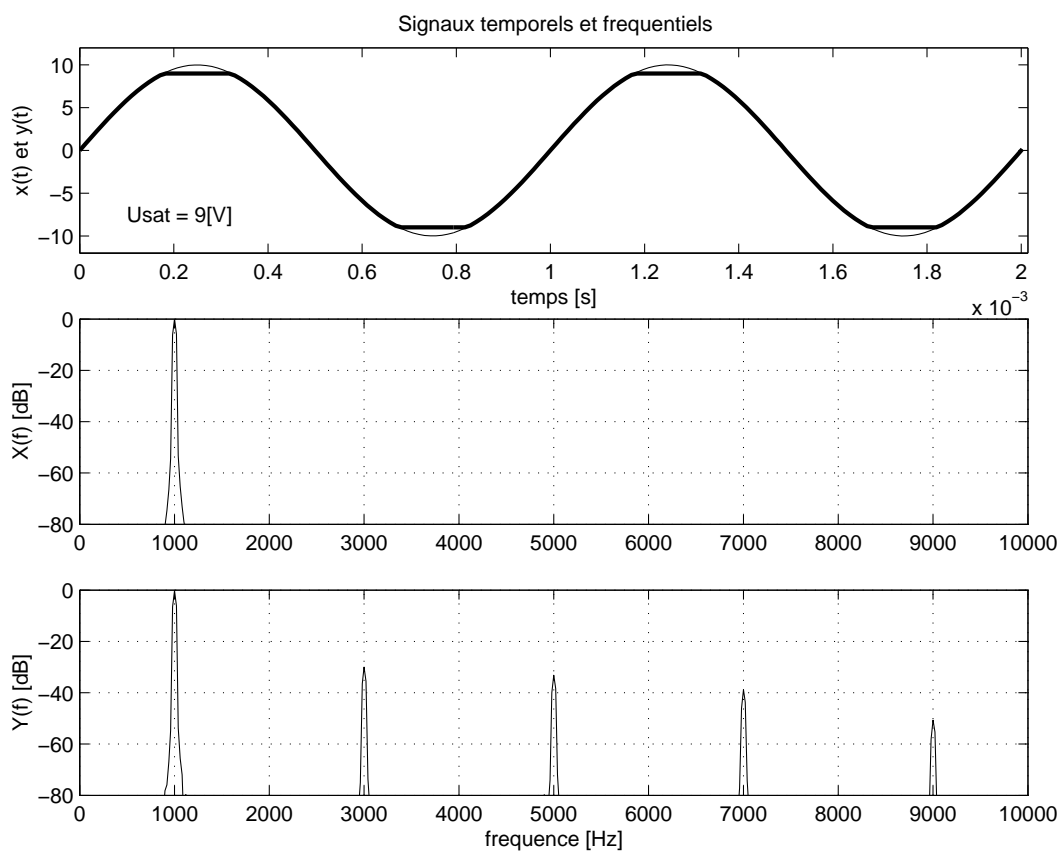


FIGURE 4.32.: Ex SF 27

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983

5. Analyse des signaux non périodiques

5.1. Transformation de Fourier

5.1.1. Passage de la série à la transformation de Fourier

Le passage d'un signal périodique à un signal apériodique peut se faire en considérant que la période T devient de plus en plus grande pour tendre vers l'infini. On constate alors que les raies spectrales distantes de $1/T$ se rapprochent pour se transformer en spectre continu. Mais en même temps, l'amplitude de celui-ci diminue pour tendre vers zéro. Une illustration en est donnée (figure 5.1) pour une suite d'impulsions rectangulaires dont la période augmente alors que la largeur reste constante. Comme la surface de l'impulsion reste constante alors que la période augmente, l'amplitude X_{dc} du sinus cardinal ne cesse de décroître pour tendre vers zéro.

Partant d'un signal périodique décrit par

$$x_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t)$$

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt, \quad k \in Z$$

on évite l'annulation de $X(jk)$ lorsque $T \rightarrow \infty$ en considérant la fonction

$$T \cdot X(jk) = \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

À partir des correspondances suivantes

$$T \rightarrow \infty, \quad f_0 \rightarrow df, \quad k f_0 \rightarrow f, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf)$$

on voit que la série de Fourier discrète devient une fonction continue. Cette fonction $X(jf)$ est une **densité spectrale d'amplitude** qui, par définition, est la transformée de Fourier du signal apériodique $x(t)$:

$$X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt, \quad f \in R$$

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

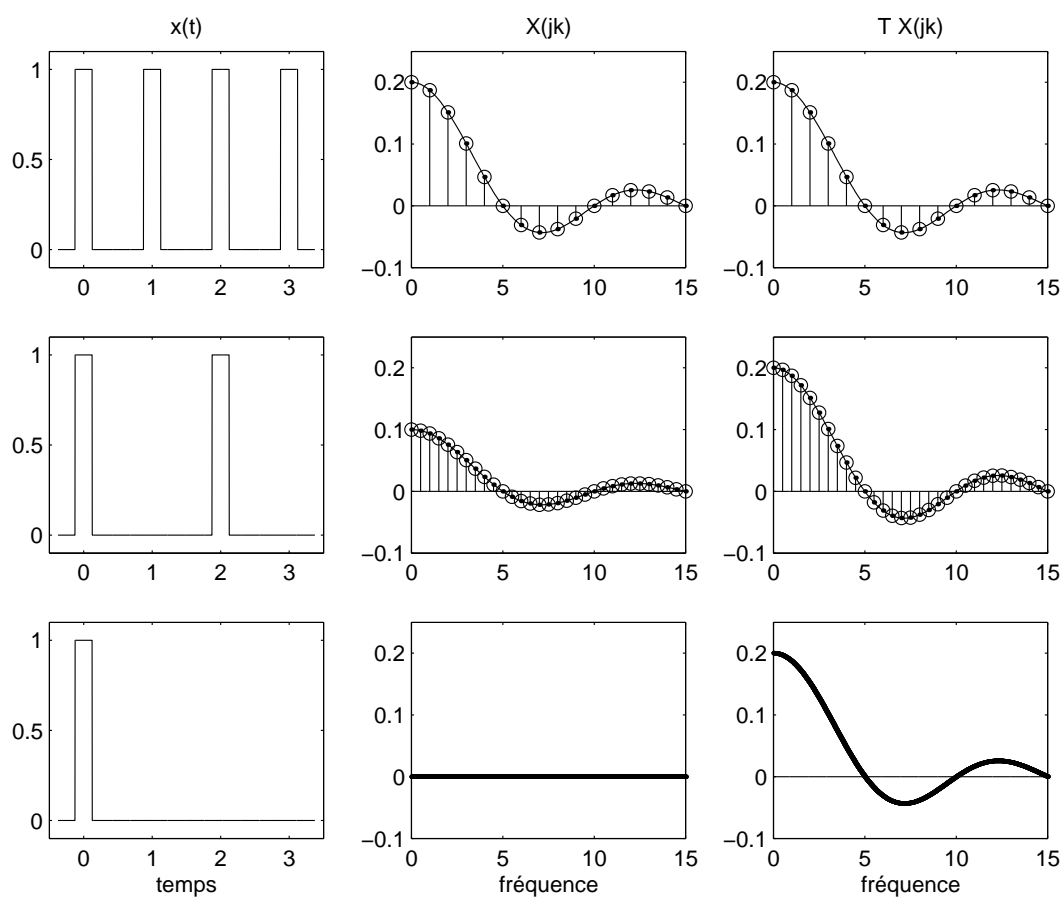


FIGURE 5.1.: Passage de la série de Fourier à la densité spectrale

La transformée inverse s'obtient en considérant la fonction périodique pour laquelle la période T tend vers l'infini ; on a alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) f_0 \end{aligned}$$

Lorsqu'on passe à la limite

$$T \rightarrow \infty, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf), \quad f_0 \rightarrow df, \quad kf_0 \rightarrow f$$

on obtient la définition de la transformation inverse de Fourier

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df$$

Il est important de noter que les unités de $X(jf)$ ne sont pas les mêmes que celles du signal original $x(t)$. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique, sa transformée $X(jf)$ s'exprime en [V/Hz].

5.1.2. TF directe et inverse

Les deux relations que nous venons de démontrer constituent les transformations de Fourier directe et inverse. On constate que les descriptions temporelle et spectrale sont parfaitement symétriques :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \quad (5.1)$$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (5.2)$$

En notation abrégée, on décrira ces deux transformations par les opérateurs $TF\{\}$ et $TFI\{\}$. La correspondance réciproque s'écrit alors :

$$x(t) = TFI\{X(jf)\} \longleftrightarrow TF\{x(t)\} = X(jf)$$

Si la fonction $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude $X(jf)$ est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(jf) = X_r(f) + jX_i(f) \quad (5.3)$$

Les densités spectrales du module et de la phase valent alors :

$$|X(jf)| \equiv X(f) = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \quad (5.4)$$

$$\angle X(jf) \equiv \alpha(f) = \arctan \frac{X_i(f)}{X_r(f)} \quad (5.5)$$

5.1.3. Énergie d'un signal non permanent

Dans le cas des signaux non permanents, on prendra garde à parler de leur énergie et non pas de leur puissance, car celle-ci est nulle si l'on considère une durée infiniment longue.

De manière similaire à ce que l'on a vu pour les signaux périodiques, on peut calculer l'énergie d'un signal apériodique aussi bien dans le domaine temporel que dans domaine fréquentiel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (5.6)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (5.7)$$

L'expression de l'énergie d'un signal $x(t)$ dans le domaine des fréquences entraîne la définition de la **densité spectrale d'énergie** $S_x(f)$:

$$S_x(f) \equiv |X(jf)|^2 = X(jf) \cdot X(jf)^* \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (5.8)$$

On notera que ses unités s'expriment en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$ lorsque le signal est une tension.

5.1.4. Propriétés de la transformation de Fourier

Parmi le grand nombre de propriétés associées à la transformation de Fourier, on retiendra particulièrement celles qui ont le plus d'intérêt en traitement du signal. Elles sont présentées dans le tableau 5.1.

5.2. Exemples de spectres continus

Pour illustrer l'utilisation de la transformée de Fourier, calculons les densités spectrales de trois signaux particuliers.

5.2.1. Spectre d'une impulsion rectangulaire

Considérons une impulsion $x(t)$ de largeur Δt et d'amplitude A centrée en $t = 0$ (figure 5.2). Par définition de la transformation de Fourier, on a :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

En tenant compte de la définition de l'impulsion rectangulaire centrée :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (5.9)$$

a) linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(jf) + bY(jf)$
b) décalage	$x(t + t_d)$	$X(jf) \exp(+j2\pi f t_d)$
c) amortissement	$x(t) \exp(-at)$, $x(t)$ causal	$X(j2\pi f + a)$
d) modulation	$x(t) \exp(+j2\pi f_0 t)$	$X(j(f - f_0))$
e) dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(jf)$
f) intégration	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(jf) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
g) convolution	$h(t) \otimes x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(jf) \cdot X(jf)$ $H(jf) \otimes X(jf)$
h) énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) ^2 df$
j) valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
k) rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(jf) = X(-jf) = X^*(jf)$
l) fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(jf) \in \Re$
m) fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(jf) \in \Im$
n) symétrie	$y(t) = X(t)$	$Y(jf) = x(-jf)$

il vient :

$$\begin{aligned}
 X(jf) &= \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} A \exp(-j2\pi f t) dt \\
 &= \frac{-A}{j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \\
 &= \frac{-A}{j2\pi f} \left[\exp(-j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) \right] \\
 &= \frac{A}{\pi f} \frac{\exp(+j\pi f \Delta t) - \exp(-j\pi f \Delta t)}{2j}
 \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Euler :

$$\sin u = \frac{\exp(+ju) - \exp(-ju)}{2j}$$

on obtient finalement :

$$X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t) \in \mathfrak{R} \quad (5.10)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la densité spectrale d'amplitude d'une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$ est bien décrite par un sinus cardinal. De plus, comme l'impulsion rectangulaire $x(t)$ est paire, sa densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction réelle. Enfin, on remarquera (figure 5.2) que le spectre passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $1/\Delta t$.

Le spectre de cette impulsion illustre deux points importants concernant les signaux de durée limitée (figure 5.3) :

Un signal de **courte durée** possède un spectre **large bande**.

Un spectre **étroit** correspond à un signal de **longue durée**.

5.2.2. Spectres d'un sinus amorti

Étudions, comme deuxième exemple, la transformée de Fourier d'une sinusoïde de fréquence f_p décroissant exponentiellement au cours du temps (figure 5.4). Son équation s'écrit :

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t), & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

5.2. Exemples de spectres continus

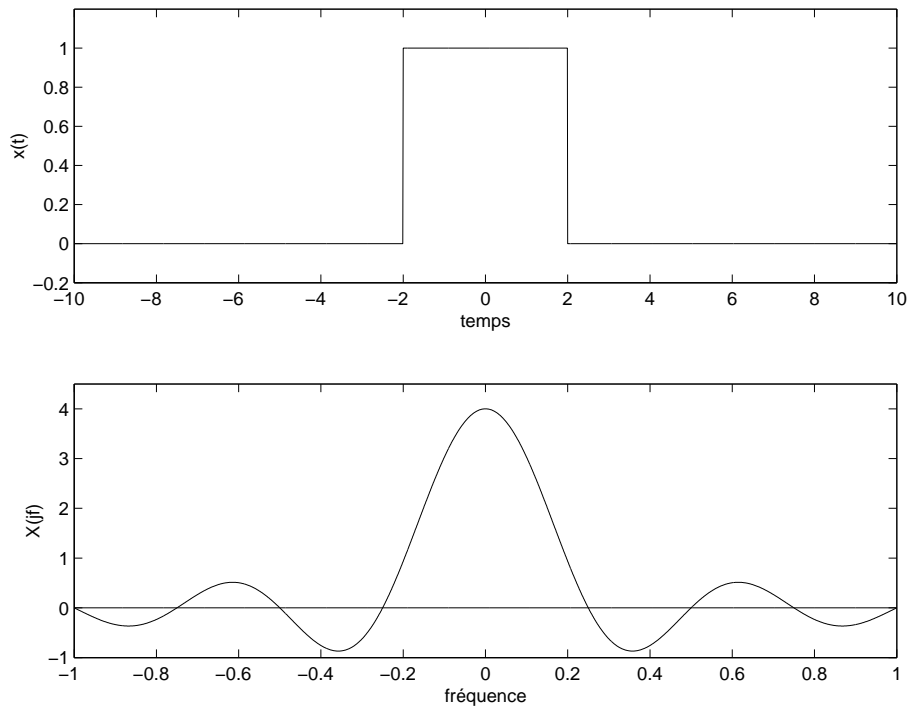


FIGURE 5.2.: Impulsion rectangulaire et sa densité spectrale d'amplitude

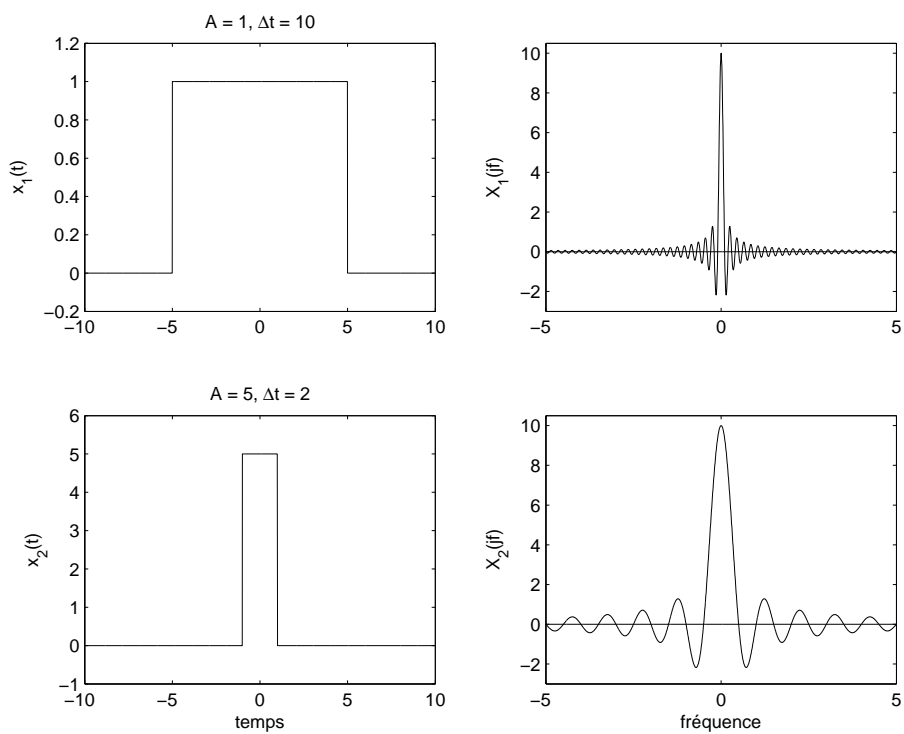


FIGURE 5.3.: Le contenu spectral d'une impulsion dépend fortement de sa durée

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Partant de la définition de la transformée de Fourier, on calcule sa densité spectrale d'amplitude :

$$\begin{aligned} Y(jf) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \frac{\exp(+j2\pi f_p t) - \exp(-j2\pi f_p t)}{2j} \exp(-j2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles ; elle est très simple à calculer. Après réduction des deux primitives à un même dénominateur, on obtient :

$$Y(jf) = A \frac{2\pi f_p}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_p)^2} \in \mathcal{C} \quad (5.12)$$

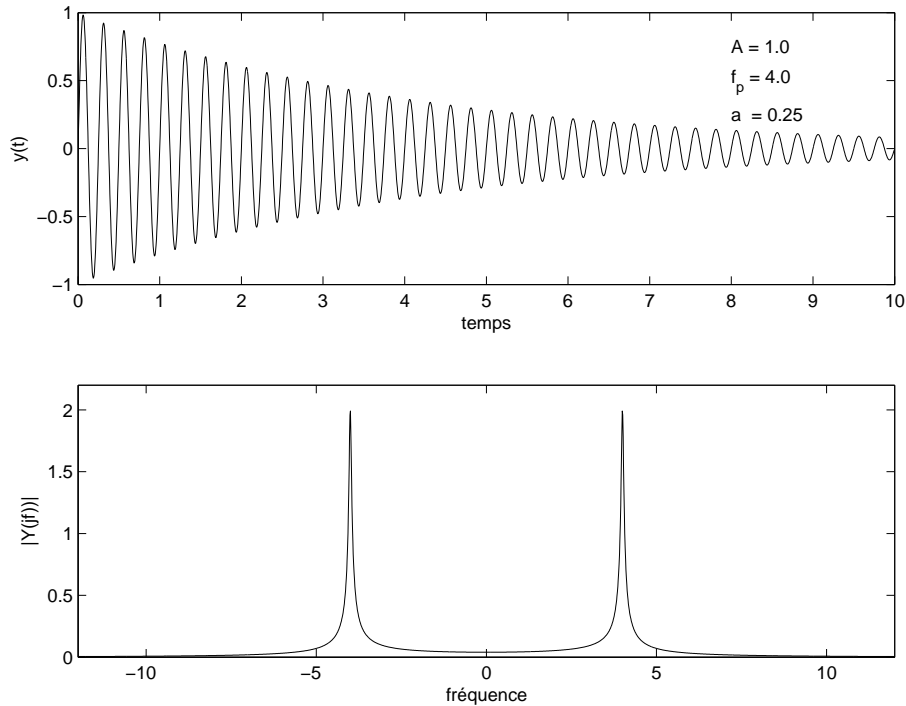


FIGURE 5.4.: Sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude

On remarquera que la densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction complexe car la sinusoïde décroissante $y(t)$ ne possède pas de symétrie particulière. La figure 5.4 présente le sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude.

On peut également noter les deux valeurs particulières suivantes

$$\begin{aligned} f = 0 : \quad Y(0) &= A \frac{2\pi f_p}{a^2 + (2\pi f_p)^2} \simeq \frac{A}{2\pi f_p} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p \\ f = f_p : \quad Y(jf_p) &= \frac{A}{a} \frac{2\pi f_p}{a + j4\pi f_p} \simeq \frac{A}{j2a} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p \end{aligned}$$

5.2.3. Spectres de deux impulsions rectangulaires

Considérons un signal constitué de deux impulsions d'amplitude A placées symétriquement en $\pm t_0/2$ (figure 5.5). Ce signal possède un spectre qui se calcule facilement à partir de celui d'une impulsion centrée en $t = 0$ et à l'aide du théorème du décalage.

Comme le signal $z(t)$ est la somme de 2 impulsions décalées de $\pm t_0/2$,

$$z(t) = x(t + t_0/2) + x(t - t_0/2) \quad (5.13)$$

on a :

$$Z(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \left[\exp(+j2\pi f \frac{t_0}{2}) + \exp(-j2\pi f \frac{t_0}{2}) \right]$$

donc

$$Z(jf) = 2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \quad (5.14)$$

De plus, par rapport à ce qui va suivre, il est intéressant de considérer également la densité spectrale d'énergie :

$$S_z(f) \equiv |Z(jf)|^2 = \left[2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \right]^2 \quad (5.15)$$

Les densités spectrales d'amplitude et d'énergie sont représentées à la figure 5.5.

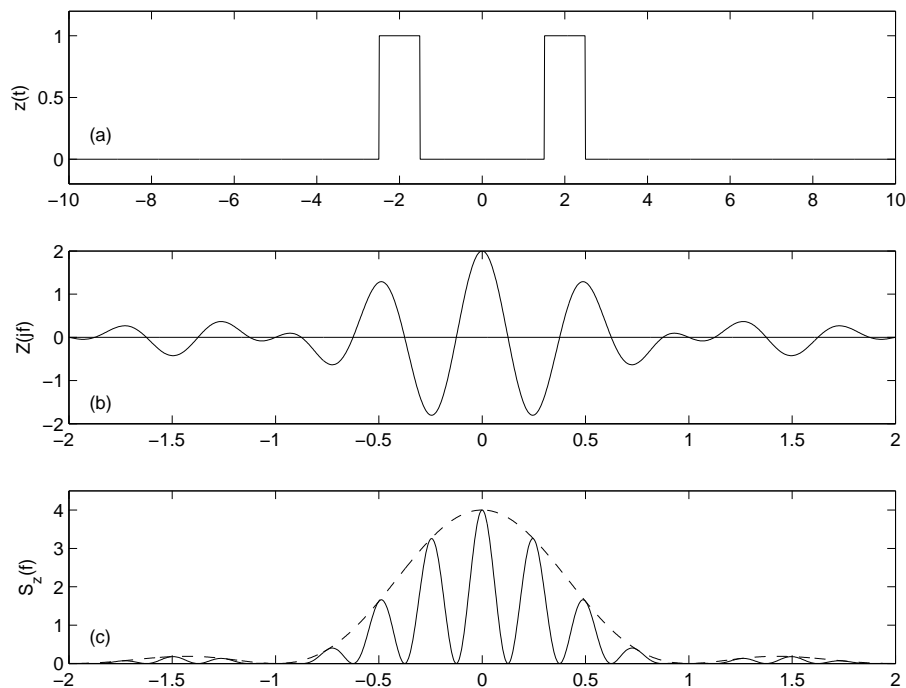


FIGURE 5.5.: Deux impulsions rectangulaires symétriques (a) avec ses densités spectrales d'amplitude (b) et d'énergie (c)

5.3. Calcul de quelques transformées

Afin de mieux saisir les implications de la TF, calculons les transformées de quelques signaux importants en traitement du signal.

5.3.1. Exponentielle décroissante

Dans ce cas, $x(t)$ vaut

$$x(t) = \exp(-at) \epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

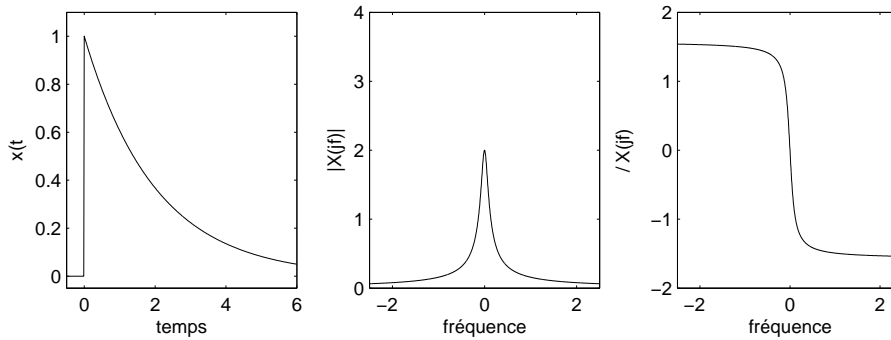


FIGURE 5.6.: Exponentielle décroissante et ses spectres (module et phase)

L'application de la définition de la TF conduit à :

$$X(jf) = \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi f t) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (5.17)$$

Pour illustrer le théorème de l'énergie, calculons l'énergie de ce signal dans le domaine temporel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-2at) dt = \frac{1}{2a}$$

et dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \arctan \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

On retrouve bien entendu le même résultat dans les deux cas.

5.3.2. Exponentielle décroissante symétrique

Ce signal est décrit par :

$$x(t) = \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (5.18)$$

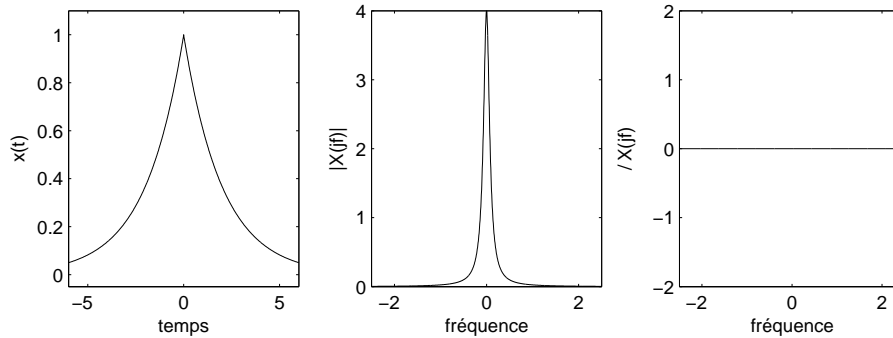


FIGURE 5.7.: Exponentielle symétrique et ses spectres (module et phase)

De manière plus explicite, on peut encore l'écrire sous la forme

$$x(t) = \exp(+at) \epsilon(-t) + \exp(-at) \epsilon(t) \quad (5.19)$$

On a alors :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^0 \exp(+at) \exp(-j2\pi ft) dt + \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi ft) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1 - 0}{a - j2\pi f} + \frac{0 - 1}{-(a + j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (5.20)$$

On remarquera que $x(t)$ étant pair, sa transformée est réelle.

5.3.3. Signal constant unité

Le signal constant unité vaut simplement 1 quelque soit $t \in (-\infty, +\infty)$. Au sens des limites, il peut être décrit à partir de l'exponentielle symétrique :

$$x(t) = 1 = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (5.21)$$

Ce passage par la limite est nécessaire car le signal constant n'est pas intégrable en valeur absolue et sa transformée de Fourier ne peut donc pas être calculée à partir de sa définition. Par contre, partant de l'exponentielle symétrique, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ \infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Ce résultat coïncide avec la définition d'une impulsion de Dirac. La TF d'un signal unité est donc une impulsion de Dirac située en $f = 0$:

$$X(jf) = \delta(f) \quad (5.22)$$

5.3.4. Saut unité

Le calcul de la TF d'un saut unité $\epsilon(t)$ (figure 5.8) nécessite également quelques précautions, car ce signal n'est pas intégrable en valeur absolue. Mais, constatant que l'on a :

$$1 = \epsilon(t) + \epsilon(-t)$$

et désignant la TF de $\epsilon(t)$ par $E(jf)$, il vient :

$$TF\{1\} = \delta(f) = E(jf) + E^*(jf) = 2 E_r(jf)$$

De ce résultat, on en déduit que la partie réelle $E_r(jf)$ vaut $\delta(f)/2$.

Il reste encore à trouver la partie imaginaire de $E(jf)$. Pour ce faire, on peut remarquer que le saut unité peut également s'écrire sous la forme :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

dont la transformée (équation 5.17) est purement imaginaire et vaut $1/(j2\pi f)$. On obtient donc finalement :

$$E(jf) = E_r(jf) + j E_i(jf) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (5.24)$$

5.3.5. Phaseur

Pour calculer sa TF, considérons le fait qu'un phaseur de fréquence f_0 peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \exp(+j2\pi f_0 t) = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|) \exp(+j2\pi f_0 t) \quad (5.25)$$

Utilisant la TF de l'exponentielle symétrique (équation 5.20) et la propriété de modulation, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi(f - f_0))^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq f_0 \\ \infty & \text{si } f = f_0 \end{cases}$$

La TF d'un phaseur de fréquence f_0 est donc une impulsion de Dirac située en $f = f_0$:

$$X(jf) = \delta(f - f_0) \quad (5.26)$$

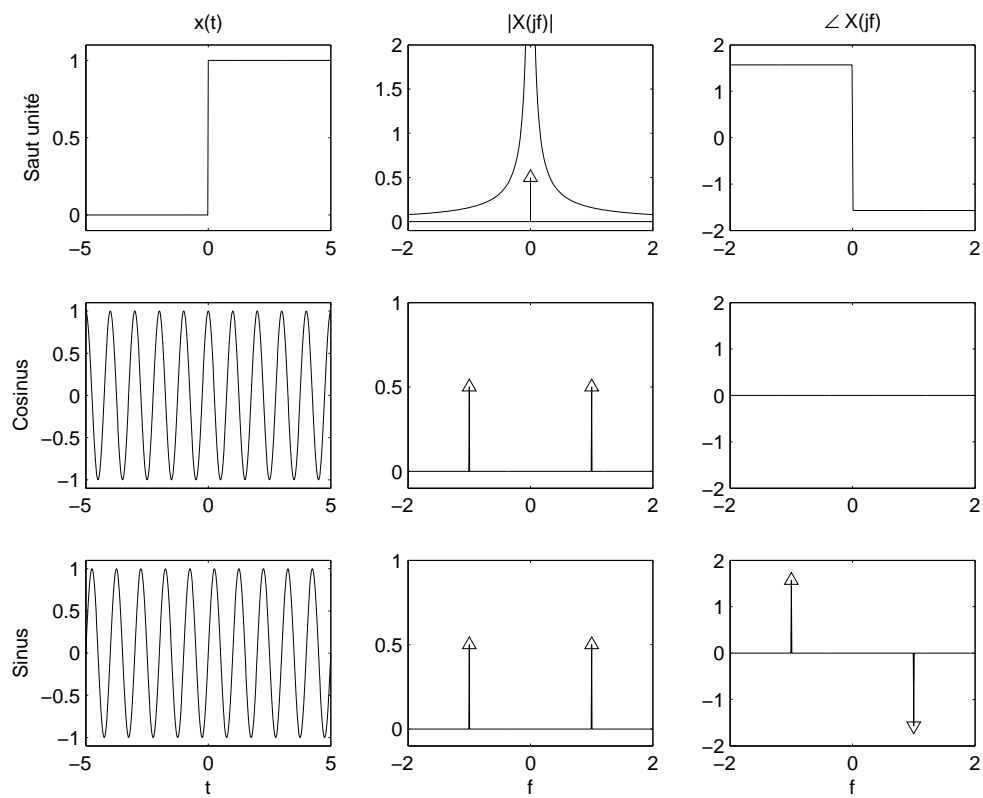


FIGURE 5.8.: Signaux et densités spectrales d'un saut unité, d'un cosinus et d'un sinus

5.3.6. Signal sinusoïdal

Comme un signal sinusoïdal est constitué de 2 phaseurs conjugués complexes (loi d'Euler), sa TF comportera 2 impulsions de Dirac située en $\pm f_0$. Plus précisément, on aura :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \quad (5.27)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} [e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} \quad (5.28)$$

La première TF est réelle, car la cosinusoïde est paire, alors que la deuxième TF est imaginaire car la sinussoïde est impaire. On notera que les modules des densités spectrales sont les mêmes et que seuls diffèrent leurs arguments (figure 5.8).

5.3.7. Impulsion sinusoïdale

Parmi les propriétés des transformations de Laplace et Fourier, nous avons vu qu'à un produit de convolution dans le domaine temporel correspond un produit simple dans le domaine complexe :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (5.29)$$

L'inverse de cette proposition est également vraie et elle est très pratique pour calculer le spectre de signaux modulés en amplitude. Elle s'exprime comme suit. À un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine complexe :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) \quad (5.30)$$

Considérons comme exemple une impulsion sinusoïdale de durée Δt (fig. 5.9c)

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Voyant que ce signal est équivalent à la multiplication d'une sinussoïde permanente (fig. 5.9a) par une impulsion de largeur Δt (fig. 5.9b), on a :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

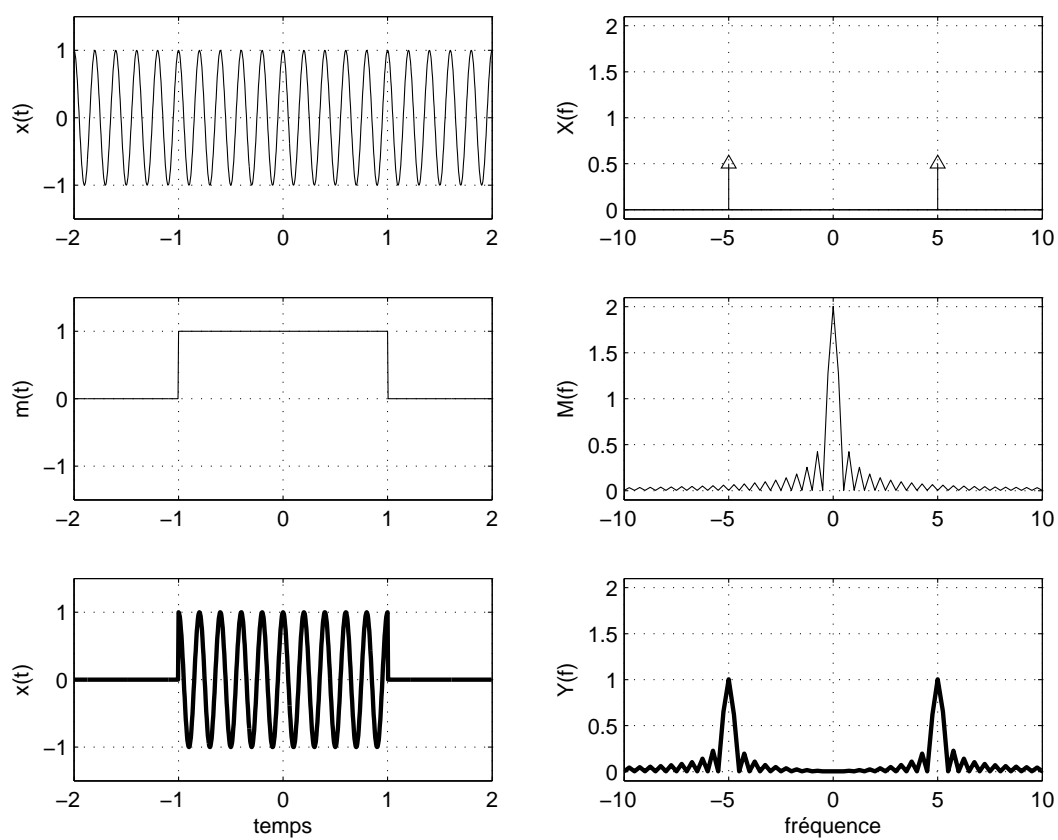


FIGURE 5.9.: Impulsion sinusoïdale et son spectre

Sachant que les spectres des signaux $x(t)$ et $m(t)$ valent respectivement

$$X(jf) = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$M(jf) = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t)$$

et que la convolution entre une fonction et une impulsion de Dirac reproduit la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion, on voit que le spectre de l'impulsion sinusoïdale vaut

$$Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) = \frac{A \Delta t}{2} (\operatorname{sinc}((f + f_0) \Delta t) + \operatorname{sinc}((f - f_0) \Delta t))$$

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion sinusoïdale de durée Δt est constitué de deux sinus cardinaux situés en $+f_0$ et $-f_0$ (figure 5.9c).

5.4. Quelques conclusions

5.4.1. TF des signaux périodiques

Du paragraphe précédent, on retiendra que la transformation de Fourier s'applique également à des signaux périodiques, c'est-à-dire à des signaux de puissance moyenne finie. Dans ce cas, les raies spectrales de la série de Fourier sont remplacées par des impulsions de Dirac.

5.4.2. Relations avec la transformation de Laplace

Les définitions des transformées de Fourier et Laplace montrent une forte similitude. On a en effet

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-s t) dt \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j2\pi f$$

Si on a défini des transformations si proches, mais malgré tout distinctes, c'est que tous les signaux ne sont pas transformables de Fourier et/ou de Laplace. En effet, l'existence de ces transformations entraînent les restrictions suivantes :

- pour la transformation de Fourier, il faut que le signal soit intégrable en valeur absolue et que le nombre de ses discontinuités soit fini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- pour la transformation de Laplace, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-st}| dt < \infty$$

autrement dit, il faut que le signal $x(t)$ pondéré par une exponentielle amortie soit intégrable en valeur absolue.

Des deux points ci-dessus, il découle que les signaux temporaires (à énergie finie) et les signaux permanents périodiques ou non (à puissance finie) possèdent une transformée de Fourier mais pas nécessairement une transformée de Laplace. Ainsi en est-il de l'exponentielle symétrique et, au sens des limites, des signaux périodiques.

Par contre, des signaux démarrant en $t = 0$ tels qu'une rampe $x(t) = a \cdot t \epsilon(t)$, une parabole $x(t) = a \cdot t^2 \epsilon(t)$, ne sont pas transformables de Fourier, alors qu'ils possèdent une transformée de Laplace.

Il existe d'autre part des signaux qui possèdent les deux transformées ; par exemple, les signaux amortis démarrant en $t = 0$. Et d'autres qui n'en possèdent aucune ; par exemple $x(t) = a \cdot t$ pour $-\infty < t < +\infty$.

On trouvera en fin de chapitre une table illustrée des transformées de Fourier tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2].

5.5. Extension de la transformation de Fourier

Le spectre d'énergie des deux impulsions étudiées à la section 5.2.3 montre une grande similitude avec la figure de diffraction de Fraunhofer due à deux fentes étroites (figure 5.10). En réalité, il s'agit bien plus que d'une similitude car on montre en physique que toute figure de diffraction est la transformée de Fourier de l'objet qui en est la cause.

De cette analogie, on déduit que la notion de transformation de Fourier peut être étendue à des espaces à plusieurs dimensions. Cette transformation de Fourier multidimensionnelle est définie de manière similaire à celle que nous avons étudiée jusqu'à présent

$$x(t) \rightarrow X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (5.31)$$

avec f représentant la fréquence des oscillations, c'est-à-dire le nombre de périodes par unité de temps. Cette fréquence est mesurée en [Hz] ou, de manière plus fondamentale, en [1/sec].

Dans le cas particulier d'une image (espace à deux dimensions), on a affaire à une intensité lumineuse i fonction des coordonnées x et y

$$i = i(x, y) \quad (5.32)$$

Sa transformée de Fourier est alors définie comme suit

$$i(x, y) \rightarrow I(jf_x, jf_y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, y) \exp(-j2\pi f_x x) \exp(-j2\pi f_y y) dx dy \quad (5.33)$$

Ici, les fréquences spatiales f_x et f_y représentent le nombre de périodes par unité de longueur mesurées en [1/m]. Une illustration des spectres spatiaux (ou des figures de diffraction) d'ouvertures circulaire et carrée est donnée à la figure 5.11 ; on y

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

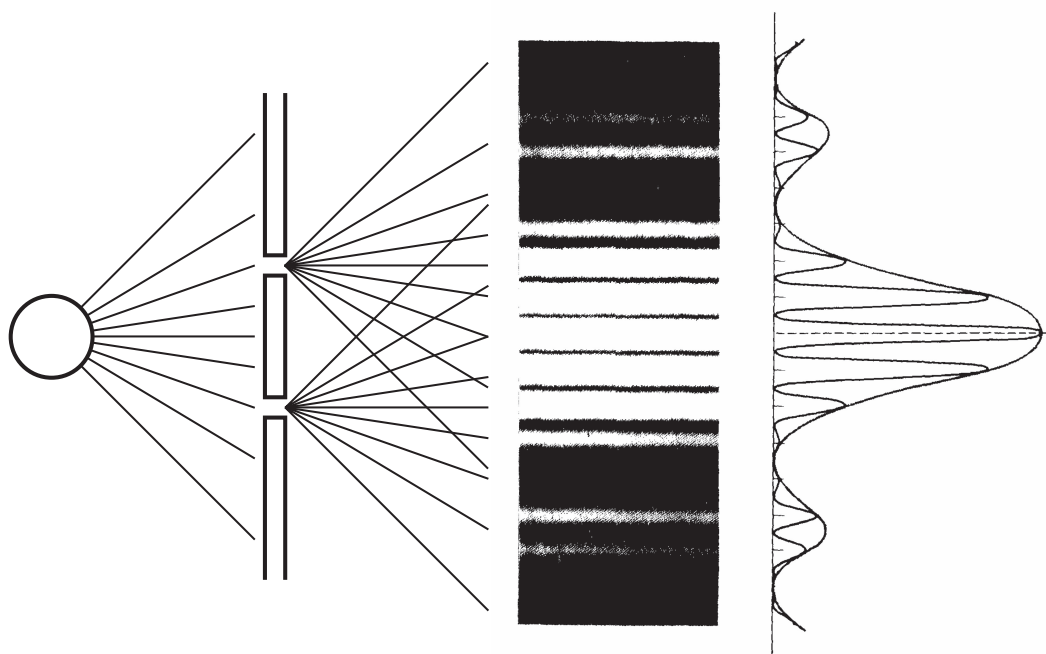
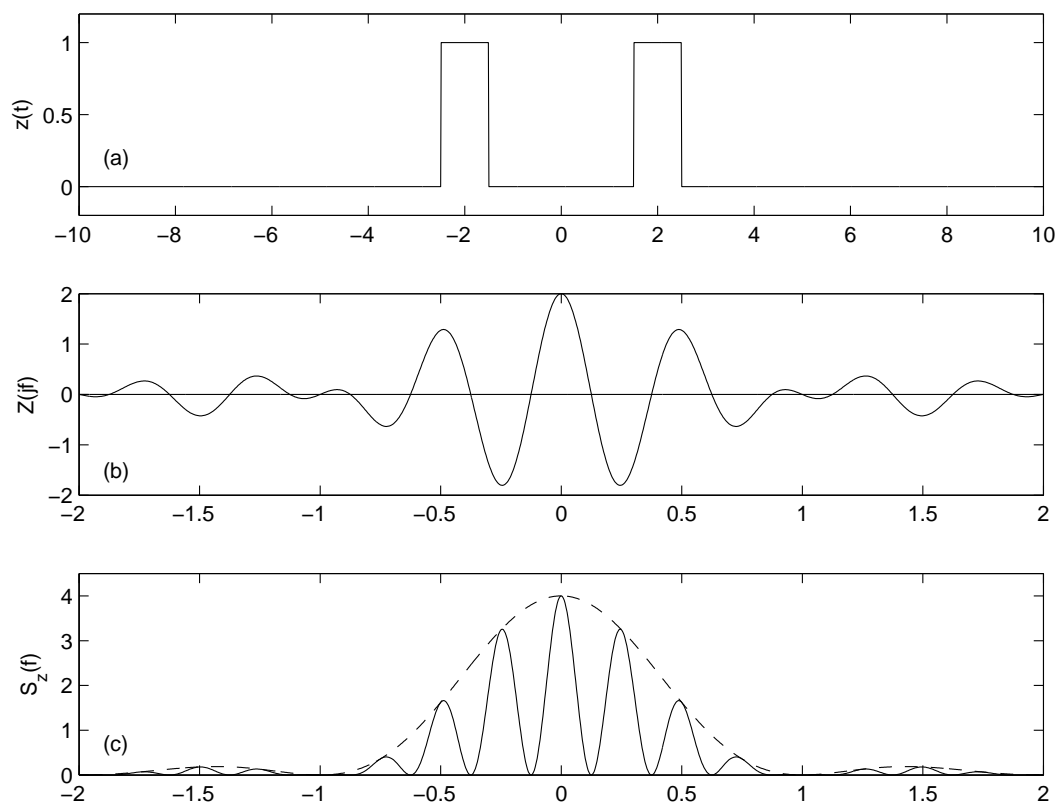


FIGURE 5.10.: a) Deux impulsions rectangulaires et leurs spectres d'amplitudes et d'énergie
 b) Figure de diffraction causée par deux ouvertures étroites [3]

5.5. Extension de la transformation de Fourier

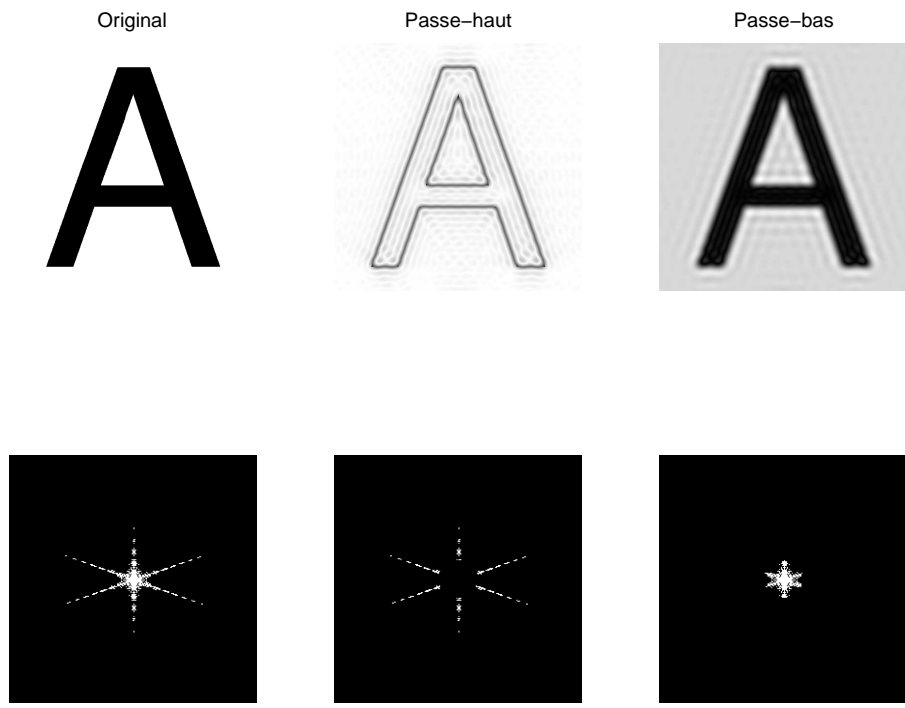
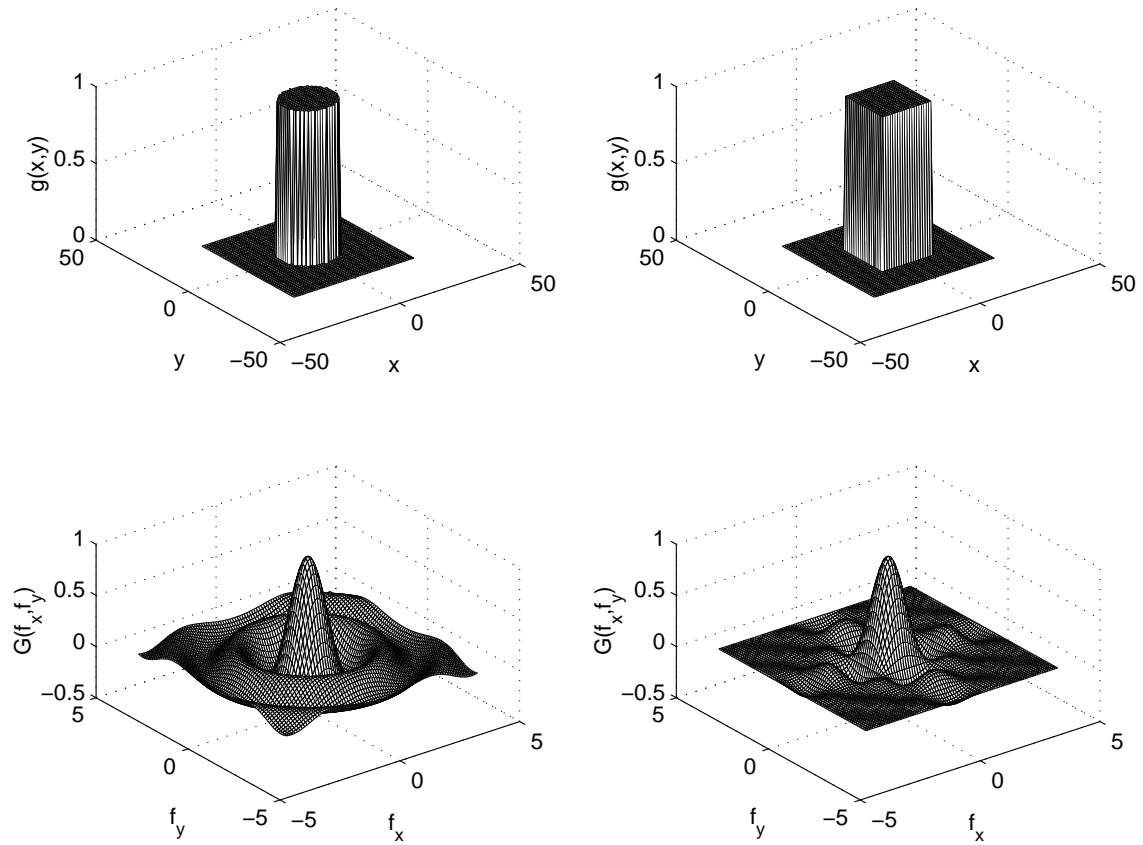


FIGURE 5.11.: a) Transformées de Fourier spatiales d'un rond et d'un carré
 b) Filtrage spatial de la lettre A avec un masque qui ne laisse passer que les hautes ou les basses fréquences

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

reconnait la fonction sinus cardinal distribuée dans l'espace des fréquences spatiales f_x et f_y .

Comme nous venons de le voir, la notion de transformation de Fourier s'applique à des fonctions bidimensionnelles. On imagine donc aisément que les principes de filtrage bien connus en électronique peuvent s'étendre de la même manière à des signaux multidimensionnels. Une illustration en est donnée à la figure 5.11 où l'on voit comment l'application de masques dans le domaine fréquentiel permet d'extraire les bords de l'image (filtrage passe-haut) ou de défocaliser l'image (filtrage passe-bas). On notera qu'un filtrage réalisé avec un masque constitué simplement de 0 ou 1 n'est pas optimum car il entraîne les effets de franges bien visibles sur les images.

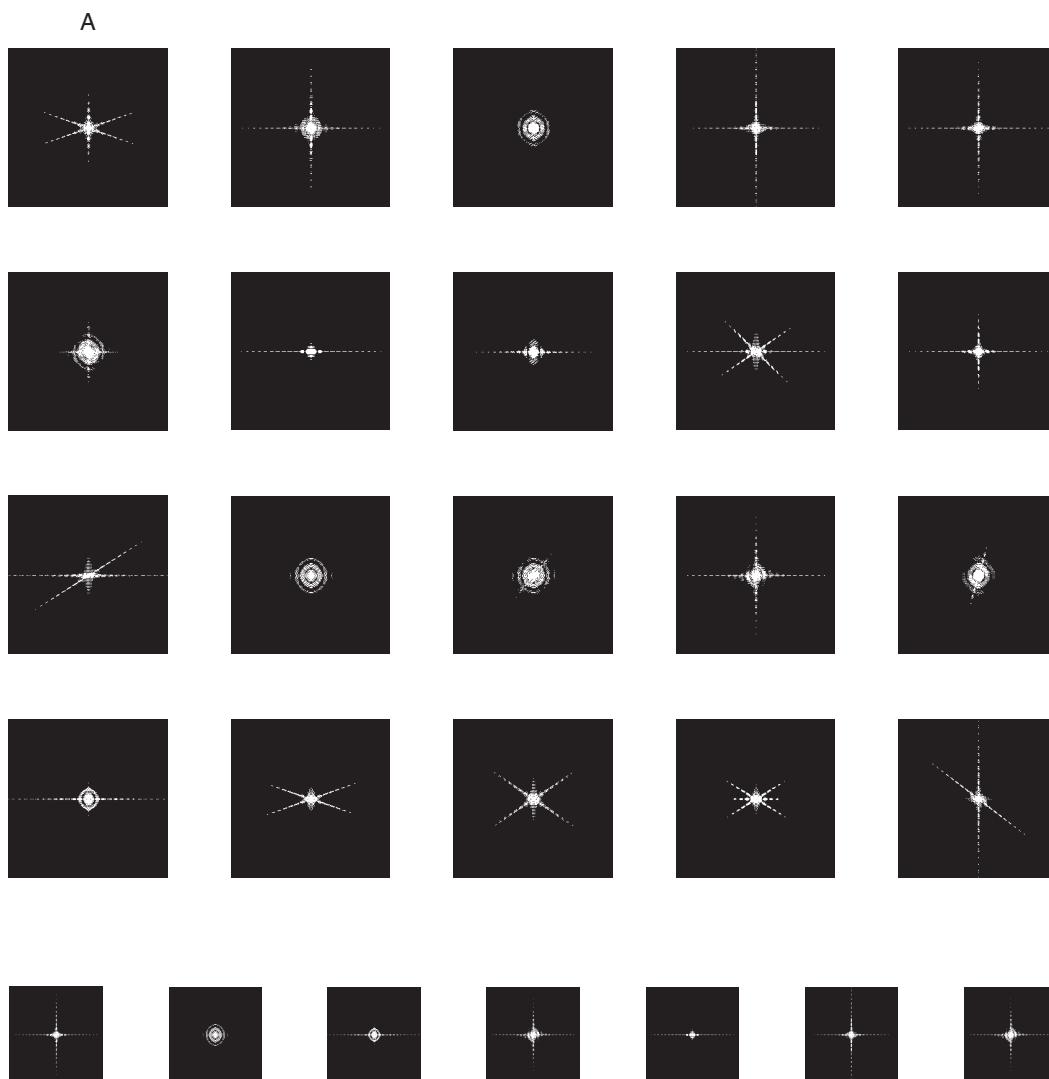


FIGURE 5.12.: Alphabet de Fourier (partiel) avec le mot à découvrir

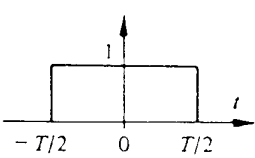
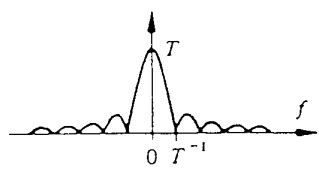
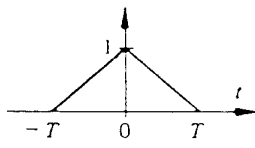
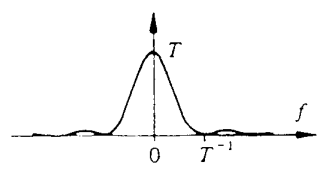
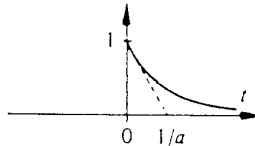
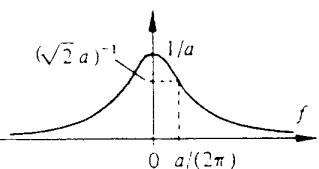
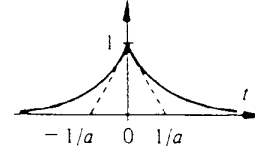
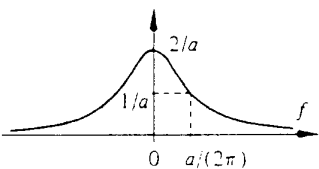
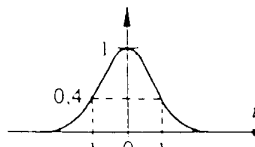
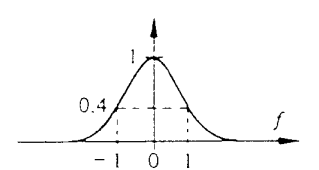
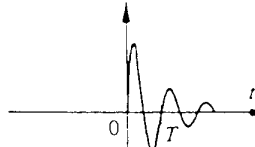
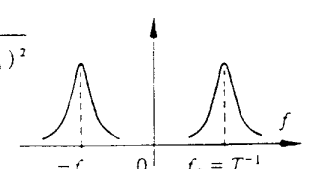
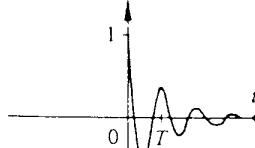
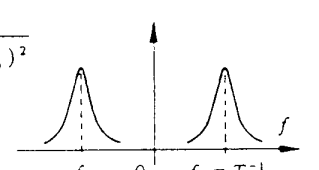
Une expérience amusante consiste à lire un texte dans l'espace de Fourier si, au préalable, on s'est familiarisé avec les spectres bidimensionnels des majuscules de l'alphabet (figure 5.12). Quelques instants d'observation montrent qu'il est possible

5.5. *Extension de la transformation de Fourier*

de reconnaître les lettres de l'alphabet simplement à partir de leur transformée de Fourier spatiale. Dans cette figure, seules vingt images de l'alphabet sont présentées dans l'ordre alphabétique; les lettres manquantes peuvent être retrouvées en essayant de se représenter leur spectre. Après avoir trouvé les lettres manquantes, on peut rechercher le mot écrit avec cet alphabet.

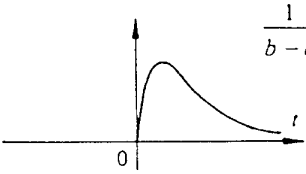
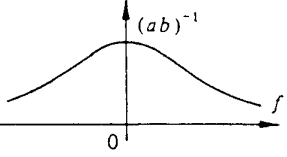
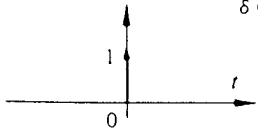
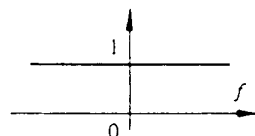
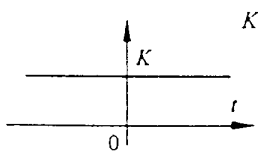
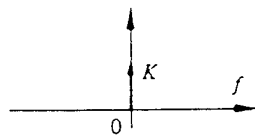

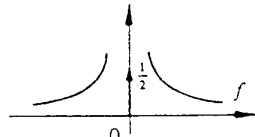
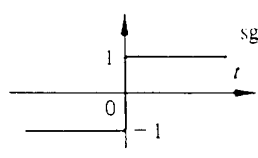
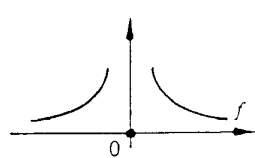
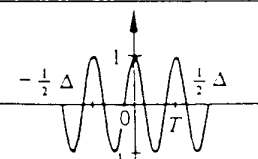
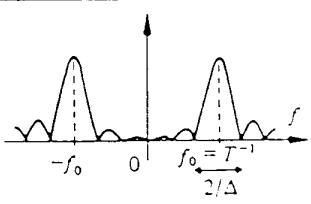
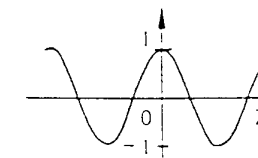
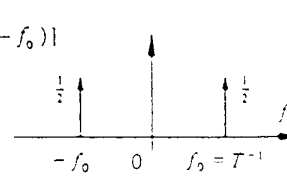
5.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$	$= T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

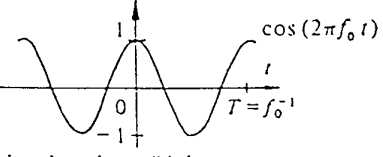
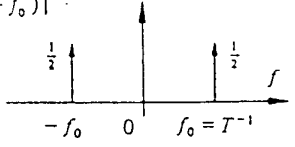
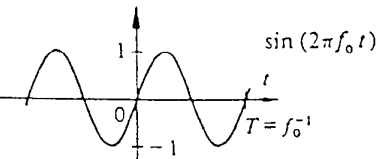
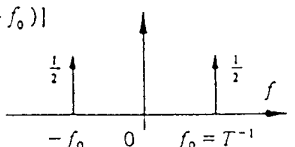
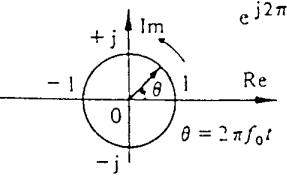
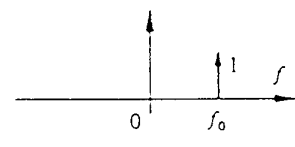
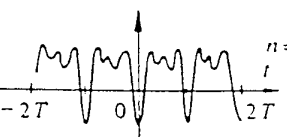
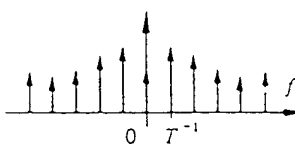
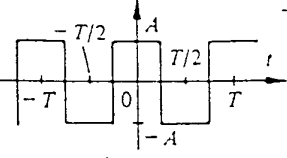
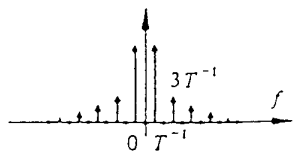
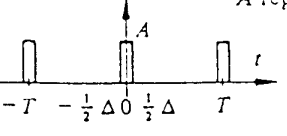
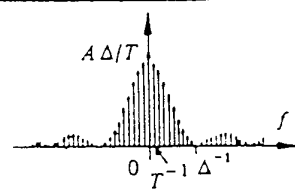
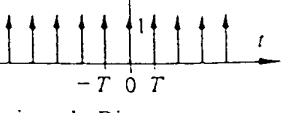
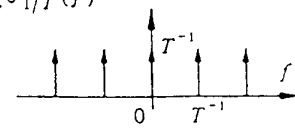
5.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\delta(t)$	1	
<p>impulsion unité (Dirac)</p>		
 K	$K\delta(f)$	
<p>constante</p>		
 $\epsilon(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
<p>saut unité</p>		
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\frac{1}{j\pi f}$ si $f \neq 0$ 0 si $f = 0$	
<p>fonction signe</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	
<p>impulsion cosinusoidale</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
<p>signal cosinusoidal</p>		

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$	
 <p>$e^{j2\pi f_0 t}$</p>	$\delta(f-f_0)$	
 <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$	
 <p>onde carrée</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = A \text{sinc}(n/2)$ $= \begin{cases} \left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 1, \pm 5, \dots \\ -\left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 3, \pm 7, \dots \end{cases}$ $X_n = 0$ pour n nul ou pair	
 <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$	

5.7. Exercices

TF 1 À partir de la seule observation du signal temporel de la figure 5.13, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ puis calculez et esquissez sa transformée de Fourier.

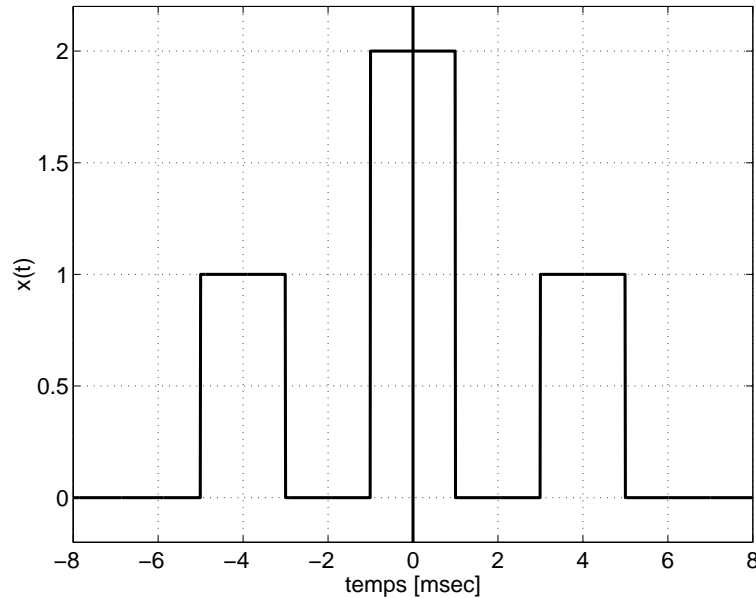


FIGURE 5.13.: Exercice TF1

TF 2 Partant de la TF d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculez les TF de $x(t)$ et $y(t)$ (figure 5.14). Après calculs, vous remarquerez que $Y(jf)$ peut s'écrire sous la forme d'un sinc^2 .

TF 3 Partant de la TF d'une impulsion et d'un saut unité, trouvez celle de $z(t)$ (figure 5.14). Est-il possible de trouver $Z(jf)$ à partir de $Y(jf)$? Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $Z(jf = 0)$ qui doit être égal à $\Delta t/2$.

TF 4 Soit un signal carré périodique symétrique (à valeur moyenne nulle) d'amplitude A . Esquissez

1. le signal $x(t)$;
2. le spectre que l'on obtient avec les séries de Fourier ;
3. le spectre que l'on obtient avec la transformation de Fourier.

TF 5 Considérant le signal $x(t) = \exp(-a|t|)$, calculez et esquissez $x(t)$ et $X(jf)$, puis vérifiez les 2 égalités suivantes :

$$a) \quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt, \quad b) \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$$

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

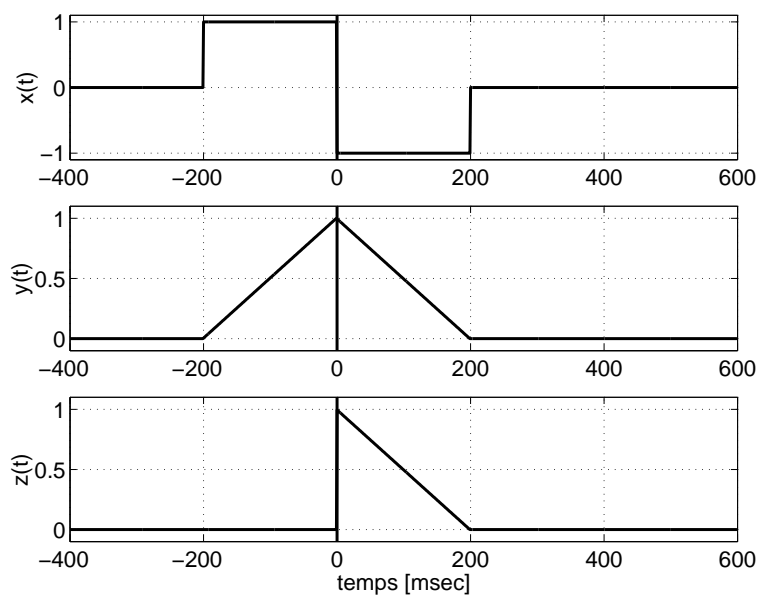


FIGURE 5.14.: Exercices TF2 et TF3

TF 6

	fréquence	temps
1	la partie réelle de $X(jf)$ est nulle	
2	la partie imaginaire de $X(jf)$ est nulle	
3	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est réel	
4	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est imaginaire	
5	$X(jf)$ est continu	

1. Considérant les cinq propriétés fréquentielles du tableau ci-dessus, exprimez leur équivalent temporel dans la colonne de droite.
2. Pour chacun des signaux temporels de la figure 5.15, quelles sont les propriétés du tableau qui s'y appliquent ?

3. Construisez un signal qui ne possède aucune des cinq propriétés mentionnées dans le tableau.

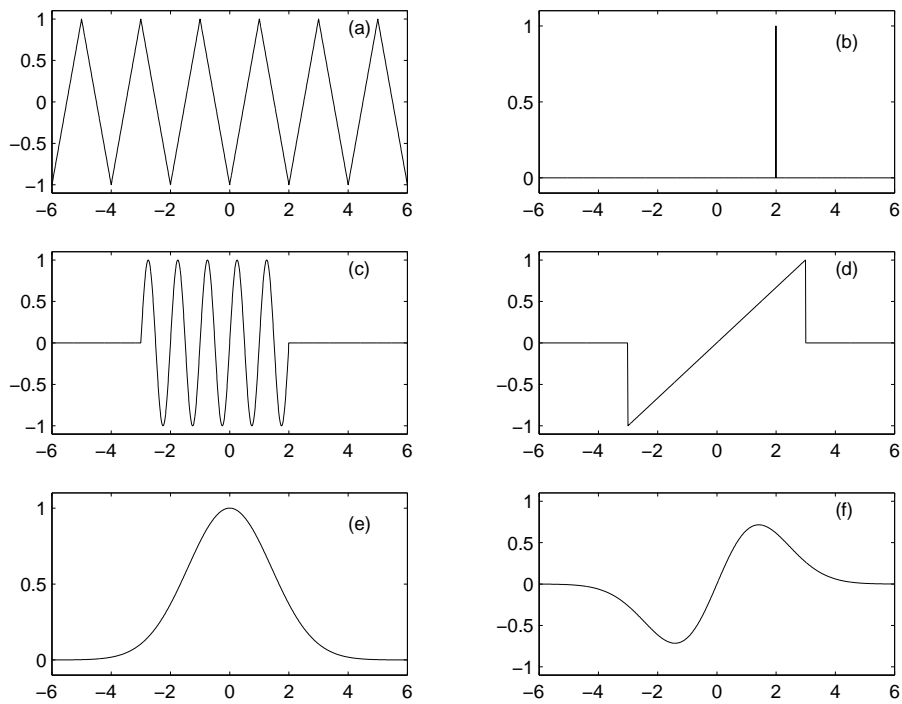


FIGURE 5.15.: Exercice TF6

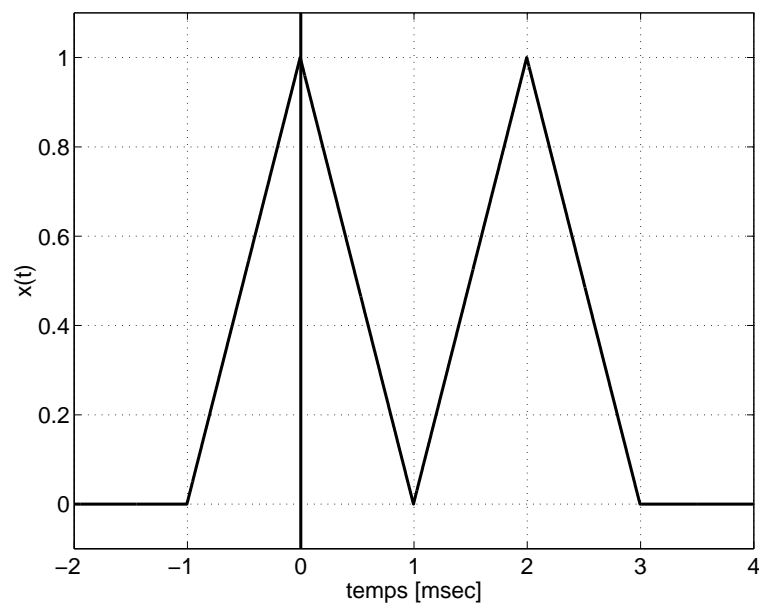


FIGURE 5.16.: Exercice TF7

TF 7 Soit $X(jf)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$ de la figure 5.16. Sans calculer explicitement $X(jf)$, recherchez :

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

1. la densité spectrale de phase de $X(jf)$;
2. la valeur de $X(f = 0)$;
3. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$;
4. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df$.

TF 8 Connaissant la TF d'une sinusoïde amortie démarrant en $t = 0$

$$X(jf) = \frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$$

1. calculez la TF d'une sinusoïde non amortie démarrant à l'instant $t = 0$;
2. esquissez les modules des spectres $X(jf)$, $Y(jf)$ et celui d'une sinusoïde permanente;
3. discutez les différences existant entre ces trois spectres.

TF 9 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \epsilon(t)$, d'amortissement

$a = 100$ [1/sec] à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec];

1. calculez la TF $U_2(jf)$ de la tension de sortie $u_2(t)$ du filtre;
2. utilisez le tableau des transformées pour déduire l'expression temporelle de $u_2(t)$.

TF 10 Soit un message $m(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(jf)|$ si $f_1 = 10$ [kHz] et $f_0 = 800$ [kHz];
3. idem 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(jf)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz].

TF 11 Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $|U(jf)|$ pour $U_0 = 1$ [V], $T = 1/f_0 = 1$ [msec], $t_0 = 10$ [msec].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

TF 12 Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi f_0 t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $U(jf)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée;
4. observez les différences.

TF 13 Connaissant la transformée $E(jf)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(jf)$ de la fonction signe $s(t)$.

TF 14 Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(jf) = X(jf) \cdot H(jf) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(jf)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf)\exp(+j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(jf)X(jf)\exp(+j2\pi ft)df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\exp(-j2\pi f\theta)d\theta$$

TF 15 Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(jf)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(jf)$; ce filtre est-il réalisable? pourquoi?

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

TF 16 Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $U(jf)$;
2. calculez puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut son énergie ?

TF 17 Utilisez la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

TF 18 On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

TF 19 On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \exp(-a|t|)$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

TF 20 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$; esquissez leur module ;
2. en admettant $U_0 = 10 \text{ [V]}$ et $a = 1000 \text{ [1/sec]}$, calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :
(a) $f_c = 1 \text{ [kHz]}$; (b) $f_c = \frac{a}{2\pi}$.

TF 21 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec] un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(jf) = \begin{cases} 1 \text{ [V/Hz]} & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 300 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(jf)$ du filtre; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(jf)$, $H(jf)$ et $U_2(jf)$ pour $-500 \text{ [Hz]} < f < +500 \text{ [Hz]}$;
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

TF 22 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = RC = 10$ [msec] une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \exp(-at)\epsilon(t)$ avec $a = 1000$ [1/sec].

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

TF 23 On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(jf) = \frac{D_0 \frac{jf}{f_0}}{1 + D_0 \frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1 \text{ [kHz]} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 D_0$$

TF 24 Considérant le spectre $X(jf)$ de la figure 5.17 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface 1/2, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

1. Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- a) esquissez la fonction à intégrer;
- b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie;
- c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

5. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

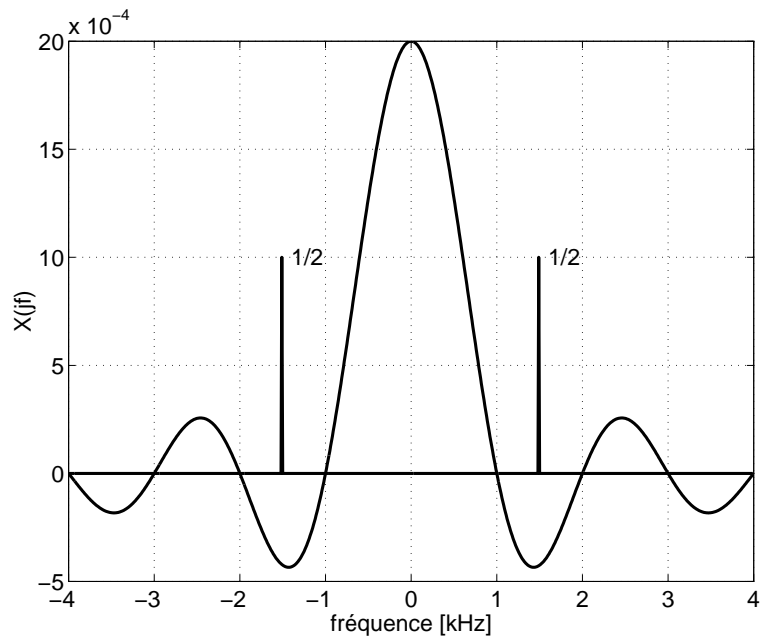


FIGURE 5.17.: Exercice TF24

TF 25 A partir du signal $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970

6. Éléments d'analyse spectrale numérique

6.1. Passage de la TF à la TFD

L'échantillonnage des signaux analogiques est étudié en détail par ailleurs. Pour ce qui suit, il suffit de savoir que tout signal analogique $x(t)$ est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage T_e et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux $x[n]$ sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 6.1) et tels que

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_e} \tag{6.1}$$

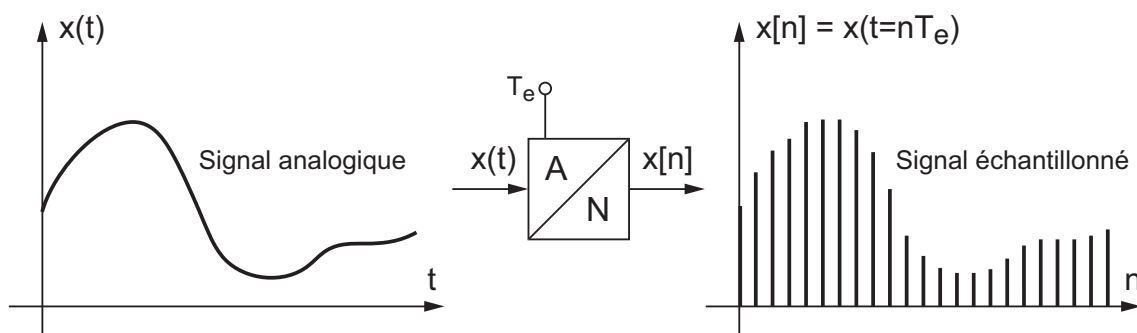


FIGURE 6.1.: Acquisition numérique d'un signal analogique

Le passage de la transformation de Fourier (TF) des signaux analogiques $x(t)$ à la transformation de Fourier discrète (TFD) des signaux numérisés $x[n]$ fait intervenir trois opérations :

- l'échantillonnage du signal analogique ;
- la limitation de la durée de l'enregistrement de ce signal ;
- la discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale numérique.

Ces trois opérations, apparemment anodines, ont des conséquences dont il est important d'évaluer l'étendue. Pour mémoire, on rappelle trois propriétés de la transformation de Fourier dont on aura besoin par la suite :

- au produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(jf) \otimes Y(jf) \tag{6.2}$$

$$x(t) \otimes y(t) \longleftrightarrow X(jf) \cdot Y(jf) \tag{6.3}$$

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

– la TF d'un peigne d'impulsions de Dirac est également un peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (6.4)$$

– la TF d'une impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt est un sinus cardinal

$$A \text{rect}(t/\Delta t) \longleftrightarrow A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{sinc}(f \Delta t) \quad (6.5)$$

Afin de concrétiser au mieux les relations existant entre les espaces temps et fréquence, on considérera par la suite que les signaux étudiés sont fournis sous la forme d'une tension électrique que l'on échantillonne régulièrement pendant une durée finie avant de calculer numériquement son contenu spectral. Ainsi, pour chaque équation, on pourra préciser les unités des résultats obtenus.

6.1.1. Signaux continus non-périodiques (\Rightarrow TF)

Un signal analogique $x(t)$ et sa densité spectrale $X(jf)$ sont reliés entre eux par les relations

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V sec}] \quad (6.6)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi ft) df \quad [\text{V}] \quad (6.7)$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence (figure 6.2.a). À cette symétrie correspond la propriété suivante :

à un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu non périodique.

6.1.2. Signaux discrets de durée infinie (\Rightarrow TFi)

On considère ici que le signal continu $x(t)$ (figure 6.2.a) est échantillonné tous les multiples de la période d'échantillonnage T_e . Cette opération d'échantillonnage peut être représentée mathématiquement par la multiplication du signal $x(t)$ avec un peigne d'impulsions de Dirac distantes de T_e (figure 6.2.b)

$$x(t = nT_e) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (6.8)$$

On obtient ainsi une suite d'impulsions de Dirac pondérées par les valeurs $x(t = nT_e)$ (figure 6.2.c) ; celles-ci représentent alors le signal discret $x[n] = x(t = nT_e)$.

Dans l'espace fréquentiel, le peigne de Dirac temporel $\delta_{T_e}(t)$ devient un peigne de Dirac périodique f_e (figure 6.2.b)

$$\Delta(f) \equiv TF\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (6.9)$$

6.1. Passage de la TF à la TFD

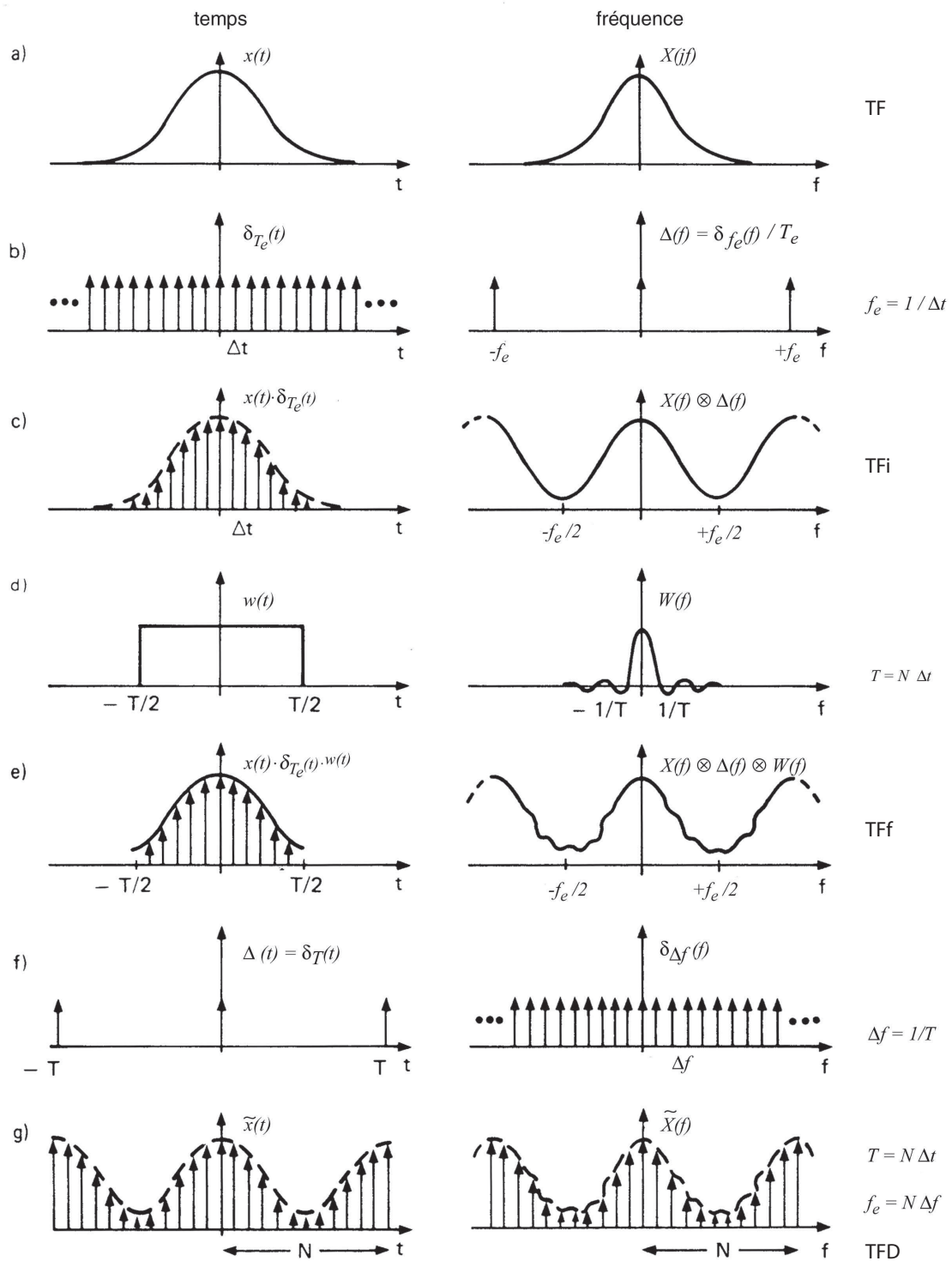


FIGURE 6.2.: Passage de la TF à la TFD [1]

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Comme le produit simple dans l'espace temps conduit à un produit de convolution entre les spectres $X(jf)$ et $\Delta(f)$ (figure 6.2.c), on constate que :

à un signal échantillonné ou discret correspond un spectre continu et périodique f_e .

Le calcul du spectre $X_e(jf)$ d'un signal discret $x[n]$ se fait à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux continus (équation 6.6). On obtient alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (6.10)$$

Partant de ce spectre $X_e(jf)$, on peut bien entendu revenir au signal temporel $x[n]$:

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad -\infty < n < +\infty \quad (6.11)$$

6.1.3. Signaux discrets de durée finie (\Rightarrow TFF)

Dans le cas où l'on désire traiter numériquement un signal, le nombre de valeurs $x[n]$ ne peut pas être infiniment grand. On est donc contraint à ne prendre en compte qu'une partie du signal original. Mathématiquement, cette opération de troncation revient à multiplier le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire $w(t)$ de largeur T (figure 6.2.d).

À cette multiplication dans l'espace temps correspond un produit de convolution dans l'espace des fréquences entre le spectre du signal $X(jf)$ et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre $w(t)$. Il en résulte une déformation du spectre original causée par les ondulations du sinus cardinal (figure 6.2.e).

Le signal $x(t)$ est enregistré pendant une durée finie T en échantillonnant N valeurs du signal $x(t)$. On a donc $T = N \cdot T_e$. La suite de valeurs discrètes $x_N[n]$ ainsi obtenue sera énumérée avec le compteur temporel n compris entre 0 et $N - 1$ et le spectre du signal tronqué se calcule alors comme suit

$$X_{e,N}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}]$$

Il est bien clair que les N valeurs temporelles peuvent s'obtenir par transformation inverse de $X_{e,N}(jf)$

$$x_N[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{e,N}(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Remarque Par la suite, aucune distinction ne sera faite entre $x_N[n]$ et $x[n]$ d'une part, et $X_{e,N}(jf)$ et $X_e(jf)$ d'autre part, car le contexte permettra toujours de

savoir si la longueur N de la suite considérée est finie ou non ; les 2 relations ci-dessus s'écriront alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (6.12)$$

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}] \quad (6.13)$$

6.1.4. Discrétisation de la fréquence (\Rightarrow TFD)

Afin de pouvoir calculer numériquement un spectre, il est évidemment nécessaire de discrétiser la fréquence. En divisant le domaine fréquentiel en N intervalles, l'incrément fréquentiel vaut $\Delta f = f_e/N$ et les fréquences analysées, au nombre de N , sont :

$$f = k \cdot \Delta f = k \cdot f_e/N \quad (6.14)$$

Cette discrétisation de la fréquence n'est rien d'autre qu'un échantillonnage dans le domaine spectral et les résultats des opérations d'échantillonnage et de multiplication vues plus haut pour l'espace temps s'appliquent également dans l'espace des fréquences (figure 6.2.f et 6.2.g) et conduisent à la propriété suivante :

à la discrétisation du domaine spectral correspond un signal temporel périodique.

Tout se passe comme si la durée d'acquisition T correspondait à une période du signal temporel $x[n]$. Le spectre considéré à présent est donc un spectre discret que l'on écrit $X[jk]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$. Tenant compte des relations temps-fréquence, l'argument du phaseur s'écrit

$$\pm j2\pi f nT_e = \pm j2\pi k \Delta f nT_e = \pm j2\pi k \frac{f_e}{N} nT_e = \pm j2\pi \frac{kn}{N} \quad (6.15)$$

Le spectre $X[jk]$ et le signal temporel $x[n]$ se calculent alors comme suit

$$X[jk] = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V sec}] \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (6.16)$$

$$x[n] = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=0}^{N-1} X[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.17)$$

6.2. Relations temps-fréquence

Comme les domaines temporel et fréquentiel sont discrétisés avec le même nombre de points N , on peut relever que

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

1. l'**espace du temps** est caractérisé par la durée de l'enregistrement T et par l'incrément temporel Δt (qui n'est autre que la période d'échantillonnage T_e) tel que

$$\Delta t \equiv T_e = \frac{T}{N} \quad (6.18)$$

2. l'**espace des fréquences** est caractérisé par l'incrément fréquentiel Δf et la fréquence maximum f_{max} qui n'est autre que la fréquence d'échantillonnage f_e

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{f_e}{N} \quad (6.19)$$

Ces deux relations ayant en commun la période d'échantillonnage T_e et son inverse la fréquence d'échantillonnage, on a

$$\Delta t \equiv T_e \equiv \frac{1}{f_e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta f} \quad (6.20)$$

On en déduit donc trois relations importantes liant les domaines temporel et fréquentiel

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (6.21)$$

$$f_{max} \equiv f_e = \frac{1}{\Delta t} \equiv \frac{1}{T_e} \quad (6.22)$$

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (6.23)$$

De plus, comme le spectre d'un signal échantillonné est périodique f_e , on définit la fréquence de Nyquist f_N comme étant la limite du domaine d'analyse spectrale

$$f_N = \frac{f_e}{2} \quad (6.24)$$

Les relations que nous venons de voir peuvent se traduire par les propriétés suivantes.

1. *L'incrément fréquentiel Δf est l'inverse de la durée temporelle T .*
2. *La période spectrale $f_{max} = f_e$ est l'inverse de l'incrément temporel Δt .*
3. *Le domaine d'analyse spectrale se limite au domaine de Nyquist compris entre $\pm f_e/2 \equiv \pm f_N$.*
4. *Pour un nombre donné de points N , il n'est pas possible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et une très bonne définition fréquentielle (Δf petit).*

Une illustration des relations existant entre les domaines temporel et fréquentiel est donnée dans la figure 6.3.

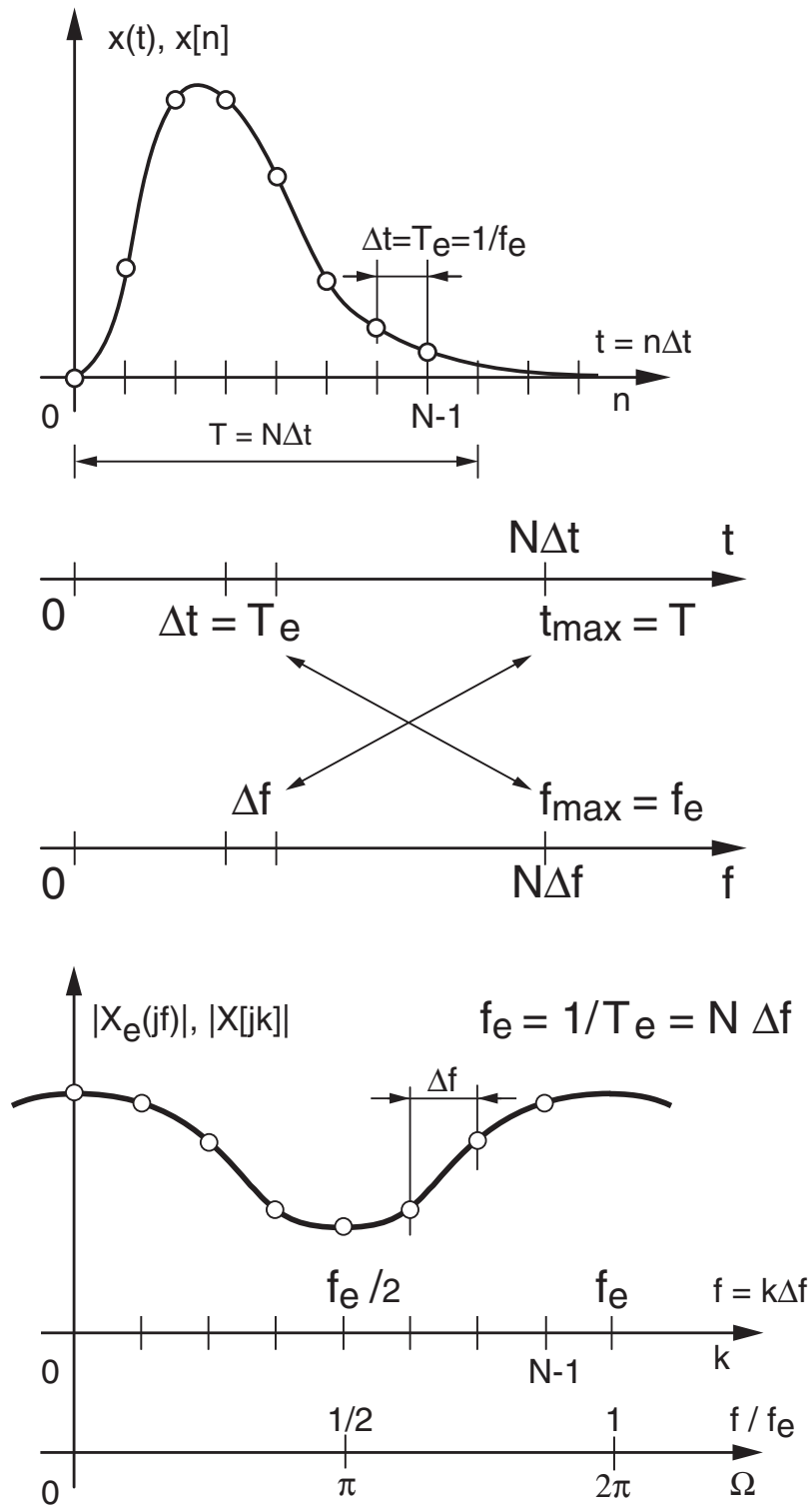


FIGURE 6.3.: Relations temps - fréquence

6.2.1. Analyse spectrale avec Matlab

Dans la section suivante, on précisera ce qu'est la transformation de Fourier discrète ou FFT (Fast Fourier Transform). Mais par rapport à ce que nous venons de voir, il vaut la peine de montrer ici combien l'analyse spectrale d'un signal $x(t)$ est simple à faire. Dans Matlab, elle se réduit aux cinq lignes du programme ci-dessous consacrées au domaine fréquentiel. Le résultat graphique en est présenté à la figure 6.4.

```
% domaine temporel
Te = 0.1e-3;
tmin = -10e-3; tmax = 10e-3;
tn = tmin:Te:tmax - Te;
T0 = 2e-3;
xn = 5*cos(2*pi*tn/T0 + pi/3) + 2*sin(6*pi*tn/T0 - pi/4);

% domaine fréquentiel
fe = 1/Te;
duree = tmax - tmin;
df = 1/duree;
ff = 0:df:fe-df;
Xjf = fft(xn) / length(xn);

% graphes
subplot(2,1,1);
plot(tn,xn);
xlabel('temps [sec]'); ylabel('x(t)');
subplot(2,1,2);
stem(ff, abs(Xjf));
xlabel('fréquence [Hz]'); ylabel('|X(jf)|');
```

6.2.2. Pulsation normalisée

Dans ce qui précède, on a constamment vu apparaître un phaseur faisant intervenir l'argument $\pm j2\pi n f T_e$:

$$\exp(\pm j2\pi n f T_e)$$

Il est donc naturel de chercher à alléger l'écriture en définissant la pulsation numérique ou normalisée Ω qui s'exprime en radians (figure 6.3) :

$$\Omega \equiv 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e} \text{ [rad]} \quad (6.25)$$

Comme le spectre de base est compris entre $\pm f_e/2$, on voit que la pulsation normalisée prendra ses valeurs entre $\pm\pi$ et que les transformations de Fourier s'écrivent :

$$X_e(j\Omega) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [\text{V sec}] \quad (6.26)$$

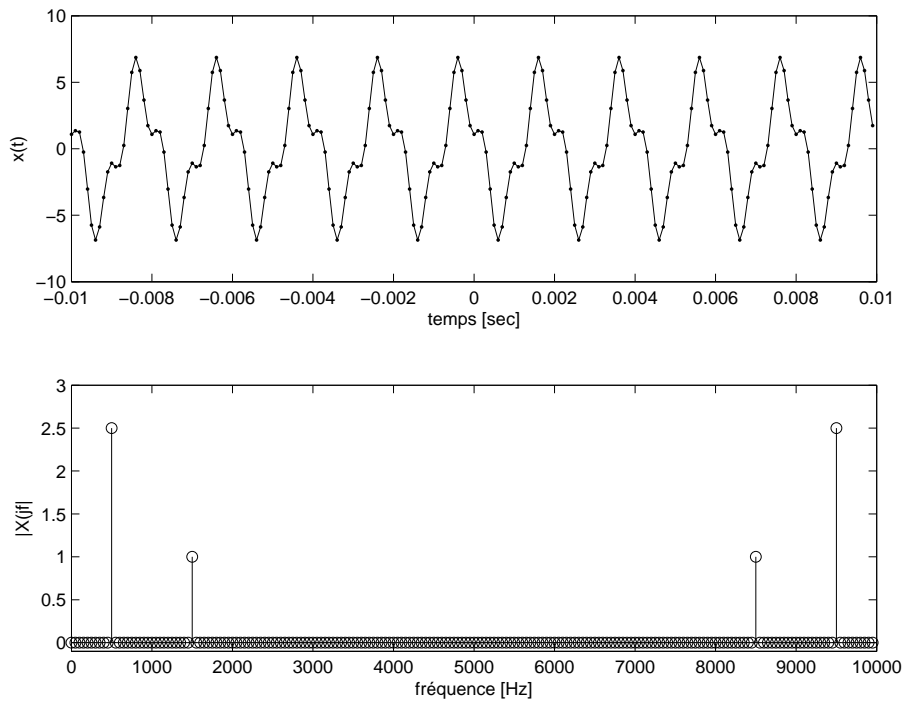


FIGURE 6.4.: Résultats d'une analyse spectrale simple

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_e(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad [\text{V}] \quad (6.27)$$

6.3. Transformation de Fourier discrète

6.3.1. Définition de la TFD

En observant les relations (6.16) et (6.17), on constate que, mis à part le changement de signe du phaseur et les coefficients précédant la somme, les calculs du spectre $X[jk]$ ou du signal $x[n]$ se font de la même manière. Ceci conduit à définir les algorithmes des transformations de Fourier discrètes directe ou inverse comme suit :

$$X_D[jk] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (6.28)$$

$$x_D[n] \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_D[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.29)$$

Comme ces deux définitions ne diffèrent que par le signe de l'exponentielle qui pondère les signaux $x[n]$ et $X_D[jk]$, on voit qu'un même algorithme peut être utilisé pour les transformations de Fourier directe et inverse. Alors les résultats de la TFD ainsi définie sont reliés aux spectres et signaux réels par les relations suivantes :

$$X[jk] = T_e \cdot X_D[jk] \quad (6.30)$$

$$x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.31)$$

La figure 6.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique où l'on a, d'un côté, des signaux et des spectres continus alors que de l'autre, on n'a que des valeurs numériques stockées en RAM.

6.3.2. TFD d'un signal périodique

Nous avons vu que le passage de la TF à la TFD peut modifier de manière sensible les résultats de l'analyse spectrale à cause de la troncation. Par contre, si le signal temporel $x(t)$ est périodique, on peut se trouver dans la situation idéale où les raies spectrales du signal $x_T(t)$ sont en parfaite coïncidence avec les raies analysées par la TFD. Pour remplir cette condition, il suffit d'enregistrer très exactement une ou plusieurs périodes du signal temporel.

En comparant les définitions de la décomposition en série de Fourier :

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt \quad [V] \quad (6.32)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{SF}[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kt}{T}\right) \quad [V] \quad (6.33)$$

avec celles de la TFD (équations 6.28 et 6.29), on voit alors apparaître les relations suivantes :

$$X_{SF}[jk] = \frac{X_D[jk]}{N} \quad (6.34)$$

$$x_T(t = nT_e) = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.35)$$

6.3.3. TFD et FFT

La découverte de la transformation rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey [3] a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier et il est généralement désigné par son appellation anglo-saxonne : FFT (Fast Fourier Transform).

Il est aisé de voir que le nombre d'opérations arithmétiques (sommations et produits) nécessitées par la TFD d'une suite de longueur N est proportionnel à N^2 . Ce qui, pour une suite de longueur 1000, conduit à calculer 1'000'000 de sinus et cosinus suivis d'une addition et d'une multiplication ; les temps de calcul deviennent très vite prohibitifs..

6.4. Relations entre les domaines analogique et numérique

L'algorithme de la FFT utilise le fait que l'opération de la TFD globale peut être décomposée en la TFD de séquences de plus en plus courtes. Il en découle alors que le nombre total d'opérations est bien inférieur à celui imposé par la simple application de l'algorithme de la TFD. En contrepartie, le nombre de points analysés N doit être une puissance de 2. Le nombre d'opérations demandées par le nouvel algorithme est alors fortement diminué et il vaut

$$N_{op} \simeq N \log_2(N) \quad (6.36)$$

Ainsi, pour transformer 1024 points, le nouvel algorithme demande environ cent fois moins de temps que la TFD :

$$\frac{N^2}{N_{op}} = \frac{N}{\log_2(N)} = \frac{1024}{10} = 102.4$$

Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD. Différents algorithmes de FFT sont présentés dans le livre de Burrus et Parks [4].

6.4. Relations entre les domaines analogique et numérique

En conclusion et en résumé de ce que nous venons de voir dans le détail, la figure 6.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique. L'interface entre les domaines analogique et numérique est réalisée par un échantillonneur qui acquiert les signaux à un rythme fixé par la période d'échantillonnage $T_e \equiv 1/f_e$. On peut noter que, du côté analogique, on a des signaux et des spectres continus (ou discrets si $x(t)$ est périodique) reliés entre eux par la transformation de Fourier alors que du côté numérique, on n'a que des valeurs numériques $x[n]$ stockées en RAM sur lesquelles on travaille avec l'algorithme de la TFD ou de la FFT pour obtenir $X[jk]$ (figure 6.5).

Si on considère, comme on l'a vu dans la figure 6.2, que la partie enregistrée $x[n]$ du signal analogique $x(t = nT_e)$ représente une période du signal numérique, on voit alors que l'analyse spectrale numérique se ramène tout simplement à la série complexe $X_{SF}(jk)$ de Fourier et que la connaissance des relations suivantes suffisent pour l'analyse spectrale d'un signal analogique dont on a enregistré N valeurs à la fréquence $f_e = 1/T_e$:

$$X_D[jk] \equiv FFT(x[n]) \leftrightarrow x_D[n] = IFFT(X_D[jk]) \quad (6.37)$$

$$X_{SF}(jk) = \frac{X_D[jk]}{N} = \frac{FFT(x[n])}{N} \leftrightarrow x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.38)$$

$$f = 0, \dots, k \Delta f, \dots, f_e - \Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{f_e}{N} \quad (6.39)$$

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

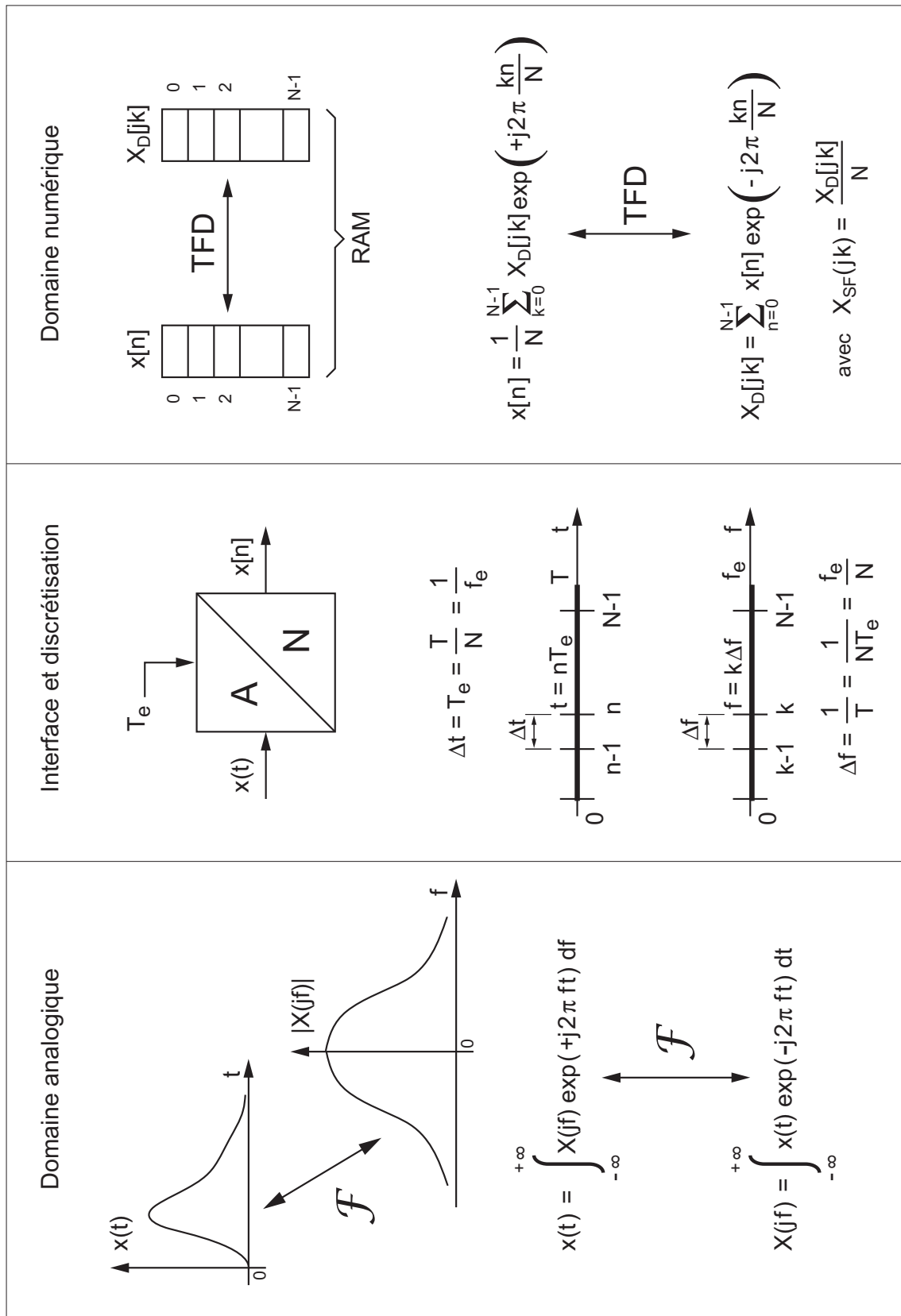


FIGURE 6.5.: Illustration des relations entre les domaines analogiques et numériques

6.4.1. Calcul et analyse d'une TFD

Afin d'illustrer l'usage de ces relations considérons la suite suivante $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ qui pourrait provenir, par exemple, de l'échantillonnage d'une rampe. Comme la période d'échantillonnage n'est pas donnée, on admet $T_e = 1$ sec. De cette donnée élémentaire, on en déduit immédiatement

$$N = 4, \quad \Delta f = \frac{1}{N T_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (6.40)$$

$$t_n = 0, 1, 2, 3 \text{ sec}, \quad f_k = 0, 0.25, 0.5, 0.75 \text{ Hz} \quad (6.41)$$

Il y a donc quatre échantillons temporels et quatre raies spectrales décrites par

$$X_D[jk] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{avec } k = 0, \dots, 3 \quad (6.42)$$

Avant de se lancer dans le calcul de $X_D[jk]$, il est intéressant de noter que

$$e^{-j2\pi kn/N} = (e^{-jk\pi/2})^n$$

On obtient ainsi

– pour $k = 0$, $e^{-jk\pi/2} = 1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$X_D[j0] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

– pour $k = 1$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j1] &= 0 \cdot e^{-0j\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (+j) = -2 + 2j \end{aligned}$$

– pour $k = 2$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi} = -1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j2] &= 0 \cdot e^{-0j\pi} + 1 \cdot e^{-1j\pi} + 2 \cdot e^{-2j\pi} + 3 \cdot e^{-3j\pi} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (+1) + 3 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

– pour $k = 3$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j3\pi/2} = +j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j3] &= 0 \cdot e^{-0j3\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j3\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j3\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j3\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (+j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-j) = -2 - 2j \end{aligned}$$

Par simple TFD (ou FFT) directe ou inverse, on bascule ainsi d'un domaine à l'autre et l'on a

$$x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{fft} \rightarrow X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{ifft} \rightarrow x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le passage de la TFD $X_D[jk]$ à la série de Fourier bilatérale $X_{SF}[jk]$ se fait en divisant le résultat de la TFD par le nombre de points de la suite $x[n]$ après avoir

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

redistribué les composantes spectrales supérieures à $f_e/2$ entre $-f_e/2$ et 0. Cette redistribution se fait simplement avec la fonction `fftshift` :

$$X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{fftshift} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2-2j \\ 6 \\ -2+2j \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{N} \rightarrow X_{SF}[jk] = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5-0.5j \\ 1.5 \\ -0.5+0.5j \end{pmatrix}$$

On notera ici la situation particulière de la première composante qui n'a pas de composante symétrique (un conjugué complexe comme pour la deuxième composante). En effet, **lorsque N est pair**, cette composante se situe sur la fréquence de Nyquist $f_e/2$ et sa valeur sera toujours réelle comme la composante DC. Ce qui fait, que lors du passage à la description (A_k, α_k) , les composantes DC et de Nyquist ne doivent pas être multipliées par le facteur 2.

k ou n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x[n]$?	?	?	?	?	0	1	2	3	?	?	?
$X_D[jk]$...	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$...
$X_{SF}[jk]$					$-0.5-0.5j$	1.5	$-0.5+0.5j$	-0.5				
A_k						1.5	$2/\sqrt{2}$	0.5				
α_k						0	$+3\pi/4$	$+\pi$				

TABLE 6.1.: Résultats de l'analyse spectrale de la suite $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$

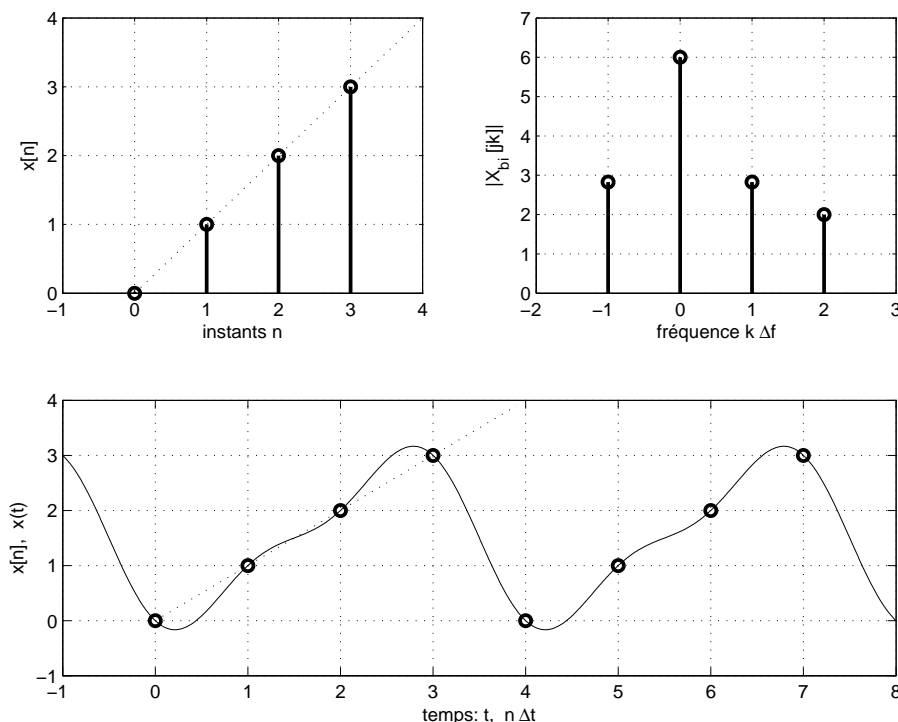


FIGURE 6.6.: Résultats d'une TFD

Les valeurs intéressantes sont réunies dans le tableau 6.1; les cases vides sont non significatives. Les points d'interrogation rappellent qu'après échantillonnage,

on ne sait rien du signal original hormis les valeurs ainsi obtenues. Connaissant les (A_k, α_k) , on peut alors calculer le signal continu qui, au sens de Fourier, passe par les points échantillonnés

$$x(t) = 1.5 + \sqrt{2} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right) + 0.5 \cos(4\pi f_0 t + \pi), \quad f_0 = \frac{1}{NT_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (6.43)$$

Dans la figure 6.6, on peut observer les points échantillonnés (graphe a) et le spectre bilatéral correspondant (graphe b). En revenant au domaine temporel, il est important de se souvenir que, vu par l'algorithme TFD, le signal $x[n]$ est considéré périodique comme le montre également la reconstruction au sens de Fourier du signal $x(t)$ (graphe c).

6.5. Spectre d'une sinusoïde

Il est important de bien comprendre que, dans toute analyse numérique des signaux, on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal et que cette durée finie peut conduire à des effets indésirables lors de l'analyse.

On a vu que la FFT travaille sur un bloc complet d'échantillons considéré comme périodique. Cela ne pose aucun problème dans le cas d'un signal transitoire si celui a le temps de revenir à 0 avant la fin de l'enregistrement. Par contre, dans le cas de signaux permanents, les choses peuvent se compliquer sensiblement. Pour le voir, considérons deux situations pouvant apparaître lors de l'enregistrement d'un signal périodique tel qu'une sinusoïde.

6.5.1. Le nombre de périodes enregistrées est un entier

La figure 6.7a illustre un enregistrement de durée 10 ms contenant *exactement* 10 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, coïncide avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et aucune modification de l'information n'est introduite.

Le résultat de l'analyse FFT pour cette situation confirme ce que l'on attend, à savoir que son spectre est constitué d'une raie spectrale bien définie et située en 1 kHz. Les deux raies supplémentaires que l'on peut observer en 3 et 5 kHz sont dues aux distorsions du signal sinusoïdal fourni par le générateur.

6.5.2. Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier

Dans ce cas, la FFT analyse un signal qui possède une transition brusque au raccordement du début et de la fin de l'enregistrement. Cette transition possède un contenu spectral hautes-fréquences qui peut masquer une partie du spectre réel.

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

La figure 6.7b montre un enregistrement contenant 10.25 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, ne coïncide pas avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et son spectre s'étale dans tout le domaine spectral. Cette dispersion de la puissance du signal dans tout le domaine fréquentiel porte le nom d'*étalement spectral*.

Il est important de réaliser que le phénomène d'étalement spectral est dû à la non-coïncidence des valeurs initiale et finale de la durée enregistrée. Dans le cas de la figure 6.7b, ces effets de bords sont tels qu'ils masquent complètement les composantes spectrales d'ordre 3 et 5 du signal.

Pour éviter ces effets de bords, il faut s'attacher à enregistrer exactement un nombre entier de périodes du signal et, dans le cas où cela n'est pas possible, il faut ramener les deux bords à une valeur identique à l'aide d'une fenêtre qui modifie aussi peu que possible le spectre réel.

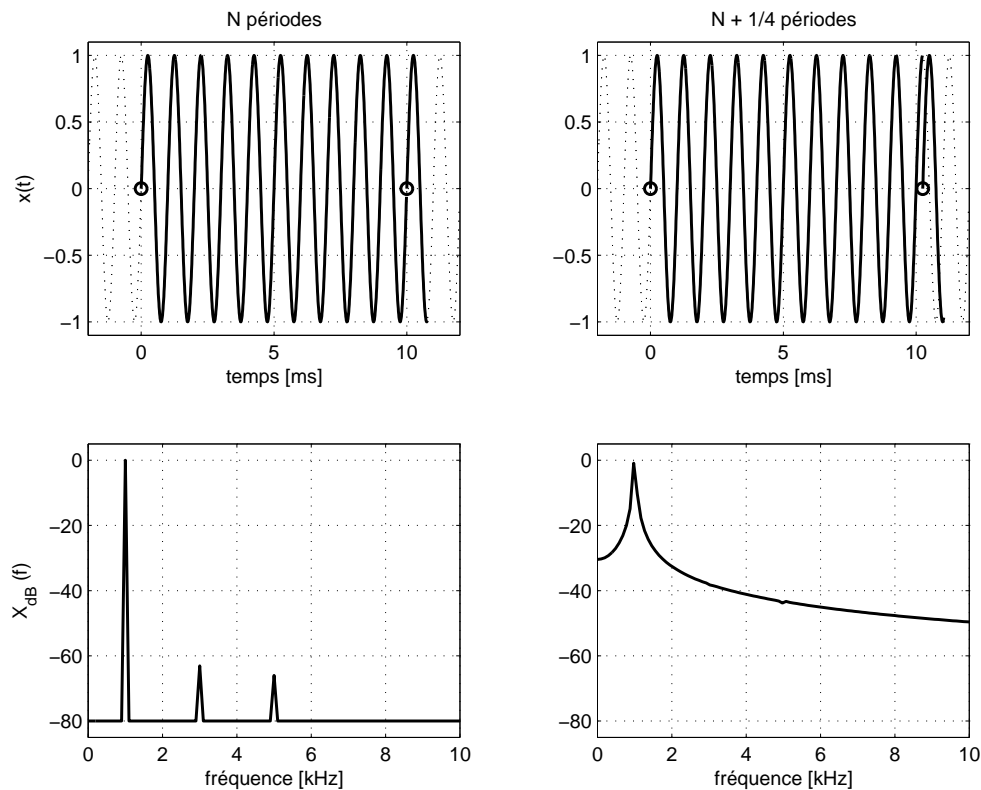


FIGURE 6.7.: Signal sinusoïdal et son spectre

6.6. Fenêtres d'observation

6.6.1. Quatre fenêtres usuelles

Les fenêtres utilisées en analyse spectrale sont nombreuses et elles ont été étudiées extensivement par F.J. Harris [2]. On se contente ici de mentionner quatre fenêtres

fréquemment appliquées à l'enregistrement d'un signal. Elles sont définies comme suit :

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (6.44)$$

Fenêtre de Hann

$$w_c[n] = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (6.45)$$

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = 0.54 - 0.46 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (6.46)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) + 0.08 \cos \left(4\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (6.47)$$

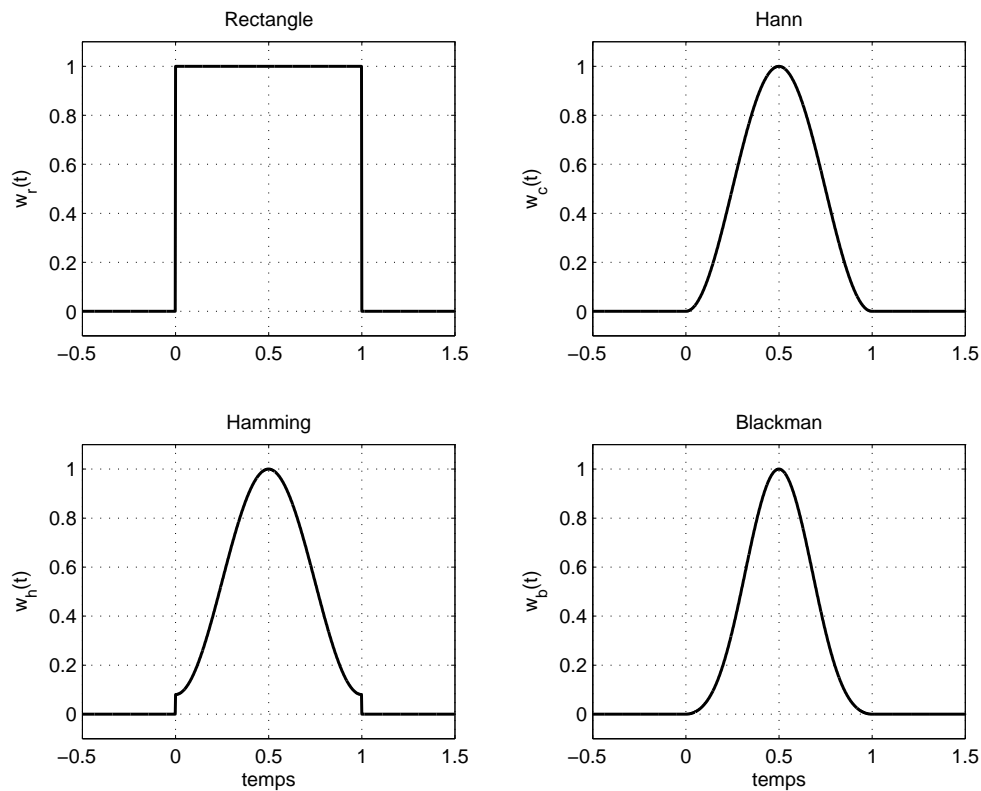


FIGURE 6.8.: Fenêtres d'observation

6.6.2. Effet d'une fenêtre

Pour bien saisir l'effet des fenêtres dans le domaine spectral, on considère ici les deux situations présentées plus haut auxquelles on appliquera les fenêtres de Hann, de Hamming et de Blackman (figure 6.9).

Le nombre de périodes enregistrées est un entier Dans ce cas idéal (figure 6.9a), on peut relever quelques différences spectrales légères.

1. Les raies spectrales du signal original sont également présentes quelle que soit la fenêtre choisie.
2. Grâce au maintien d'une légère discontinuité temporelle, la fenêtre de Hamming offre les raies spectrales les plus étroites.
3. La fenêtre de Blackman qui est la plus étroite temporellement, fournit, comme attendu, des raies spectrales plus larges.

Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier Dans la figure 6.9b, on a repris l'enregistrement contenant 10.25 périodes. Les résultats spectraux obtenus montrent à l'évidence l'effet de ces 3 fenêtres :

1. la fenêtre de Hann fournit un spectre tout à fait satisfaisant sans diminuer fortement l'étalement spectral ; c'est pourquoi le spectre est un peu large à la base ;
2. la fenêtre de Hamming fournit un spectre étroit mais, à cause de l'effet de bord résiduel, l'étalement spectral n'est pas suffisamment réduit et il masque les deux autres composantes spectrales ;
3. la fenêtre de Blackman donne le meilleur résultat grâce à la double cosinusoïde qui masque bien les effets de bord ; les raies spectrales sont alors étroites et bien définies.

6.6.3. Choix d'une fenêtre

Le choix d'une fenêtre est un compromis entre une bonne définition spectrale (spectre étroit) et un étalement spectral aussi faible que possible (douceur de la fenêtre). Qualitativement, leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit.

1. La *fenêtre rectangulaire* ne modifie pas l'enregistrement ; c'est celle que l'on utilisera dans le cas de **signaux transitoires ou non permanents** et, dans le cas de signaux périodiques, lorsque l'on est sûr que le nombre de périodes enregistrées est un entier.
2. La *fenêtre en cosinus*, dite de Hann, est mathématiquement la plus simple et elle offre de bons résultats dans le cas de **composantes spectrales pas trop proches**.
3. La *fenêtre en cosinus relevé*, dite de Hamming, n'élimine pas complètement l'étalement spectral. Elle offre en contre partie une **meilleure définition spectrale** mais ne permet pas de voir des composantes spectrales de faibles amplitudes.

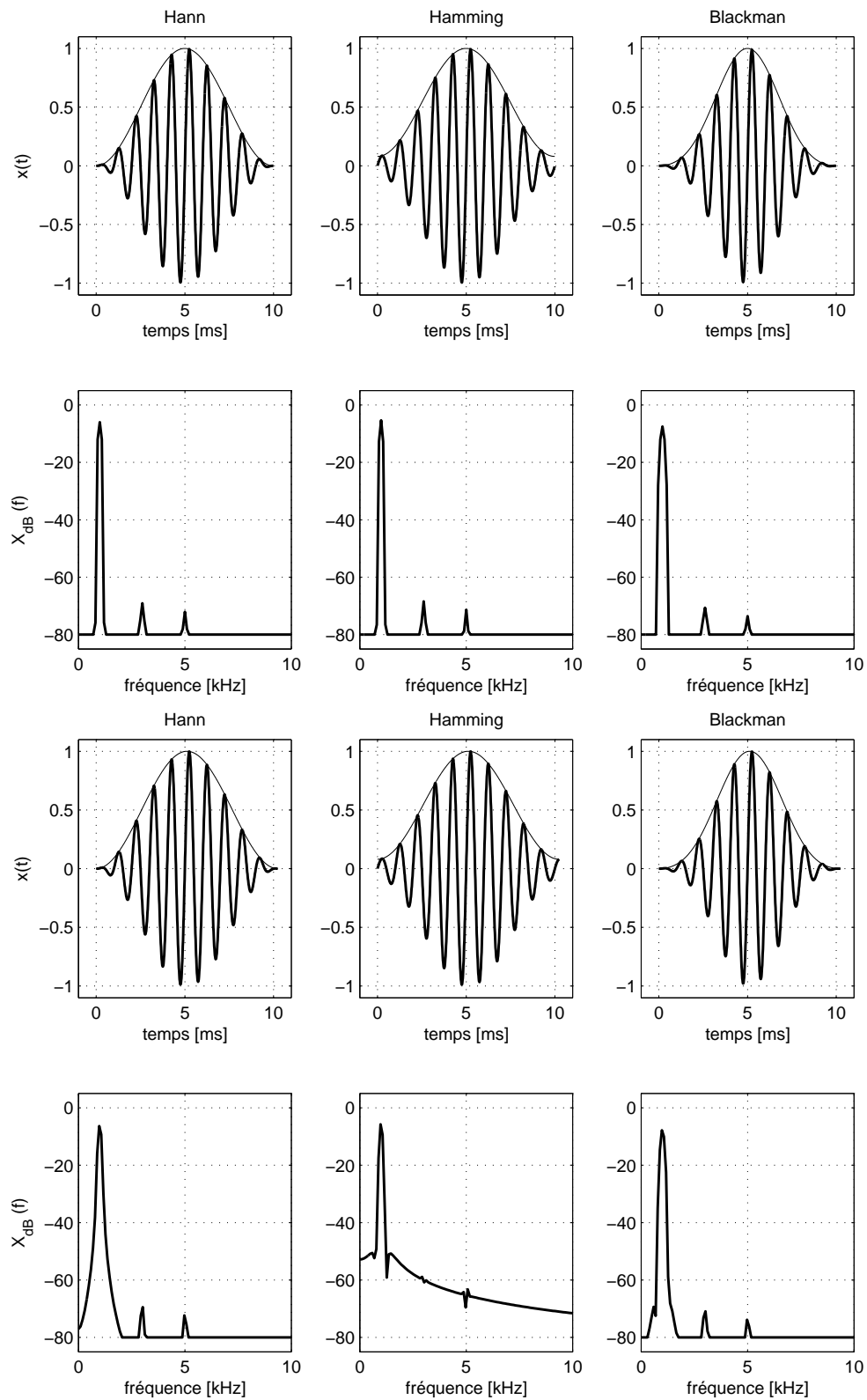


FIGURE 6.9.: Effet des fenêtres d'observation avec : (a) 10 périodes entières ; (b) 10.25 périodes

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

4. La *fenêtre de Blackman*, constituée de deux cosinus, atténue très fortement les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des **raies spectrales proches et de faibles amplitudes**.

6.6.4. Fenêtrage et traitement d'images

Tout ce qui vient d'être dit pour des signaux temporels est bien entendu valable pour des signaux bidimensionnels tels que des images. Et, en plus, visuellement parlant, les artefacts apparaissent de manière évidente. Comme illustration, considérons une image composée de grains de riz (figure 6.10).

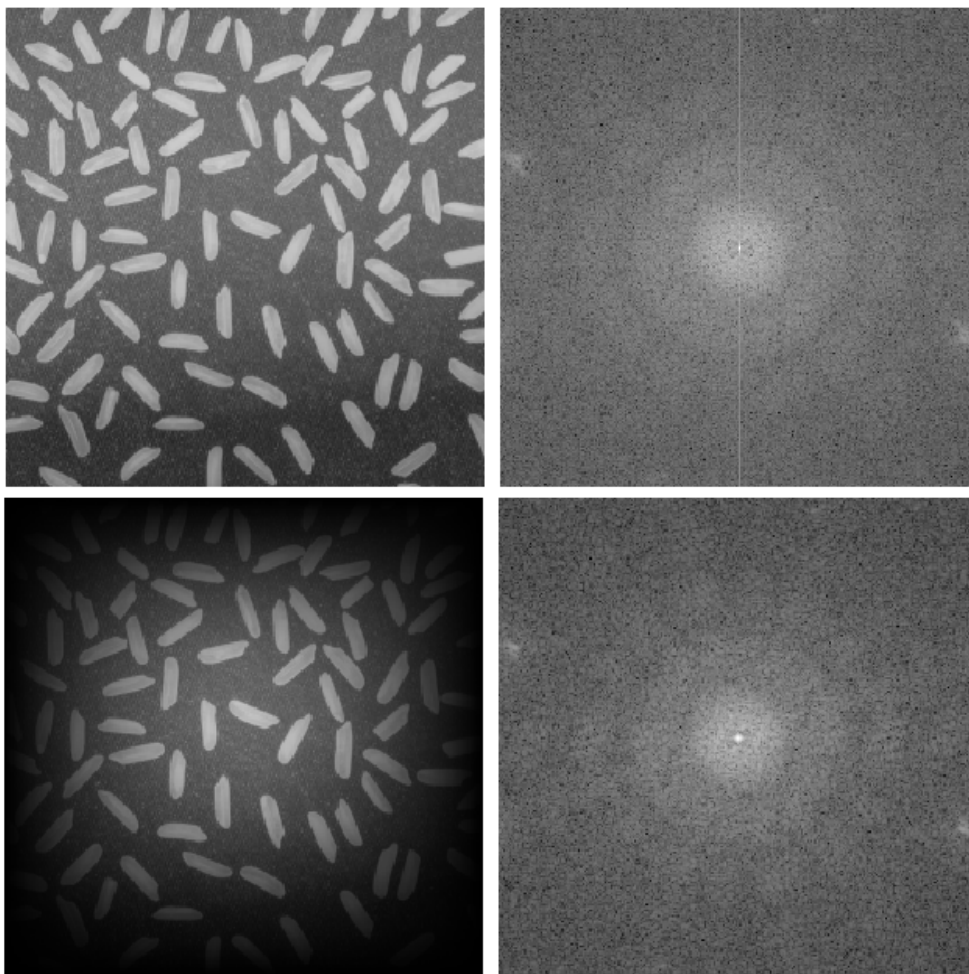


FIGURE 6.10.: Deux images (colonne de gauche) et leur transformée de Fourier respective (colonne de droite) ; a) sans fenêtrage, b) avec fenêtrage

En effectuant une FFT bidimensionnelle sur cette image, on voit apparaître une ligne claire verticale indiquant un contenu spectral fort selon l'axe Oy alors qu'aucune discontinuité ne semble apparaître dans l'image originale. En effectuant la même opération après un fenêtrage en cosinus, la ligne verticale a disparu. D'où cela peut-il bien provenir ?

6.7. Exemple 1: analyse spectrale élémentaire

En observant attentivement la figure originale, il semble que la partie inférieure de l'image soit légèrement plus sombre que le haut. Pour s'en assurer, formons, comme le voit la fonction FFT, une image constituée de deux périodes selon Ox et Oy (figure 6.11). Cette juxtaposition, équivalente à celle que voit la FFT, montre à l'évidence une variation brusque d'intensité selon l'axe Oy , cause de la ligne verticale dans l'espace de Fourier, alors qu'il n'y en a pratiquement pas selon l'axe Ox . De plus, en observant bien l'image de Fourier, on peut noter que la définition spectrale s'est améliorée grâce au fenêtrage.

[Réf : <http://blogs.mathworks.com/steve/2009/12/04/fourier-transform-visualization-using-windowing/>]

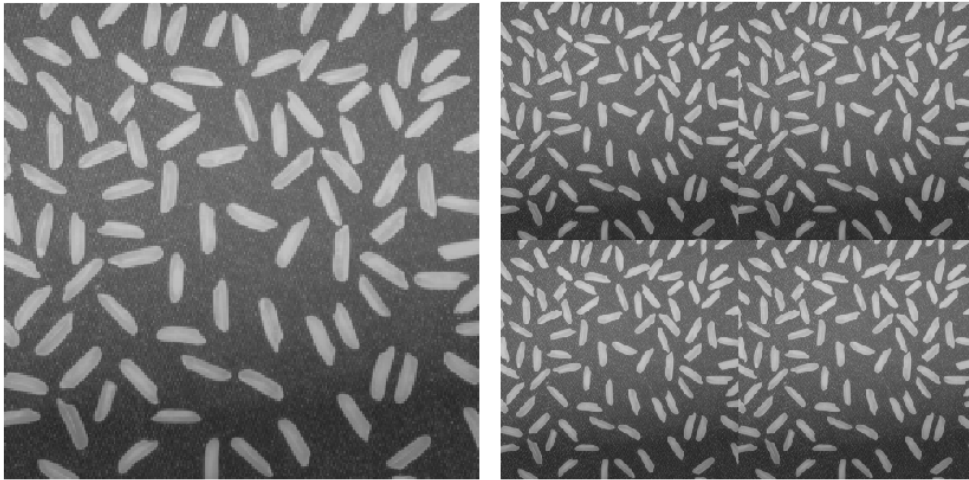


FIGURE 6.11.: Une image et sa réplication selon Ox et Oy

6.7. Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

Données On considère ici un signal temporel fortement bruité ($\text{SNR} \simeq 0$ dB) qui semble contenir une oscillation périodique dont on souhaite connaître la teneur (figure 6.12).

Analyse temporelle De l'enregistrement, on tire

1. la composante DC du signal et sa valeur efficace AC

$$X_{dc} = 0.045 \quad X_{ac} = 1.42$$

2. la période d'échantillonnage T_e et sa durée T

$$T_e = 20 \mu s \quad T = 20 \text{ ms}$$

3. le domaine d'analyse spectrale f_N et la définition spectrale Δf

$$f_N = \frac{1}{2} f_e = \frac{1}{2T_e} = 25 \text{ kHz} \quad \Delta f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

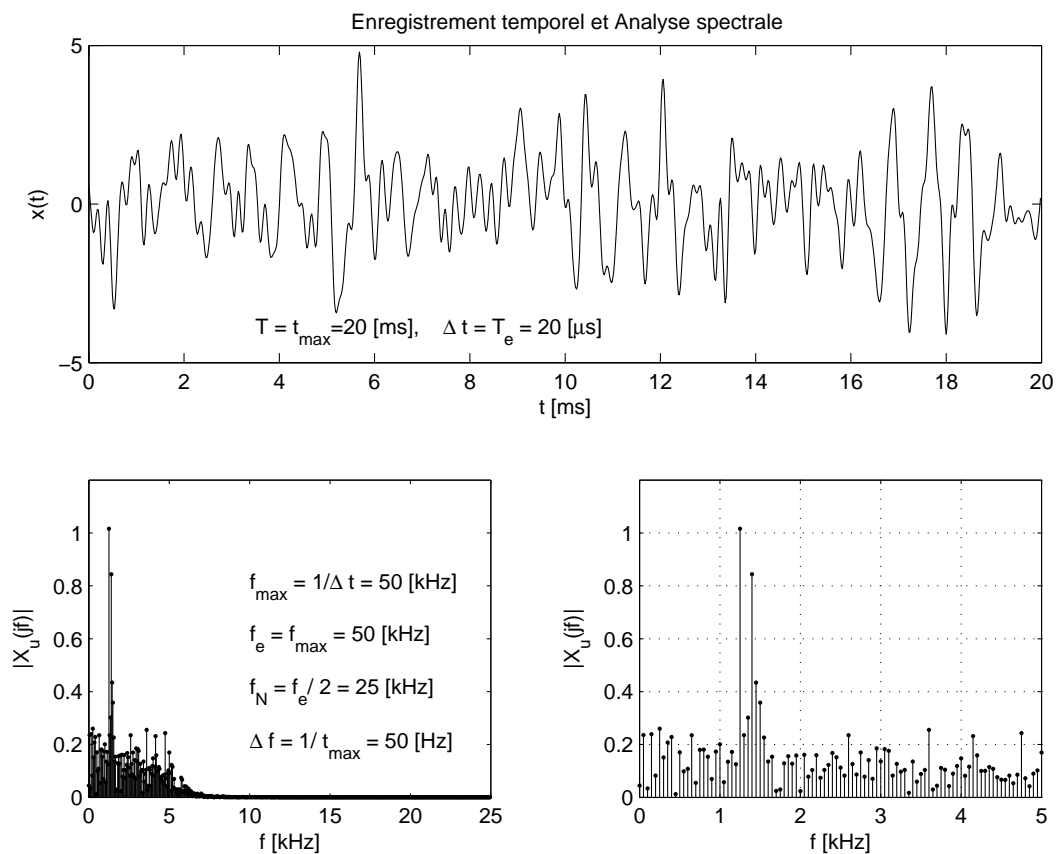


FIGURE 6.12.: Illustration de l'analyse spectrale avec :

- a) l'enregistrement temporel ;
- b) son spectre d'amplitudes pour $0 \leq f \leq f_e/2 = 25$ kHz ;
- c) un zoom spectral entre 0 et 5 kHz

Analyse spectrale Le programme des calculs temporels et spectraux se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```

% lecture de l'enregistrement
enreg = load('enreg.txt');
tt = enreg(:,1);
xt = enreg(:,2);
Xdc = mean(xt)
Xac = std(xt)

% analyse temporelle
Npts = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1)
duree = Npts * dt

% analyse spectrale
df = 1/duree, fmax = 1/dt
ff = 0:df:fmax-df;
Xjf = fft(xt)/Npts;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(Npts/2);
fk = ff(1:Ndemi);
Ak = 2*abs(Xjf(1:Ndemi));
Ak(1) = abs(Xjf(1));      % composante DC
ak = angle(Xjf(1:Ndemi));
subplot(2,1,1); stem(f,Ak,'.');

% estimation du rapport signal/bruit (SNR)
Px = Xdc^2 + Xac^2;      % puissance du signal + bruit = 2.023
A1 = 1.02; A2 = 0.85;    % amplitudes mesurées
Px0 = (A1^2 + A2^2)/2;   % puissance du signal original = 0.88
Pn = Px - Px0;          % puissance du bruit = 1.14
SNR = 10*log10(Px0/Pn)  % SNR = -1.12 dB

```

Les spectres d'amplitudes, présentés dans la figure 6.12, montrent que deux raies spectrales s'élèvent clairement au-dessus du niveau de bruit situé aux environs de 0.3. Ces deux raies spectrales ont une amplitude et une fréquence valant respectivement

$$A_1 \simeq 1.02 \quad f_1 = 1.25 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

$$A_2 \simeq 0.85 \quad f_2 = 1.40 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

La précision des fréquences mesurées est égale à la moitié de la définition spectrale Δf .

6.8. Exemple 2 : reconstruction d'un signal

Données Afin d'analyser et illustrer les résultats fournis par la TFD, on considère ici un signal connu

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \pi/4)$$

constitué de trois sinusoïdes d'amplitudes

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -0.8 \quad A_3 = 0.5$$

et de fréquences harmoniques

$$f_1 = 50 \text{ Hz} \quad f_2 = 150 \text{ Hz} \quad f_3 = 250 \text{ Hz}$$

Ce signal original est perturbé par un bruit important car le SNR ne vaut que +5 dB. Avec cet exemple, on souhaite :

1. montrer que, malgré la présence d'un fort bruit, il est possible de retrouver le signal original (tout au moins partiellement) ;
2. attirer l'attention sur le fait que d'une raie spectrale peuvent naître deux raies spectrales proches si l'incrément fréquentiel n'est pas un diviseur exact des fréquences présentes.

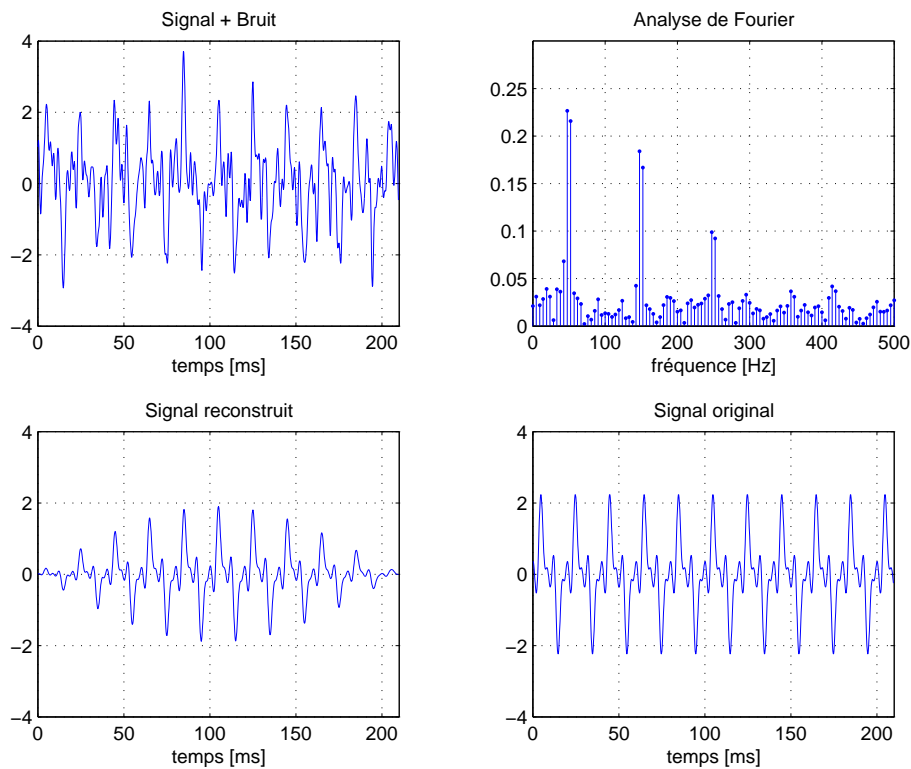


FIGURE 6.13.: Analyse spectrale et extraction des signaux

Analyse temporelle Le signal bruité a été enregistré avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.2$ ms et il a une durée $T = 210$ ms (figure 6.13a). Ceci permet de prévoir que le domaine des fréquences est caractérisé par :

– la fréquence de Nyquist

$$f_N = \frac{f_e}{2} = 2500 \text{ Hz}$$

– la définition spectrale

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{210 \text{ ms}} = 4.76 \text{ Hz}$$

On notera que la durée enregistrée $T = 210$ ms conduit à une définition spectrale $\Delta f = 4.76$ Hz qui n'est pas un sous-multiple des composantes spectrales. Cela fait que l'on sera dans l'impossibilité de trouver la valeur exacte des fréquences originales. Idéalement, on aurait dû prendre une durée de 200 ms permettant ainsi d'avoir une définition spectrale de 5 Hz. On pourrait bien entendu réduire la durée de l'enregistrement à 200 ms, mais ce n'est pas le but recherché.

Analyse spectrale L'observation du spectre obtenu après fenêtrage (figure 6.13b) montre que les trois raies spectrales sont bien visibles. Mais, on doit cependant constater que ces raies se sont dédoublées à cause de la définition spectrale non-entière et de l'utilisation de la fenêtre d'observation.

Le programme donné ci-dessous permet de rechercher ces raies spectrales. Les fréquences mesurées à ± 2.4 Hz près sont

$$f_{11} = 47.6 \text{ Hz} \quad f_{12} = 52.4 \text{ Hz}$$

$$f_{21} = 147.6 \text{ Hz} \quad f_{22} = 152.4 \text{ Hz}$$

$$f_{31} = 247.6 \text{ Hz} \quad f_{32} = 252.4 \text{ Hz}$$

Leurs amplitudes et phases respectives valent

$$\begin{array}{llll} A_{11} = 0.453 & A_{12} = 0.432 & \alpha_{11} = -0.151 \text{ rad} & \alpha_{12} = +2.98 \text{ rad} \\ A_{21} = 0.368 & A_{22} = 0.334 & \alpha_{21} = -2.87 \text{ rad} & \alpha_{22} = -0.275 \text{ rad} \\ A_{31} = 0.198 & A_{32} = 0.185 & \alpha_{31} = +0.372 \text{ rad} & \alpha_{32} = -2.65 \text{ rad} \end{array}$$

avec

$$A_k = 2 |X(jk)| \quad \alpha_k = \angle X(jk)$$

Reconstruction du signal original Connaissant les amplitudes et phases des composantes spectrales, il est aisé de reconstruire le signal non bruité :

$$x_r(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \alpha_k)$$

Malgré l'effet de la fenêtre d'observation utilisée avant d'effectuer la FFT et le fait qu'il y ait six fréquences au lieu de trois, le signal ainsi extrait (figure 6.13c) reproduit assez bien l'allure du signal original (figure 6.13d).

Programme d'analyse et recherche des composantes spectrales Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```
% signal bruité
yt = xt+nt;
Npts = length(yt);

% analyse spectrale avec une fenêtre de Hann
yht = yt'.*hann(Npts);
Yjf = fft(yht)/Npts;
df = 1/tmax; fmax = 1/dt;
ff = 0:df:fmax-df;

% recherche de N raies spectrales
Nraies = 6;
Yjf_tempo = Yjf(1:end/2);
for kn = 1:Nraies
    [Ymax, kf(kn)] = max(abs(Yjf_tempo));
    Yjf_tempo(kf(kn)) = 0; % mise à zéro de la valeur trouvée
end;

% reconstruction
xtr = zeros(size(yt));
for kn = 1:Nraies
    Xrjf = Yjf(kf(kn)); fr = ff(kf(kn));
    xtr = xtr + Xrjf*exp(+j*2*pi*fr*tt) + conj(Xrjf)*exp(-j*2*pi*fr*tt);
end;

% valeurs des composantes spectrales
fr = ff(kf)';
Ar = 2*abs(Yjf(kf))
ar = angle(Yjf(kf))
```

6.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

6.9.1. Données

On considère ici un signal permanent observé à l'oscilloscope. À partir de l'observation visuelle du signal, on désire choisir les paramètres d'acquisition qui permettront ensuite d'extraire toutes les informations possibles. L'acquisition se fera avec un convertisseur analogique-numérique 8 bits, ± 2 V.

6.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

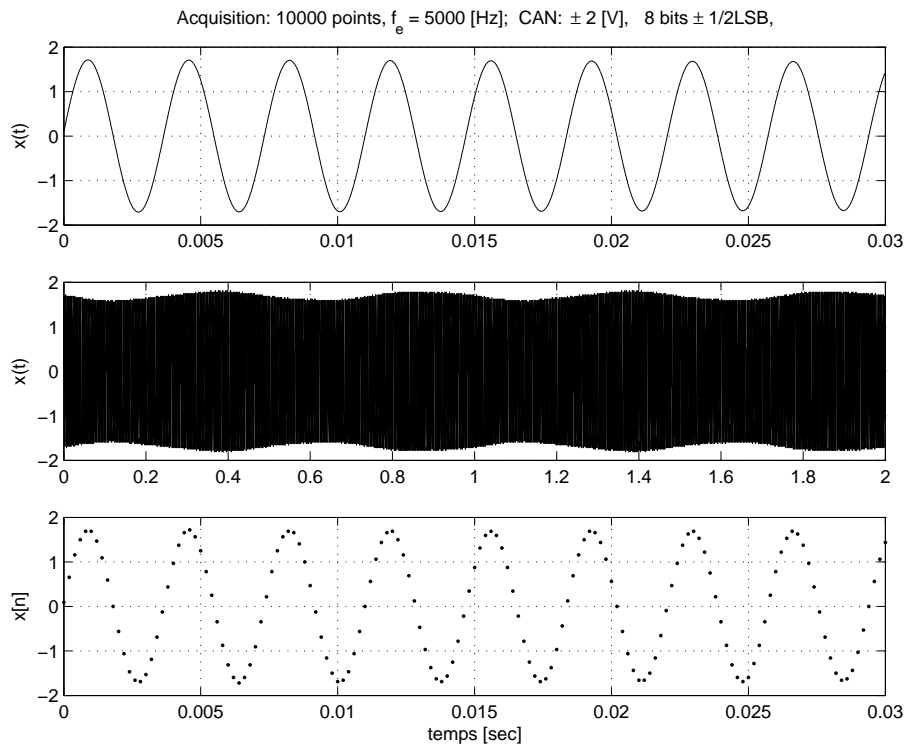


FIGURE 6.14.: Signal analysé

6.9.2. Signal temporel

Le signal $x(t)$ observé à l'oscilloscope (figure 6.14a) apparaît comme une sinusoïde caractérisée par son amplitude $A \simeq 1.7$ V et sa période $T_0 \simeq 3.68$ msec. Cependant, une observation de plus longue durée (figure 6.14b) montre un phénomène de battement de période $T_b \simeq 0.45$ sec ou de fréquence

$$f_b = \frac{1}{T_b} \simeq 2.2 \text{ Hz}$$

On en déduit que ce signal est composé d'au moins deux sinusoïdes de fréquences très proches

$$f_1 \simeq \frac{1}{T_0} \simeq 272 \text{ Hz} \quad f_2 = f_1 \pm f_b \simeq 270 \text{ ou } 274 \text{ Hz}$$

et d'amplitudes fort différentes car la variation d'amplitude de $x(t)$ est faible.

6.9.3. Paramètres d'acquisition

Afin d'avoir une définition temporelle raisonnable, on choisit

$$\Delta t \equiv T_e \simeq \frac{T_0}{10} = 0.35 \text{ msec} \simeq 0.2 \text{ msec}$$

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

et on en déduit la fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} = 5 \text{ kHz}$$

La figure 6.14c présente une partie du signal numérique ainsi acquis.

Comme il faut pouvoir distinguer deux raies distantes de $f_b \simeq 2 \text{ Hz}$, on choisira une définition spectrale suffisamment fine

$$\Delta f \simeq \frac{f_b}{4} = 0.5 \text{ Hz}$$

Sachant que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à la durée d'acquisition, on en tire

$$t_{acq} = \frac{1}{\Delta f} = 2 \text{ sec}$$

Le nombre de points acquis vaudra donc

$$N_{pts} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} = \frac{1}{0.5 \text{ Hz} \cdot 0.2 \text{ ms}} = 10'000$$

L'ensemble des valeurs acquises est représenté à la figure 6.14b.

6.9.4. Analyse spectrale

Utilisation de la FFT On a vu plus haut que l'algorithme FFT exige un nombre de points égal à une puissance de 2. Lorsque cela n'est pas le cas, on complète la suite de valeurs acquises par une succession de zéros permettant d'atteindre un nombre de valeurs égal à la puissance de 2 la plus proche (figure 6.15a).

Du point de vue de l'analyse de Fourier, cela ne change rien aux résultats fournis ; seule la résolution spectrale est améliorée. Dans notre cas, on passera donc de $N_{pts} = 10'000$ à $N_{fft} = 16'384$ et la résolution fréquentielle passera ainsi de

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{5000}{10'000} = 0.5 \text{ Hz}$$

à

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{fft}} = \frac{5000}{16'384} = 0.305 \text{ Hz}$$

Fenêtre rectangulaire Dans ce cas, l'analyse spectrale de la suite de valeurs acquises $x[n]$ fournit les spectres présentés dans les figures 6.15b et 6.17a. Le spectre ainsi obtenu fait apparaître une seule raie spectrale aux environs de 270 Hz et, contrairement à ce que l'on attendait, il n'y a pas de deuxième raie spectrale. Manifestement, celle-ci est masquée par l'étalement spectral dû au nombre non entier de périodes.

6.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

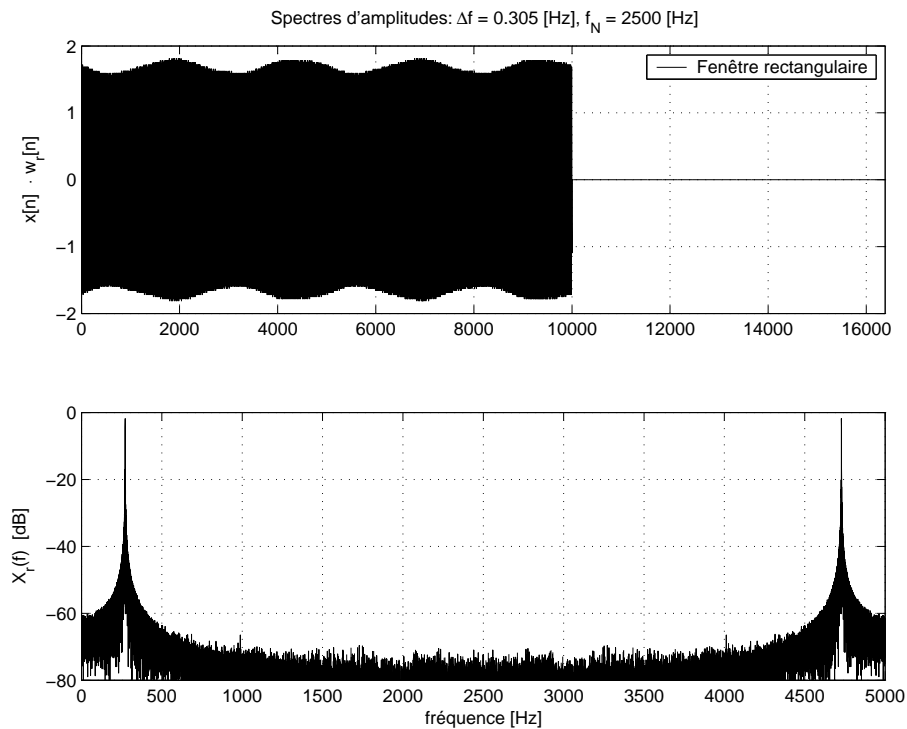


FIGURE 6.15.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre rectangulaire

Fenêtre de Blackman On est donc amené à fenêtrer le signal acquis en le multipliant par une fonction atténuant les effets de bord dus à l'acquisition effectuée. On choisit ici d'utiliser la fenêtre de Blackman définie comme suit :

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N_{pts}$$

Du point de vue numérique, on analysera donc le signal

$$x_w[n] = x[n] \cdot w_b[n]$$

Après avoir complété le signal fenêtré par des zéros pour atteindre une puissance de 2 (figure 6.16a), on obtient les résultats présentés dans les figures 6.16b et 6.17b où le niveau de bruit causé par l'étalement spectral a pratiquement disparu.

Zoom fréquentiel Étant donné la haute définition spectrale, obtenue au prix d'un long enregistrement, les échelles globales ne permettent pas de voir le détail des raies attendues. Il faut donc zoomer sur la zone intéressante. On voit alors très nettement que la fenêtre rectangulaire (figure 6.17a) est totalement incapable de fournir les informations attendues alors qu'avec la fenêtre de Blackman (figure 6.17b), on retrouve bien la deuxième fréquence recherchée et on peut même apercevoir la présence d'une troisième composante spectrale d'amplitude encore plus faible, qui n'était absolument pas perceptible au niveau temporel.

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

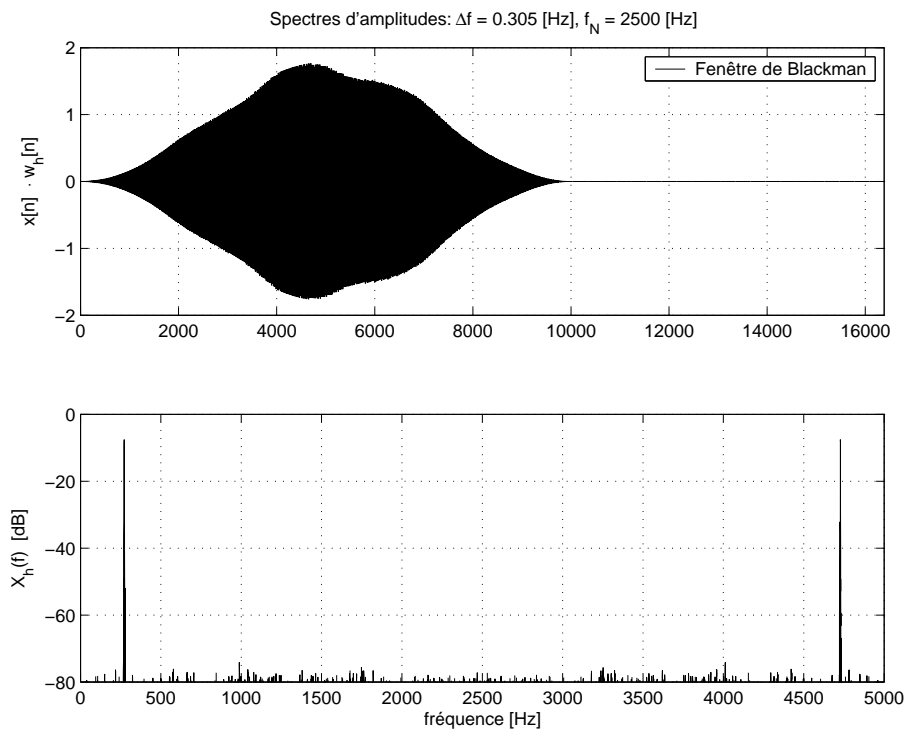


FIGURE 6.16.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre de Blackman

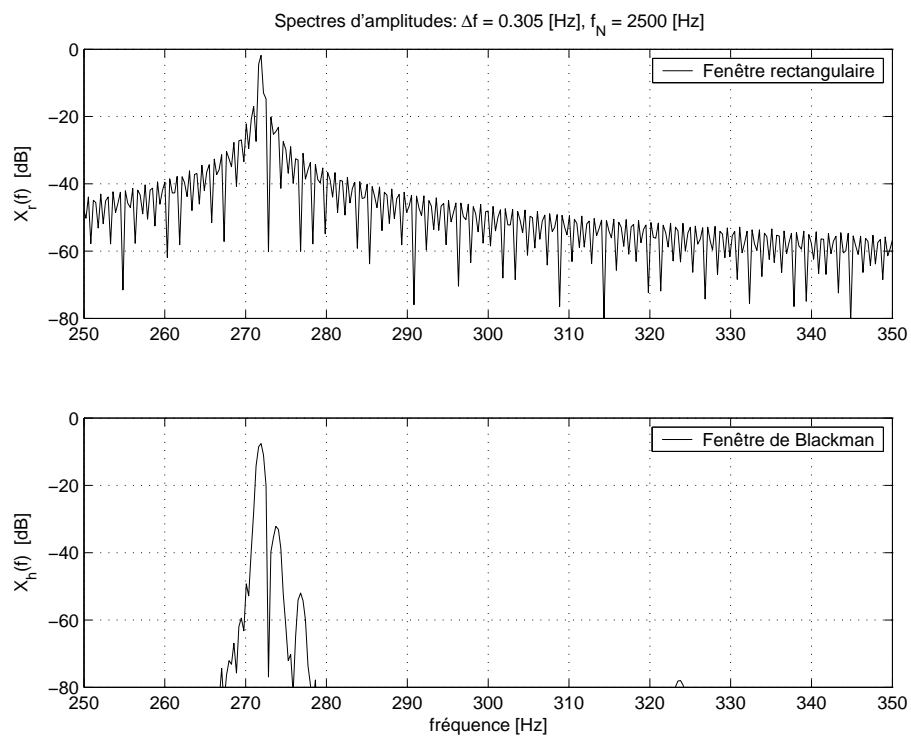


FIGURE 6.17.: Agrandissement spectral

6.9.5. Estimation des amplitudes

Le spectre d'amplitudes de la figure 6.17b permet de mesurer les fréquences des trois composantes spectrales du signal $x(t)$ et les amplitudes relatives des raies spectrales.

k	f_k	$X_{k,dB}$	$X_{k,dB} - X_{1,dB}$	X_k/X_1
1	272 Hz	-7.6	0	1
2	274 Hz	-32.2	-24.6	0.059
3	277 Hz	-52	-44.4	0.006

Il est important de noter que les amplitudes spectrales dépendent de la fenêtre choisie et que seules leurs valeurs relatives peuvent en être déduites

$$\frac{X_k}{X_1} = 10^{(X_{k,dB} - X_{1,dB})/20}$$

Pour obtenir la valeur réelle des amplitudes, on peut passer par l'égalité de Parseval :

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T x_{ac}^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} \left(1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \right)$$

Ce qui donne dans notre cas

$$P_{ac} = \frac{A_1^2}{2} (1 + 0.059^2 + 0.006^2) = 1.00352 \frac{A_1^2}{2}$$

À partir du signal acquis, on calcule aisément sa puissance :

$$P_{ac} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \mu_x)^2 = \text{var}(x[n]) = 1.45$$

On en déduit alors la valeur de A_1 et celles des autres composantes :

$$A_1 = \sqrt{\frac{2 P_{ac}}{1.00352}} = 1.70$$

$$A_2 = 0.059 A_1 = 0.1$$

$$A_3 = 0.006 A_1 = 0.01$$

Remarque Une correction des amplitudes spectrales tenant compte de la fenêtre utilisée n'est possible que si le signal acquis possède exactement un nombre entier de périodes. Si cette condition est remplie, il suffit alors de diviser les amplitudes spectrales par la valeur moyenne de la fenêtre : $A_k \rightarrow A_k/\mu(w)$. Ce calcul doit être évité si l'on n'est pas sûr que la condition est remplie.

6.9.6. Détail du calcul des signaux et des spectres

Le fichier créé pour générer le signal $x(t)$, calculer et tracer les spectres dans différentes conditions est donné ci-dessous. Bien qu'il puisse paraître volumineux au premier abord (beaucoup de lignes sont consacrées au traçage uniquement), les parties essentielles de ce fichier sont simplement :

1. la conversion analogique- numérique ± 2 V avec $N_{bits} \pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité (on admet que celle-ci entraîne la perte d'un bit) :
 - `Ucan = 4; Nbits = 8;`
 - `xn = Ucan*round((xn0/Ucan)*(2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1));`
2. le fenêtrage :
 - `wk = (blackman(length(xn)))'`;
 - `xnwk = xn.*wk;`
3. l'ajout de zéros et le calcul du spectre :
 - `Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)));`
 - `xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xn))];`
 - `Xjfh = fft(xnwk)/length(xnwk);`

Initialisation Le programme débute par l'initialisation des paramètres et la création du signal vu sur l'écran de l'oscilloscope

```
% analyse spectrale
clear all; close all; format compact; clc;

% parametres du signal
amp1 = 1.7; amp2 = 0.1; amp3 = 0.01;
f1 = 271.828; f2 = f1+2; f3 = f1+5;
% oscilloscope
tosc = 0.03; kosc = 2000;
dt = tosc/kosc;
tt = 0:dt:tosc-dt;
xt0 = amp1*sin(2*pi*tt*f1)+amp2*cos(2*pi*tt*f2)+amp3*sin(2*pi*tt*f3);
```

Acquisition numérique Il se poursuit avec l'acquisition et la conversion sur une durée plus longue

```
% acquisition
tacq = 2;
Te = 0.2e-3;
tn = 0:Te:tacq-Te;
xn0 = amp1*sin(2*pi*tn*f1)+amp2*cos(2*pi*tn*f2)+amp3*sin(2*pi*tn*f3);
% conversion +/- 2V avec Nbits et +/- 1/2LSB de non linearite
Ucan = 4; Nbits = 8;
xn = Ucan*round(xn0/Ucan*2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1);
```

Calcul des spectres Une fois les signaux acquis, on peut calculer leurs spectres et afficher des informations

```
% calcul des spectres
Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)))
% fenetres rectangulaire et de Blackman
wr = ones(size(xn));
wk = (blackman(length(xn)))';
xnwr = xn.*wr;
xnwk = xn.*wk;
% ajout de zeros
xnwr = [xnwr, zeros(1,Nfft-length(xnwr))];
xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xnwk))];
% fft
Xjfr = fft(xnwr)/length(xn);
Xjfh = fft(xnwk)/length(xn);
% domaine spectral
fmax = 1/Te;
df = fmax/Nfft;
ff = 0:df:fmax-df;
% infos
Nbits, tacq, Te, fmax, df
Pac = var(xn)
Npoints = round(tacq/Te), Nfft
```

Graphes On trace les signaux acquis

```
% graphes temporels
figure;
subplot(3,1,1);
plot(tt,xt0); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
texte = ['Acquisition: ', num2str(round(tacq/Te)), ' points,'];
texte = [texte, ' f_e = ', num2str(1/Te,4), ' [Hz];'];
texte = [texte, ' CAN: \pm ', num2str(Ucan/2,2), ' [V], '];
texte = [texte, ' ', num2str(Nbits,2), ' bits \pm 1/2LSB,'];
title(texte);
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2)
plot(tn,xn); grid;
axis([0,tacq,-2,2])
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,3); % zoom
plot(tn,xn, '.'); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
ylabel('x[n]');
xlabel('temps [sec]');
print -deps ansptemps.eps
```

ainsi que les spectres après fenêtrage

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
% spectres
figure; % fenetre rectangulaire
subplot(2,1,1);
plot(xnwr); grid;
axis([0,Nfft,-2,2])
texte = ['Spectres d'amplitudes: \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_r[n]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_r(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwr.eps
figure; % fenetre de Blackman
subplot(2,1,1);
plot(xnwk); grid;
axis([0,Nfft,-2,2])
texte = ['Spectres d'amplitudes: \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_h[n]');
legend('Fenêtre de Blackman');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwk.eps
```

Zoom Les détails sont mis en évidence

```
% zoom spectral
fz1 = 250; fz2 = 350; % domaine interessant
dbmax = 80;
figure;
subplot(2,1,1);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); hold on;
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
title(texte);
ylabel('X_r(f) [dB]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh)));
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
```

6.9. Exemple 3: analyse spectrale détaillée

```
    legend('Fenêtre de Blackman');  
print -deps anspzoom.eps
```

6.10. Exercices

TFD 0

1. Montrez que le passage de l'analogique vers le numérique se fait bien avec les deux relations discrètes $X[jk]$ et $x[n]$ de la figure 6.5.
2. Considérant la suite de quatre valeurs $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$, calculez son spectre $X[jk]$. Dessinez la suite $x[n]$ et un signal analogique périodique $x(t)$ lui correspondant.
3. Calculez le signal périodique $x_F(t)$ correspondant à la suite $x[n]$ au sens de Fourier.

TFD 1

L'analyse spectrale, par la FFT, d'un signal $x[n]$ constitué de $N = 8$ valeurs a fourni le spectre discret $X_D[jk]$ partiellement donné dans le tableau ci-dessous.

1. Complétez le tableau sachant que $f_e = 1$ [kHz].
2. Vu par le processeur FFT, le signal temporel $x[n]$ est-il continu, discret, périodique ?
3. Que valent $x[n = 0]$ et X_{dc} ?
4. Quelle est l'expression permettant de calculer $x[n]$? Montrez quelle peut s'écrire sous la forme

$$x[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_D[jk] \exp\left(j \frac{k\pi}{4} n\right)$$

5. Calculez quelques valeurs de $x[n]$.

k ou n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k [kHz]											
$X_D[jk]$	2	$1 + j$	$1 - j$	$+j$	1						
$ X_D[jk] $ $\angle X_D[jk]$											
A_k											
α_k											
$x[n]$											

TFD 2 On souhaite calculer le spectre d'une impulsion rectangulaire de largeur $\Delta t = 3$ [msec] et d'amplitude $A = 5$ [V]. Pour ce faire, on acquiert 8 points à la fréquence $f_e = 1$ [kHz].

1. Admettant que l'échantillonnage commence à l'apparition du flanc montant, dessinez $x(t)$ et $x[n]$. Discutez les valeurs choisies pour $x[n]$ lorsque $n = 0$ et $n = 3$.

2. Que vaut la durée d'acquisition t_{max} ?
3. Quel sera le domaine spectral analysé ; que vaudra l'incrément de fréquence Δf ?
4. Calculez $X_D[jk]$ pour $k = 0$ et $k = 2$; quel est le domaine de variation du compteur k des fréquences ?
5. Validez votre résultat en analysant la valeur de $X_D[jk = 0]$.

TFD 3 Considérant la suite de valeurs $x[n]$ ci-dessous :

n	-m	-m+1	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...	+m-1
$x[n]$	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0

1. Esquissez $x[n]$ et une fonction $x(t)$ passant par ces points.
2. Calculez $X_D[jk]$; sa valeur dépend-elle de la longueur $N = 2m$ de la suite ?
3. Qu'est ce qui change si on ajoute des zéros pour doubler le nombre d'échantillons ?

TFD 4 On considère un signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)$ de période $T_0 = 1$ ms. Sachant que ce signal est échantillonné pendant une période à la fréquence $f_e = 8 f_0$:

1. Calculez et dessinez la suite de valeurs $x[n]$.
2. Complétez le tableau ci-dessous avec $x[n]$ et le spectre bilatéral fourni par la décomposition en série de Fourier puis justifiez les résultats $X_D[jk]$ fournis par la la FFT en précisant la relation qui les lie.
3. On échantillonne le signal $x(t)$ sur 4 périodes ; que donnera la FFT ?

n ou k	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$x[n]$								
$X_{SF}[jk]$								
$X_D[jk]$	0	0	4	4	0	4	4	0

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

TFD 5 On échantillonne une exponentielle décroissante

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \epsilon(t) \text{ où } A = 5 \text{ [V]}, \tau = 5 \text{ [msec]}$$

avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ [msec]}$.

1. Que vaut la densité spectrale $X(jf)$ du signal $x(t)$?
2. Calculez la suite des valeurs $x[n]$; exprimez la sous la forme $x[n] = A \cdot r^n$.
3. Calculez la TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$.
4. On ne prend en compte que les 16 premières valeurs de la suite $x[n]$ et on annule les autres ; que vaut $X_{e,N}(jf)$.
5. Considérant la suite temporelle tronquée $x_N[n]$ avec $N = 16$, on discrétise l'axe des fréquences. Que vaut l'incrément fréquentiel ? Calculez le spectre discret $X_D[jk]$.
6. Que valent, pour chacun des spectres ci-dessus ($X(jf)$, $X_e(jf)$, $X_{e,N}(jf)$, $X_D[jk]$), les composantes spectrales lorsque $f = 0$?

AnSp 1 Lors de l'analyse spectrale d'un signal échantillonné $x[n]$, les paramètres N , T_e , t_{max} et f_e , Δf sont reliés entre eux ; la donnée de deux d'entre eux suffit pour fixer tous les paramètres de l'analyse. Rappelez ces relations puis complétez le tableau ci-dessous.

N	T_e	t_{max}	Δf	f_e
40				2 kHz
	1 msec		50 Hz	
50		10 msec		
100			10 Hz	
			20 Hz	1 kHz
	2 msec	1 sec		
30	1 msec			
		5 msec		5 kHz

AnSp 2 On doit faire l'analyse spectrale numérique des signaux suivants

1	une sinusoïde	5	une impulsion triangulaire
2	une réponse indicielle	6	un signal chirp (wobulé)
3	une impulsion rectangulaire	7	une exponentielle décroissante
4	une suite d'impulsions rectangulaires	8	un signal triangulaire périodique

Pour chacun des signaux :

1. Esquissez leur allure temporelle.
2. Choisissez-vous une fenêtre rectangulaire ou en cosinus ?
3. Précisez les raisons de votre choix.

AnSp 3 On considère ici le signal

$$x(t) = 3 + 4 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(4\pi f_0 t), \quad f_0 = 100 \text{ Hz}$$

représenté à la figure 6.18 dont on a enregistré deux périodes. Sachant qu'on souhaite obtenir numériquement son spectre $X[jk]$, on l'échantillonne avec une période $T_e = 1$ msec.

1. Dessinez les points échantillonnés $x[n]$. Quelle fenêtre faut-il utiliser avant l'analyse spectrale ?
2. Que valent N , t_{max} , f_e , Δf ?
3. Quelles raies spectrales seront présentes ? Quel sera le nombre de valeurs spectrales analysées ?
4. Donnez les fréquences, les amplitudes et les phases de chaque valeur spectrale $X[jk]$, $k = 0, \dots, N - 1$.
5. Quel serait le résultat de l'analyse spectrale si l'on avait échantillonné six périodes au lieu de deux ?

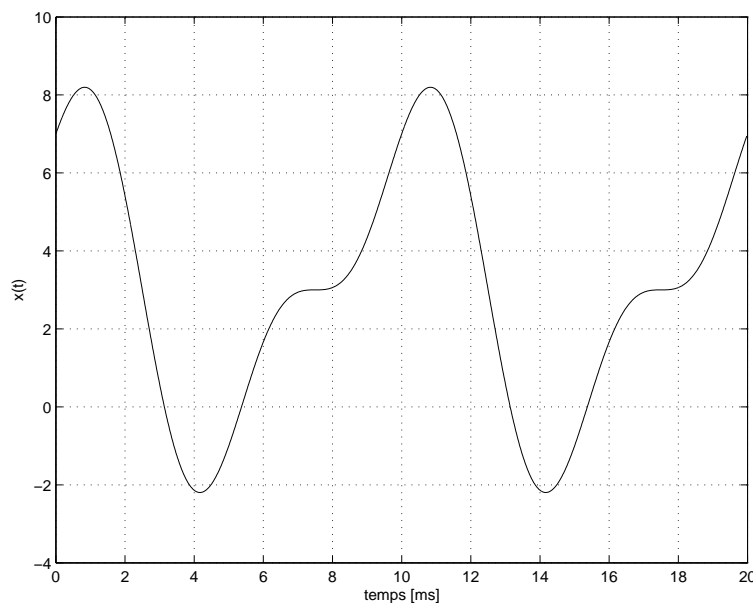


FIGURE 6.18.: Ex AnSp 3

AnSp 4 On considère le signal

$$x(t) = 1 + 5 \sin(2\pi f_a t) + 2 \sin(2\pi f_b t), \quad f_a = 1 \text{ [kHz]}, \quad f_b = 1.5 \text{ [kHz]}$$

1. Quelle est la période de ce signal ? Dessinez le spectre unilatéral de $x(t)$. Que valent X_{dc} et X_{ac} ?
2. Son enregistrement a été effectué avec une période d'échantillonnage de 125 μsec pendant exactement 10 msec.
 - a) Quel sera le domaine d'analyse spectrale et sa résolution.

6. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

- b) Pensez-vous devoir utiliser une fenêtre d'observation? Si oui, laquelle choisissez-vous et pourquoi?
 - c) Les raies spectrales fournies par la FFT seront-elles situées aux fréquences attendues? Sinon, précisez la valeur de ces fréquences.
3. Idem 2), si l'enregistrement a duré exactement 11 msec.

Bibliographie

- [1] Randall R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1987
- [2] Frederic J. Harris : *On the use of windows for harmonic analysis with DFT*, Proceedings of IEEE, vol. 66, no.1, january 1978
- [3] Cooley J.W., Tukey J.W., “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965
- [4] Burrus C.S., Parks T.W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985
- [5] B.P. Lathy, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992

7. Description et comparaison des signaux

Ce chapitre présente et analyse quelques signaux types avant de définir et illustrer l'utilisation des fonctions d'auto- et d'intercorrélation au travers de trois exemples concrets. Il se termine par une présentation succincte des signaux aléatoires, de quelques modèles associés et de leurs relations spectrales et temporelles.

7.1. Classification des signaux

Sans entrer dans les détails de la classification des signaux, il faut mentionner que plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, on en citera deux :

- la classification phénoménologique qui met l'accent sur le comportement temporel du signal ;
- la classification énergétique où l'on classe les signaux suivant qu'ils sont à énergie finie ou à puissance finie.

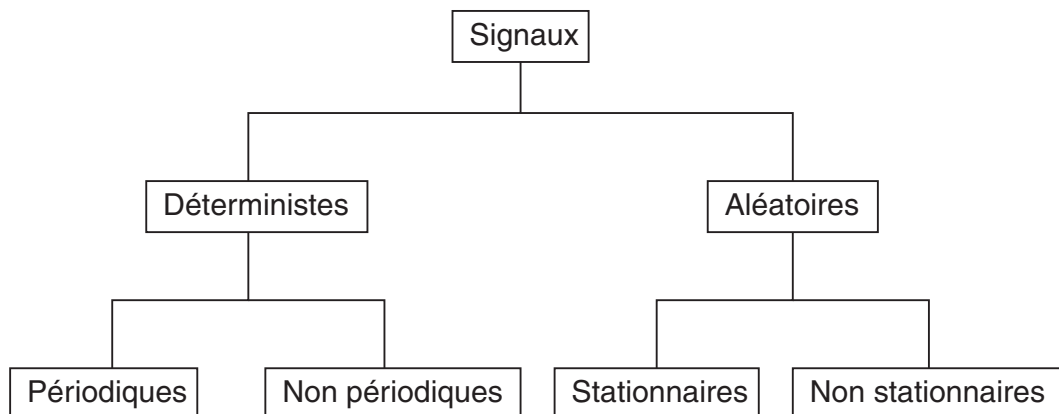


FIGURE 7.1.: Classification phénoménologique des signaux

7.1.1. Classification phénoménologique

Dans cette classification, on répartit généralement les signaux en deux classes principales et quatre sous-classes illustrées par la figure 7.1.

Dans les deux classes principales, on trouve :

- les signaux déterministes dont l'évolution temporelle parfaitement définie peut être prédite par un modèle mathématique approprié ;

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

– les signaux aléatoires qui ont un comportement temporel imprévisible et dont la description ne peut se faire qu’au travers d’observations statistiques.

Parmi les *signaux déterministes* (figure 7.2.1), on distingue :

- les signaux périodiques dont la forme se répète régulièrement ;
- les signaux pseudo-aléatoires qui sont des signaux périodiques mais avec, à l’intérieur de la période, un comportement aléatoire ;
- les signaux quasi-périodiques qui résultent d’une somme de sinusoides dont le rapport des périodes n’est pas rationnel ;
- les signaux non-périodiques ; ils sont essentiellement représentés par des signaux transitoires dont l’existence est éphémère.

Parmi les *signaux aléatoires* (figure 7.2.2), on distingue :

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (p.ex : le bruit électronique) ;
- les signaux non-stationnaires dont le contenu statistique évolue au cours du temps (p.ex. : la parole).

7.1.2. Énergie et puissance des signaux

Considérant la puissance moyenne P_x ou l’énergie totale W_x des signaux, on observe que ceux-ci peuvent alors être classés dans une des deux catégories suivantes :

1. Les signaux à énergie finie tels que

$$W_x < \infty \text{ alors que } P_x = 0$$

Dans cette catégorie, on rencontre tous les signaux temporaires qu’ils soient déterministes ou aléatoires.

2. Les signaux à puissance finie tels que

$$P_x < \infty \text{ alors que } W_x \rightarrow \infty$$

Cette catégorie englobe les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux permanents aléatoires ou non.

Suivant les caractéristiques des signaux, on calculera donc soit leur puissance P_x , soit leur énergie W_x . Selon Parseval, ce calcul peut, bien entendu, se faire dans le domaine temporel

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.1)$$

$$W_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (7.2)$$

ou dans celui des fréquences :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2] \quad (7.3)$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (7.4)$$

à condition d’avoir à sa disposition

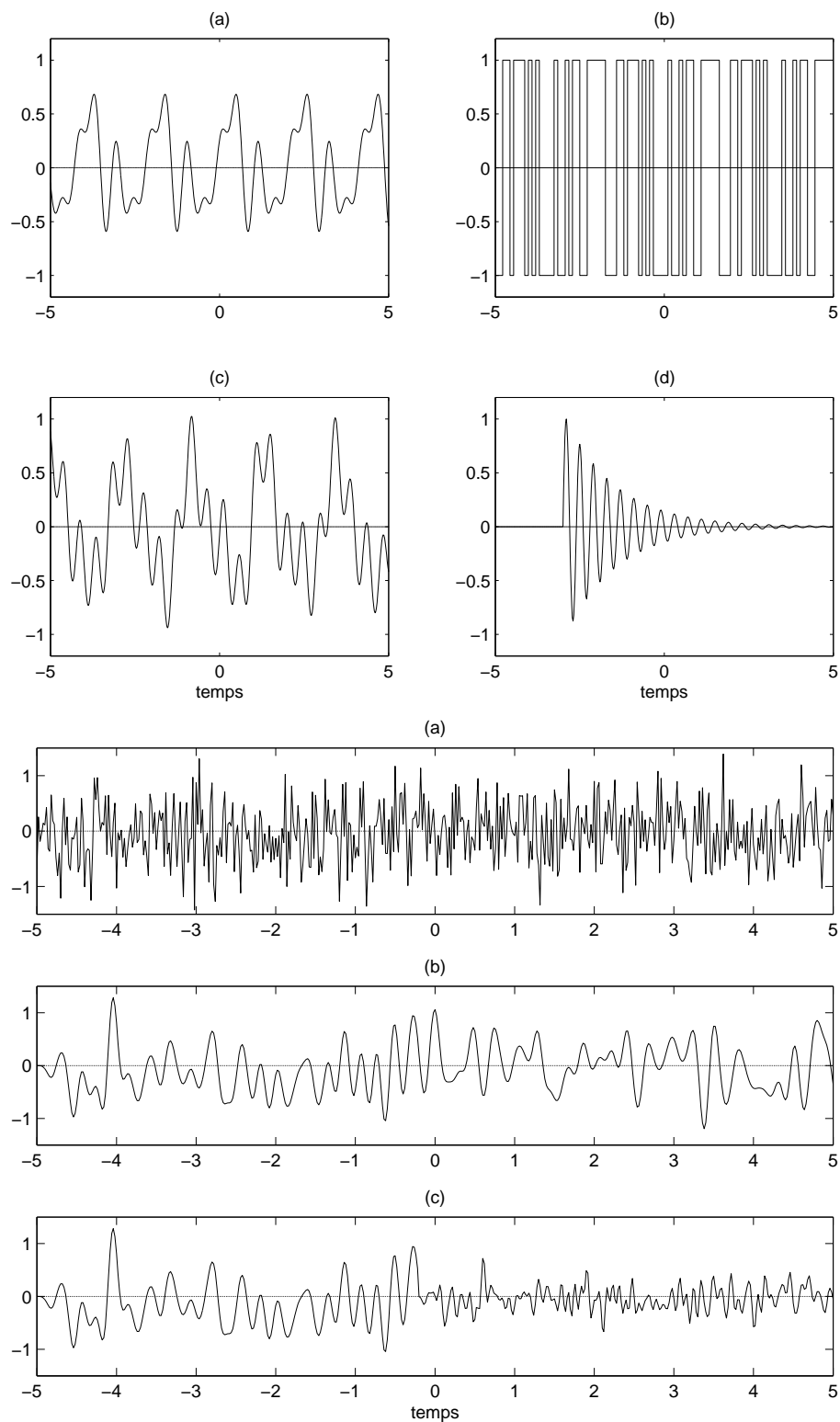


FIGURE 7.2.: 1) Quatre signaux déterministes : (a) périodique, (b) pseudo-aléatoire, (c) quasi-périodique, (d) non-permanent.
 2) Trois signaux aléatoires : (a) bruit blanc (spectre infiniment large et constant), (b) bruit large bande (spectre de largeur finie), (c) bruit non-stationnaire.

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

- la densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ qui s'exprime en $[\text{V}^2/\text{Hz}]$
- ou
- la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ dont les unités sont $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$.

On notera que, pour le calcul de la puissance des signaux périodiques, la durée d'intégration T sera prise égale à une période T_0 du signal. On se souviendra également que la puissance moyenne P_x d'un signal $x(t)$ est, par définition, égale au carré de sa valeur efficace

$$P_x \equiv X_{eff}^2$$

Enfin, il faut relever que certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune des deux catégories présentées ci-dessus. C'est le cas, par exemple, de l'exponentielle $x(t) = e^{-at} \quad -\infty < t < \infty$.

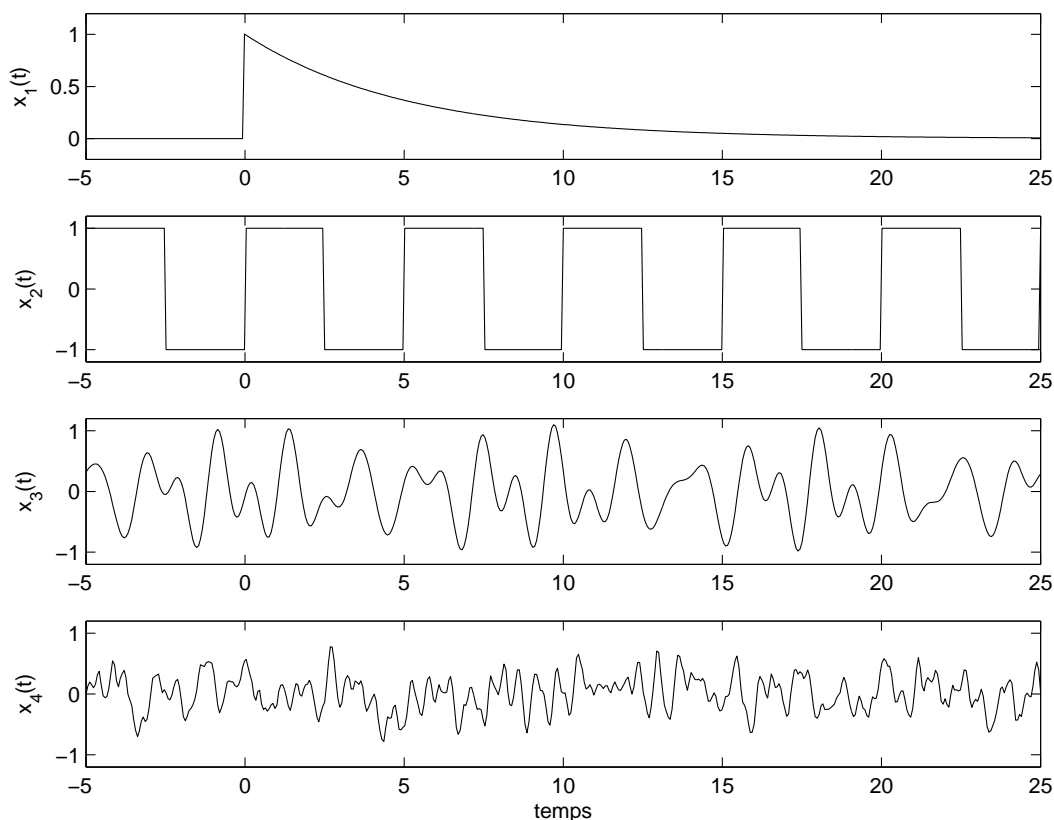


FIGURE 7.3.: Quatre signaux types : (a) déterministe temporaire, (b) déterministe permanent périodique, (c) quasi-périodique permanent, (d) aléatoire à bande étroite

7.2. Quatre signaux types

Afin de clarifier les choses, considérons comme exemple des signaux-types (figure 7.3) illustrant les quatre classes de signaux :

1. **Déterministes temporaires** tels que l'exponentielle amortie $x_1(t)$ ou les signaux périodiques de durée finie.
2. **Permanents et périodiques** tels que le signal carré $x_2(t)$.
3. **Permanents quasi-périodiques** tels que le signal $x_3(t)$ constitué de quatre composantes spectrales non rationnelles.
4. **Aléatoires stationnaires permanents** tels que $x_4(t)$ pour lequel il n'existe pas de description temporelle.

7.2.1. Signaux déterministes temporaires

Les signaux déterministes temporaires tels que $x_1(t)$ sont des signaux à puissance moyenne nulle mais énergie finie. Ils possèdent un spectre continu défini par leur densité spectrale d'amplitude. Celle-ci n'est autre que la transformée de Fourier du signal :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] = [\text{V/Hz}] \quad (7.5)$$

Leur énergie se calcule soit au niveau temporel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{sec}]$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.6)$$

à partir de la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ exprimée en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$. Dans le cas des signaux temporaires, on peut montrer que la densité spectrale d'énergie est liée à la densité spectrale d'amplitude par la relation

$$S_x(f) = X(jf) \cdot X(jf)^* = |X(jf)|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.7)$$

Exemple L'exponentielle décroissante $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = 0$$

$$W_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = \frac{A^2}{2a} = \frac{A^2 \tau}{2} < \infty \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.8)$$

Cette énergie peut également se calculer dans le domaine fréquentiel. En effet, comme au signal $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ correspond la densité spectrale d'amplitude

$$X_1(jf) = \frac{A}{a + j2\pi f} \quad (7.9)$$

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

on peut calculer sa densité spectrale d'énergie $S_1(f)$:

$$S_1(f) = |X_1(jf)|^2 = \left| \frac{A}{a + j2\pi f} \right|^2 = \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.10)$$

puis son énergie

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} df \quad (7.11)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi a} \operatorname{atg} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A^2}{2a} \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.12)$$

7.2.2. Signaux permanents périodiques

Un signal déterministe permanent est un signal périodique dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] \quad (7.13)$$

Pour tous signaux périodiques, on obtient alors une densité spectrale d'amplitude constituée d'impulsions de Dirac. Ces impulsions correspondent aux raies spectrales du signal périodique qui, comme on le sait, possède un spectre discret.

Plutôt que de travailler avec les impulsions de Dirac, il est alors plus simple et plus pratique d'en rester à la description bien connue des séries de Fourier

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad [\text{V}] \quad (7.14)$$

La puissance des signaux périodiques se calcule soit au niveau temporel

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.15)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad [\text{V}^2] \quad (7.16)$$

Exemple Le signal carré $x_2(t)$ d'amplitude A possède une puissance finie et une énergie infinie :

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt = A^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (7.17)$$

$$W_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt \rightarrow \infty$$

Dans le domaine fréquentiel, partant des composantes de Fourier du signal carré périodique d'amplitude A et à valeur moyenne nulle

$$X(jk) = 2A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(\pi k f_0 \Delta t)}{\pi k f_0 \Delta t} = A \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2A}{k\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (7.18)$$

on peut calculer, sa densité spectrale de puissance $R_2(f)$

$$R_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left| \frac{2A}{k\pi} \delta(f - kf_0) \right|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.19)$$

Partant de celle-ci, il vient

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(f) df = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left(\frac{2A}{k\pi} \right)^2 = A^2 \quad [\text{V}_{eff}^2] \quad (7.20)$$

7.2.3. Signaux permanents aléatoires

Un signal permanent est un signal dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Parmi ceux-ci, on trouve essentiellement les signaux aléatoires tels que $x_4(t)$. Ces signaux n'ont pas de transformée de Fourier car leur intégrale en valeur absolue est infinie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \rightarrow \infty \quad (7.21)$$

On devra donc tenter de trouver une modélisation spectrale par une approche différente de celles vues jusqu'ici. C'est ce que l'on verra à la section 7.6.

Par contre, si l'on est en possession d'une suite de valeurs enregistrées de durée finie $T = N \Delta t$, on peut calculer la puissance et le spectre d'amplitudes $X(jf)$ de cette suite $x[n] = x(t = n \Delta t)$:

$$P_x \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad [\text{V}^2] \quad (7.22)$$

$$X(jf) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n \Delta t) \quad [\text{V}] \quad (7.23)$$

7.2.4. Signaux permanents quasi-périodiques

Un signal permanent tel que le signal $x_3(t)$ est constitué de quatre composantes spectrales dont les fréquences sont dans un rapport irrationnel. Cela signifie que, malgré la présence de fréquences discrètes, le signal n'est pas périodique; on doit alors le considérer comme un signal aléatoire permanent. L'estimation de la puissance et de son spectre se fera donc comme ci-dessus à partir d'une suite de valeurs enregistrées.

7.3. Comparaison des signaux

La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission, le GPS (Global Positioning System), etc.

Dans chaque cas, on dispose de deux fonctions : le signal de référence $x(t)$ et le signal à analyser $y(t)$. Il faut alors trouver une opération mathématique permettant de comparer ces signaux et d'en mesurer la ressemblance ou la corrélation. Ceci se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.24)$$

On obtient alors une opération mathématique qui, de par sa forme, est très proche de la convolution. Cependant, contrairement à la convolution qui permet de calculer le signal de sortie d'un filtre linéaire, la corrélation sert à mesurer le degré de ressemblance de deux signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée.

Deux illustrations en sont données dans les figures 7.4 et 7.5. Dans la première, on compare deux signaux dont la superposition (maximum de ressemblance) apparaît après un décalage temporel égal à 0.8. Dans la deuxième, on compare un signal chirp (signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement avec le temps) avec sa version décalée. On y voit que la corrélation d'un tel signal avec sa version décalée possède un maximum très bien défini à l'endroit correspondant exactement au décalage des deux signaux.

7.3.1. Corrélation de signaux à énergie finie

Intercorrélation de deux signaux

Considérant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, on définit la fonction d'*intercorrél*ation (fic) comme l'intégrale du produit du signal $x(t)$ avec le signal $y(t)$ décalé d'une valeur τ :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.25)$$

Par changement de variable $\theta = t + \tau$, on montre que

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = r_{yx}(-\tau) \quad (7.26)$$

On voit ainsi que la fonction $r_{xy}(\tau)$ est aussi la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonnée Oy .

Comme on peut le constater, les fonctions d'intercorrél

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = r_{xy}(\tau)$$

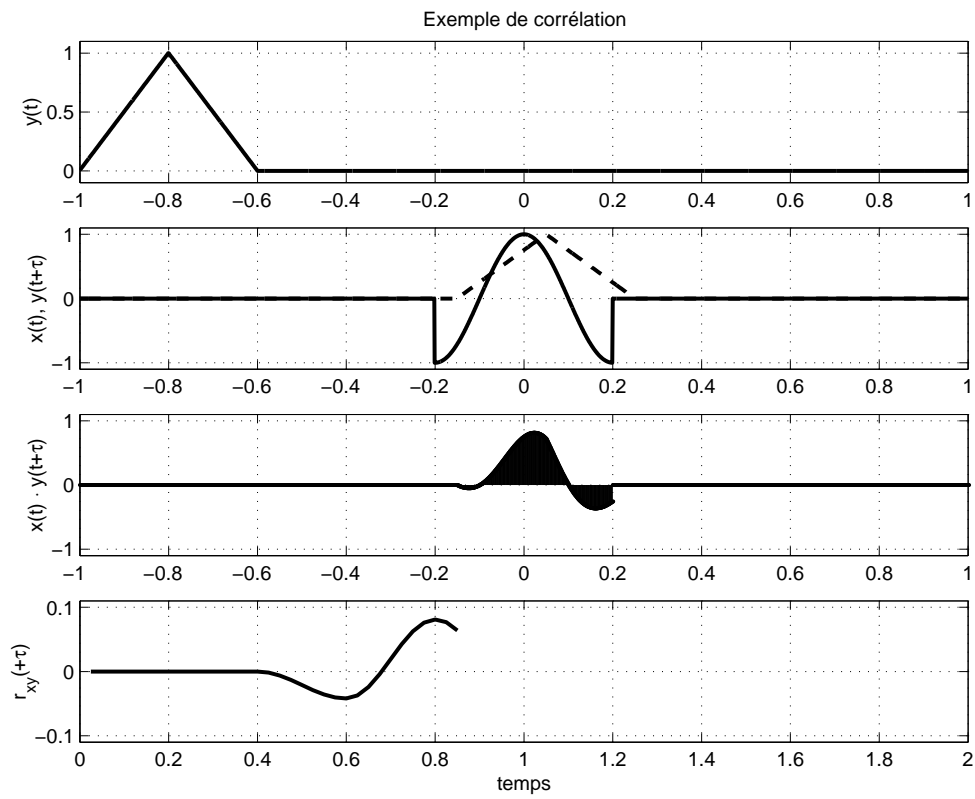


FIGURE 7.4.: Intercorrélation de deux signaux

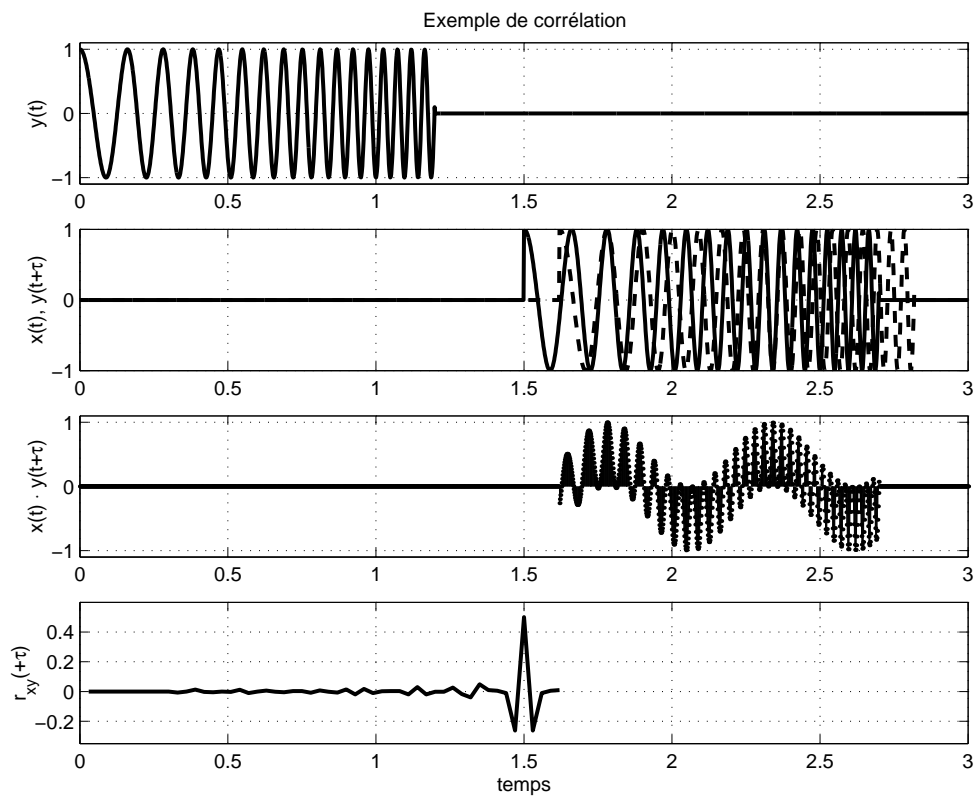


FIGURE 7.5.: Autocorrélation d'un signal chirp

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

et de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta = x(t) \otimes y(t)$$

sont formellement très proches. On montre qu'elles sont reliées entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau) \quad (7.27)$$

Cette relation valable dans l'espace temps a bien entendu son équivalent dans l'espace des fréquences :

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) Y(jf) \quad (7.28)$$

Autocorrélation d'un signal

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, on obtient la fonction d'*autocorrélation* (fac) du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt \quad (7.29)$$

qui, pour un décalage nul, donne l'énergie du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (7.30)$$

7.3.2. Corrélation de signaux à puissance finie

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande ; on ne peut donc pas utiliser les définitions précédentes. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit les deux fonctions de corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.31)$$

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (7.32)$$

Dans le cas d'un décalage nul, on trouve la puissance du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv X_{eff}^2 = P_x \quad (7.33)$$

Il est d'autre part évident que si les signaux sont périodiques, l'intégration se fera sur une période seulement.

La figure 7.6 montre des fonctions d'autocorrélation représentatives de quelques signaux aléatoires. On y trouve successivement trois signaux dont les puissances sont les mêmes, à savoir $0.2 [V_{eff}^2]$:

- *un bruit blanc gaussien* : son caractère non prévisible est manifeste et il est confirmé par l'étroitesse du pic de la fac.
- *un bruit à large bande* : ce signal a été obtenu en filtrant passe-bas le bruit blanc. Son contenu spectral moins étendu fait qu'il est raisonnablement possible de prévoir une valeur future pas trop éloignée. Une mesure de cet horizon de prévision est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de la fac.
- *un bruit à bande étroite* : ce signal a été obtenu en filtrant le bruit blanc à l'aide d'un filtre passe-bande. Son contenu fréquentiel étroit se manifeste par un comportement oscillant de manière assez régulière. Cette pseudo-périodicité est encore plus facile à déterminer à l'aide de sa fac : elle se mesure par la distance séparant le pic central du premier pic latéral.

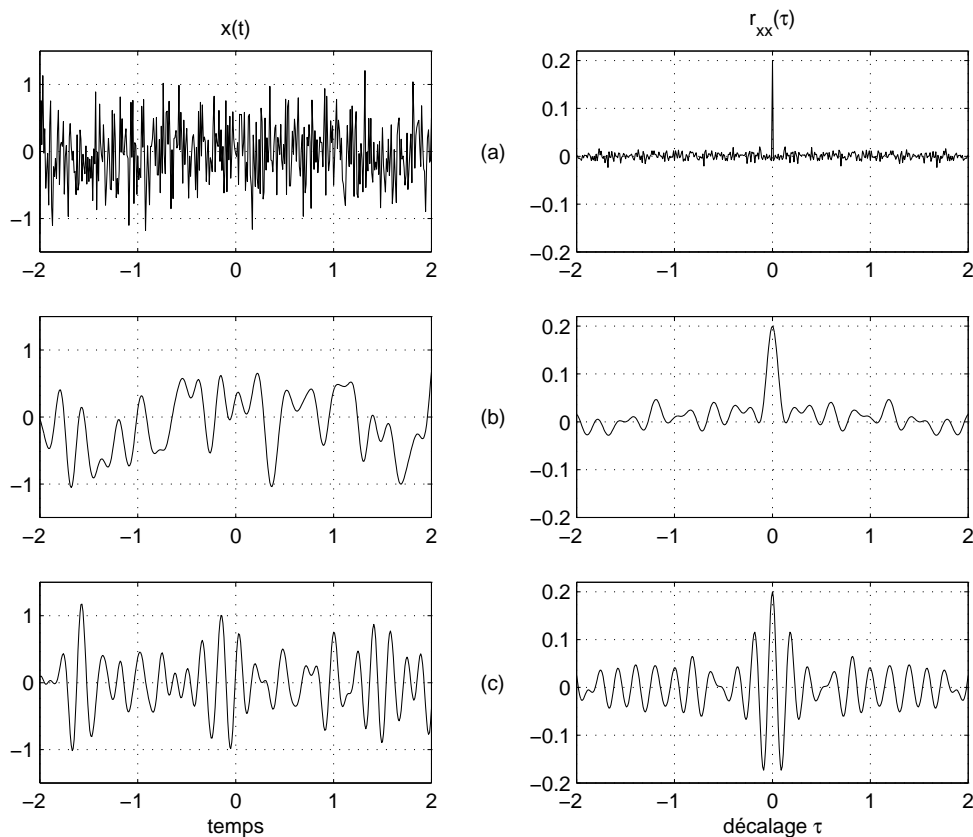


FIGURE 7.6.: Quelques signaux et leur fonction d'autocorrélation

7.3.3. Propriétés de l'autocorrélation

On rappellera tout d'abord que la fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux. On montre alors aisément que la fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

1. Lorsque le décalage temporel est nul ($\tau = 0$), la fac est égale à l'énergie du signal pour les signaux à énergie finie :

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (7.34)$$

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

ou, à la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie :

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv P_x$$

2. Comme la correspondance entre les deux signaux ne peut pas être aussi forte que lorsque les signaux se superposent exactement cela entraîne que la fac est maximum pour un décalage nul. On a donc :

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau) \quad (7.35)$$

3. La fac est une fonction paire :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) \quad (7.36)$$

4. La fac d'un bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est une impulsion de Dirac. En effet, le bruit blanc étant formé d'une multitude de fréquences possédant la même puissance, il en résulte un signal variant si rapidement que sa valeur présente est indépendante des valeurs passées et que sa valeur est non nulle pour $\tau = 0$ seulement. On a donc :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (7.37)$$

où σ^2 est la variance du signal aléatoire; c'est également, comme on l'a vu plus haut, la puissance du signal aléatoire.

5. La fac d'un signal périodique quelconque est une fonction périodique paire. Considérons comme exemple le signal $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega(t + \tau) + \alpha) dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (7.38)$$

On remarque ainsi que l'amplitude de cette fac est la puissance $A^2/2$ du signal $x(t)$ et que la fac ne nous donne aucune information sur la phase α du signal.

6. Dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, il est possible de retrouver la fac du signal non perturbé. Considérant $y(t) = x(t) + n(t)$, on a en effet :

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) + n(t)) (x(t + \tau) + n(t + \tau)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) x(t + \tau) + n(t) n(t + \tau) \dots \\ &\quad \dots + x(t) n(t + \tau) + n(t) x(t + \tau)) dt \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \quad (7.39)$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ et le bruit $n(t)$ ne sont pas corrélés, on a bien entendu $r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$; ce qui donne finalement :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (7.40)$$

De plus, comme généralement la fac $r_{nn}(\tau)$ du bruit tend rapidement vers 0, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

Une illustration de cette dernière propriété (figure 7.7) montre comment l'autocorrélation permet d'extraire un signal noyé dans un bruit blanc. Dans cette figure, le signal est une sinusoïde d'amplitude 1 volt et le bruit blanc possède une valeur efficace de 5 volt.

Le signal extrait est reconnaissable mais encore perturbé par du bruit. Comme ce bruit résiduel diminue avec la racine carrée du nombre d'échantillon, on voit qu'on peut diminuer le bruit en augmentant le nombre d'échantillons enregistrés.

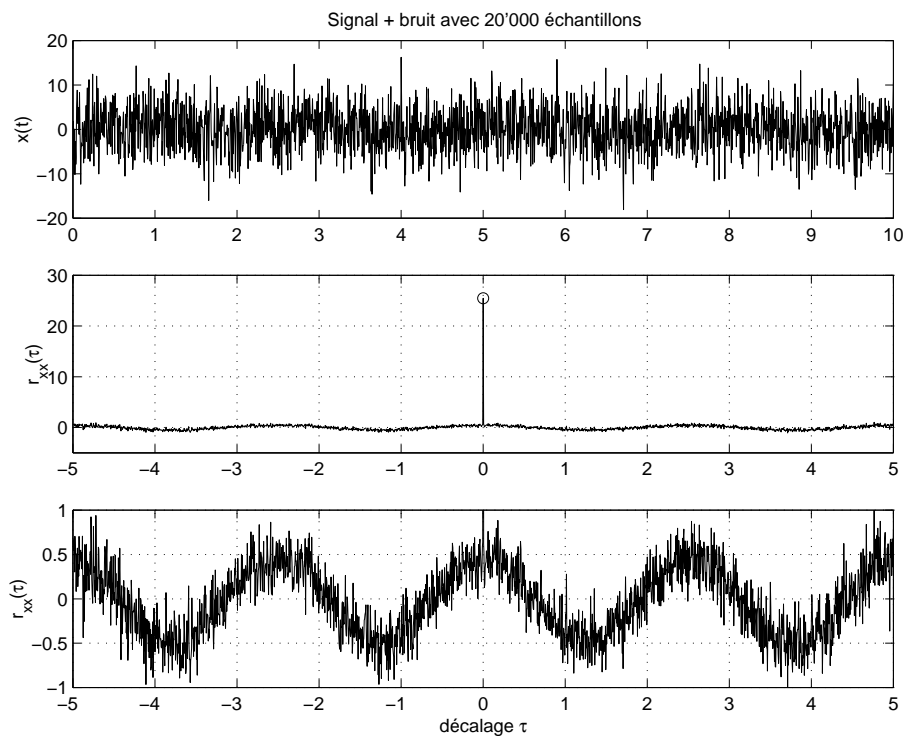


FIGURE 7.7.: Extraction d'un signal avec l'aide de l'autocorrélation

7.3.4. Propriétés de l'intercorrélation

Comme pour la fonction d'autocorrélation, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions d'intercorrélation :

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

1. En général la fic n'est ni paire, ni impaire.
2. Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation.
3. Comme le fait de retarder $y(t)$ par rapport à $x(t)$ d'une valeur τ équivaut à avancer le signal $x(t)$ par rapport à $y(t)$, on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \quad (7.41)$$

4. Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique.

7.3.5. Calcul numérique de la corrélation

Le calcul numérique d'une corrélation se fait en remplaçant l'intégrale par la somme du produit des valeurs échantillonnées avec une période constante unité.

Dans le cas où l'on a suffisamment de points à disposition, on peut calculer la somme sur N points sans atteindre les limites des signaux enregistrés. On a alors :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+k], \quad k_{min} \leq k \leq k_{max} \quad (7.42)$$

Comme on l'a vu plus haut (équ. (7.28)), le calcul de l'intercorrélation peut également se faire dans le domaine fréquentiel qui, pour les signaux numériques, se fait en utilisant la transformation de Fourier discrète. On obtient alors

$$R_{xy}[jk] = \frac{1}{N} X^*[jk] \cdot Y[jk]$$

Dans le cas où l'on souhaite utiliser toutes les valeurs à disposition, le nombre de points intervenant dans la somme diminue au fur et à mesure que le décalage augmente. Pour éviter de biaiser le résultat de la corrélation, on la calcule alors comme suit :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N - |k|} \sum_{n=0}^{N-|k|} x[n] y[n+k], \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (7.43)$$

Mais alors, on voit bien que, k augmentant, le nombre de points à disposition $N - |k|$ diminue. Ce qui, statistiquement, rend le résultat de l'intercorrélation plus incertain dans les extrémités de la fonction (voir figure 7.8b).

7.3.6. Exemples de corrélation

La fonction d'intercorrélation est très souvent utilisée pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation. Dans ce but, le signal émis est choisi de manière à ce que le pic de sa fonction d'autocorrélation soit très bien défini. Les signaux le plus souvent utilisés sont les signaux chirp (à fréquence variable au cours du temps) et les séquences binaires pseudo-aléatoires.

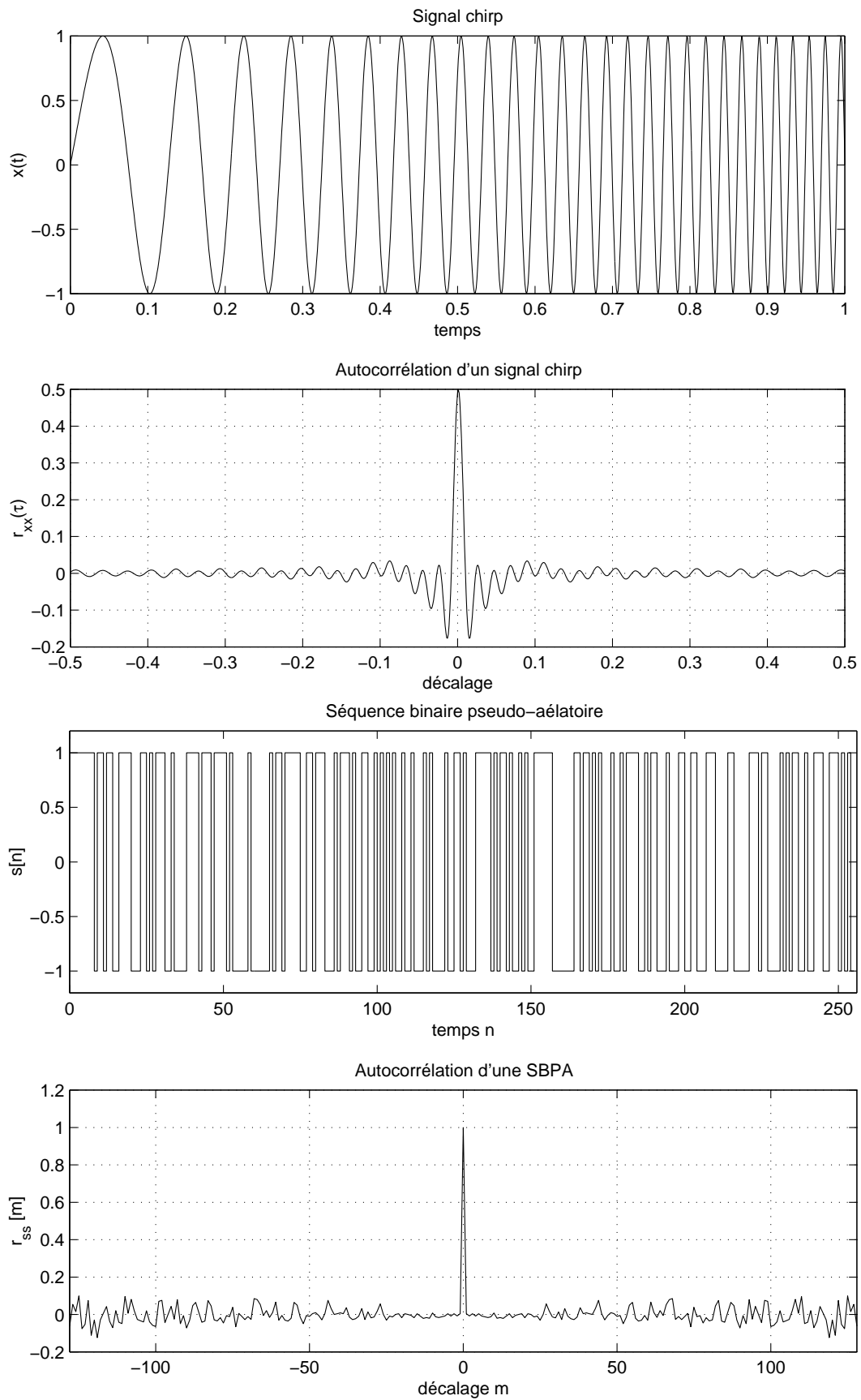


FIGURE 7.8.: Fonctions d'autocorrélation d'un signal chirp et d'une SBPA

Autocorrélation d'un signal chirp

Le signal chirp est un signal sinusoïdal dont la fréquence (ou la pulsation) varie linéairement avec le temps. Il est défini comme suit

$$x(t) = A \sin(\theta(t) + \alpha)$$

avec

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

$$\omega(t) = \omega_{min} + \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{t_{max}} t \quad 0 \leq t \leq t_{max}$$

Sa fonction d'autocorrélation possède un maximum très bien défini correspondant à la puissance du signal qui vaut $A^2/2$ (figure 7.8a).

Autocorrélation d'une SBPA

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est une succession de valeurs binaires (généralement ± 1) dont la distribution temporelle possède un caractère aléatoire pendant une certaine durée et qui ensuite se répète périodiquement. Sa fonction d'autocorrélation possède également un pic très bien défini égal à la puissance A^2 du signal (figure 7.8b).

7.4. Rapport signal sur bruit (SNR)

Comme on va le voir plus loin, les fonctions de corrélation sont très puissantes pour extraire un signal $x(t)$ masqué par un bruit $n(t)$. Afin de chiffrer précisément la qualité (mauvaise ou non) d'un signal, on utilise la notion de rapport signal/bruit (*Signal to Noise Ratio*) définie comme suit :

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_x}{P_n} \right) = 20 \log \left(\frac{X_{eff}}{N_{eff}} \right) \quad [\text{dB}] \quad (7.44)$$

Un SNR égal à 0 dB, signifie que la puissance P_n du bruit est égale à celle du signal P_x ou, de manière équivalente, que $X_{eff} = N_{eff}$.

La colonne gauche de la figure 7.9 montre un signal sinusoïdal auquel est ajouté un bruit de plus en plus fort. Même si visuellement on observe qu'un SNR de 40dB est presque indétectable, il est important de savoir qu'en pratique il est fréquent d'exiger une qualité de signaux dont les SNR sont supérieurs à 60dB, voire 96dB en haute-fidélité audio. Malheureusement, il n'est pas rare de devoir traiter des signaux dont le SNR est inférieur à 0dB et dans ces cas là, comme on le verra, les fonctions de corrélation sont extrêmement utiles.

Enfin, comme on l'a vu dans la section précédente, les fonctions d'intercorrélation sont nulles dans le cas de signaux indépendants, non corrélés. Ainsi, dans le cas

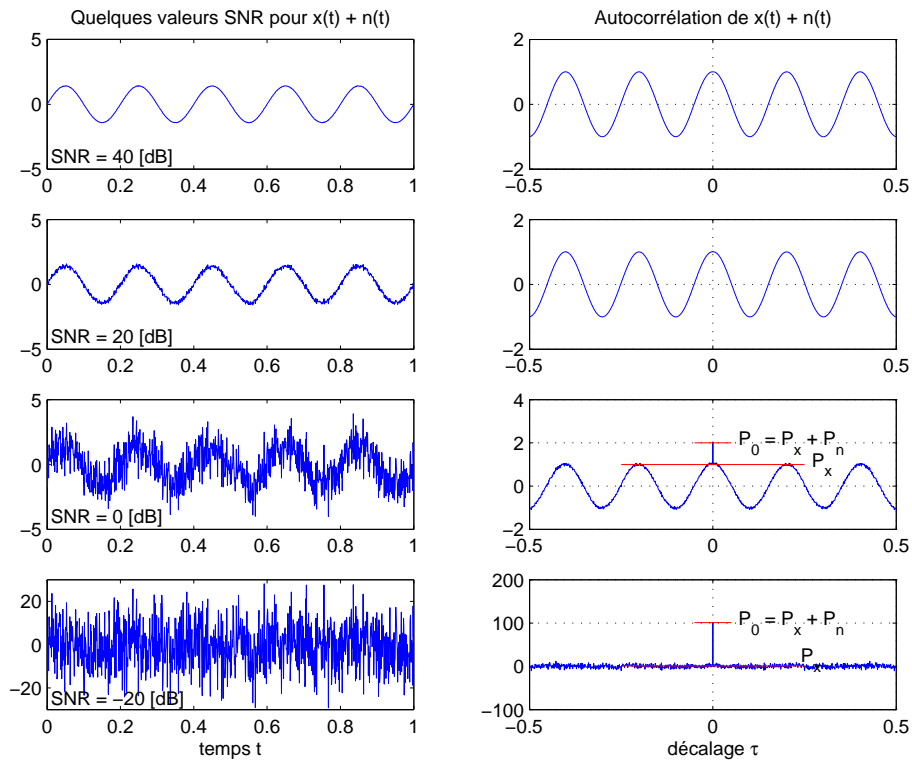


FIGURE 7.9.: Illustrations de quelques valeurs SNR

d'un bruit $n(t)$ indépendant ajouté à un signal $x(t)$, la fonction d'autocorrélation de la somme des deux vaut-elle

$$r_{x+n}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (7.45)$$

On voit alors que la puissance de deux signaux indépendants est égale à la somme des puissances individuelles car

$$r_{x+n}(0) = P_{tot} = r_{xx}(0) + r_{nn}(0) = P_x + P_n \quad (7.46)$$

Ce qui permet parfois, lorsque le signal $x(t)$ est périodique, d'estimer les deux puissances et d'en déduire la valeur du SNR comme le montre la colonne de droite de la figure 7.9.

7.5. Trois applications de la corrélation

7.5.1. Le radar

Comme exemple illustratif, imaginons le principe du radar avec lequel on désire détecter la présence ou non d'un avion puis connaître la distance à laquelle il se trouve.

Le radar émet un signal chirp $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé par l'avion (figure 7.10). S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

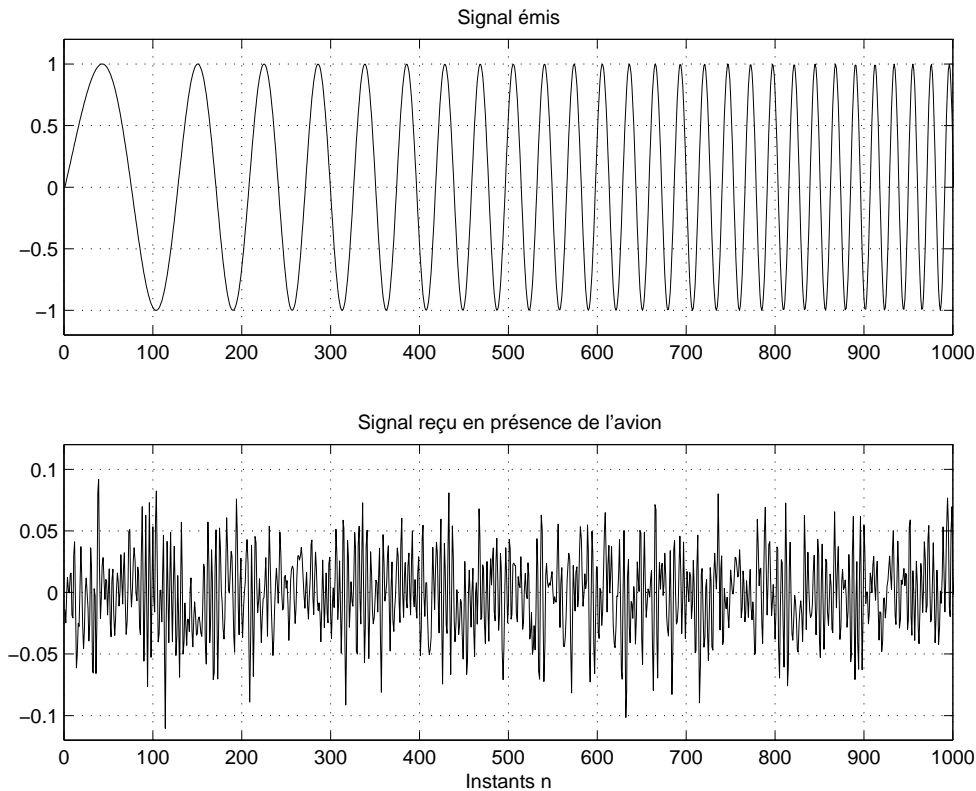


FIGURE 7.10.: Signaux émis et reçus par un radar

$y(t)$ est constitué d'un bruit $n(t)$ seulement. De plus, il est évident que si un avion est présent, le signal $y(t)$ reçu en retour consiste en une version atténuée, retardée, et fortement bruitée du signal émis $x(t)$. Ainsi, le signal reçu peut être décrit par :

$$y(t) = Ax(t - t_d) + n(t)$$

avec :

- A = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
- t_d = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
- $n(t)$ = le bruit additif capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.

Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle ne permet pas de détecter la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion (figure 7.10).

Les figures 7.11a et 7.11b illustrent le principe de l'utilisation d'un signal chirp pour détecter un avion et mesurer sa distance. Considérons les deux situations suivantes :

1. **Absence d'un avion :** Le signal reçu $y(t)$ est fortement atténué et perturbé. Seule une intercorrélacion entre $x(t)$ et $y(t)$ permet de savoir si un avion est présent ou non. Dans ce dernier cas, aucun pic bien distinct n'apparaît dans le graphe (figure 7.11a).
2. **Présence d'un avion :** Ici, l'intercorrélacion fait apparaître un pic très étroit se dégageant nettement au-dessus du bruit de fond (figure 7.11b). On notera que ce pic est légèrement décalé vers la droite par rapport à la position centrale ; ce décalage correspond au temps d'aller et retour du signal émis. Une

7.5. Trois applications de la corrélation

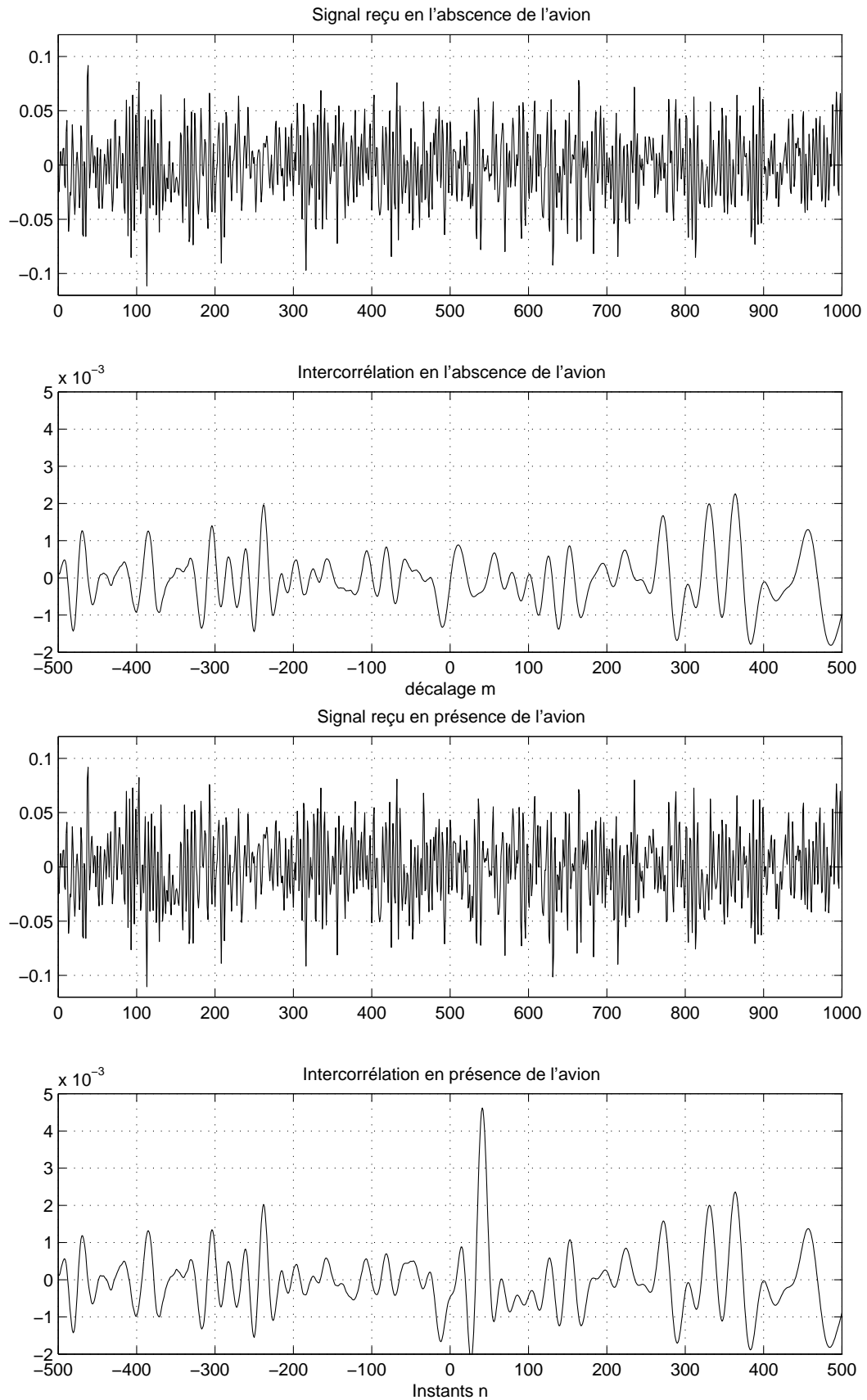


FIGURE 7.11.: a) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit
b) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit corrélé

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

fois ce temps déterminé, on peut calculer la distance de l'avion par rapport au radar.

7.5.2. La mesure d'un débit

On présente ici un débitmètre industriel réalisé par l'Institut d'Automatisation Industrielle de la heig-vd. Le principe, de même que sa réalisation, en est très simple.

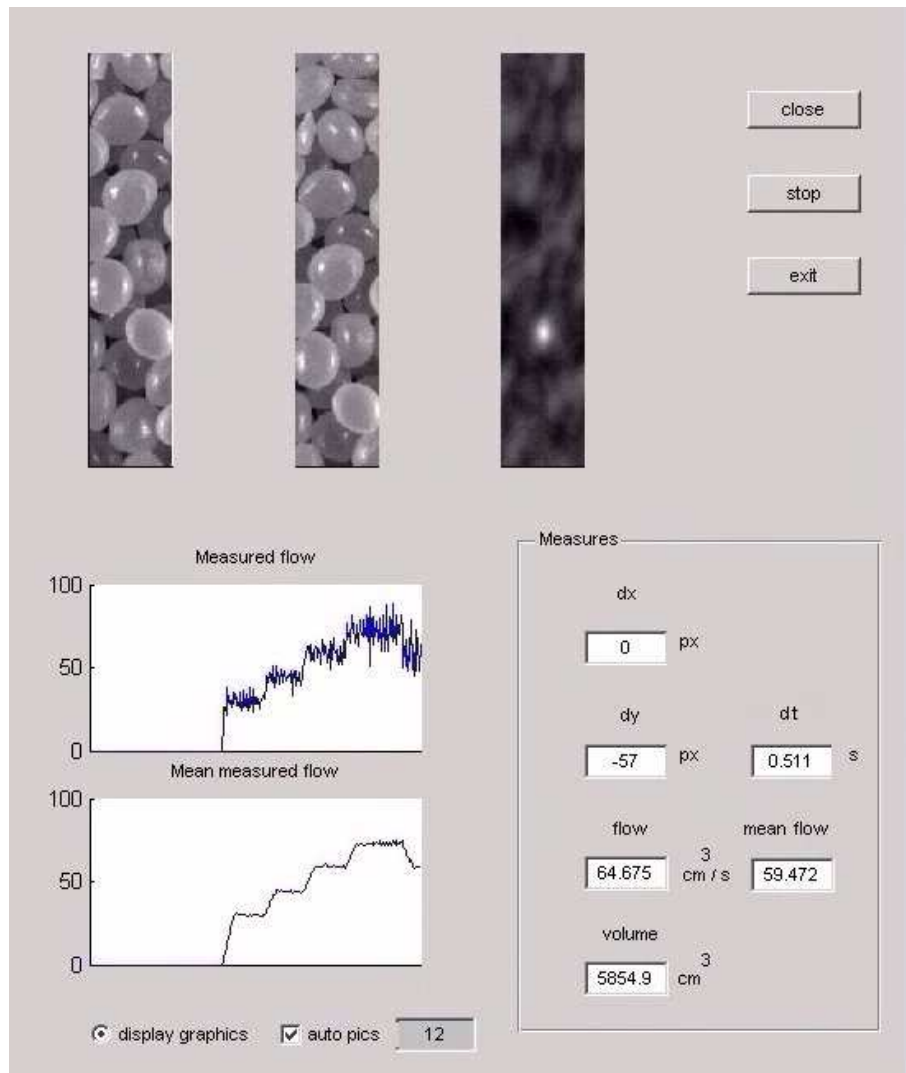


FIGURE 7.12.: Interface du débitmètre de granulés

Une caméra fournit régulièrement des images d'un flux de granulés (figure 7.12). En effectuant la comparaison par intercorrélation de deux images successives, on obtient un point lumineux se situant aux coordonnées du déplacement $\Delta y(t)$. Connaissant la section A du conduit, on peut calculer le débit au cours du temps :

$$Q(t) = A \cdot \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

La seule difficulté de cette mesure réside dans le temps nécessaire pour calculer l'intercorrélation en temps réel. En effet, si l'on imagine que l'on dispose d'images de 100x400 pixels, on doit traiter 40'000 pixels par intercorrélation ; ce qui entraîne un nombre d'opérations valant environ

$$N_{op} \simeq N_{pxl}^2 = 16 \cdot 10^8$$

Même avec un DSP très performant ($T_{clock} \simeq 10$ ns), il n'est pas possible de fournir une information en moins d'une seconde. Par contre, en utilisant la FFT on peut espérer fournir des résultats dans le temps imparti car celle-ci demande beaucoup moins d'opérations

$$N_{op} \simeq N_{pxl} \log_2(N_{pxl}) \simeq 40 \cdot 10^3 \cdot 15 = 6 \cdot 10^5$$

L'algorithme de calcul est alors le suivant

- 1) acquisition de image1
- 2) acquisition de image2
- 3) FFT bidimensionnelle de image1 et image2 => IMG1 et IMG2
- 4) calcul de $R_{xy} = \text{conj}(\text{IMG1}) * \text{IMG2}$
- 5) FFT inverse pour obtenir rxy
- 6) recherche des coordonnées du maximum d'intensité

Une fois ces calculs effectués, il reste encore suffisamment de temps pour calculer le débit actuel, lisser cette valeur, afficher les images, etc (figure 7.12).

7.5.3. La mesure du rythme cardiaque

On s'intéresse ici à la mesure automatique des pulsations cardiaques à l'aide de moyens simples : un stéthoscope muni d'une capsule microphonique et la carte-son d'un PC permettant d'enregistrer le son caractéristique des battements cardiaques.

D'un point de vue spectral, ces pulsations de très basse-fréquence (environ une pulsation par seconde) sont multipliées par un souffle basse-fréquence situé aux environs de 100 Hz (modulation d'amplitude). C'est ce qui rend le son audible puisque l'oreille humaine n'entend pas les sons inférieurs à 20 Hz. Comme le rythme cardiaque est périodique, on peut espérer, grâce à l'autocorrélation, éliminer le bruit environnant et faire apparaître clairement la période du rythme cardiaque.

Cependant, à cause des perturbations liées à la mesure, les choses ne sont pas aussi simples et, très vite, on se rend compte que la recherche de l'enveloppe du signal mesuré sera bien plus fructueuse. Les différentes étapes à parcourir pour obtenir le rythme cardiaque avec un bon taux de réussite sont illustrées par la figure 7.13.

Après acquisition du signal $x_0(t)$ à l'aide de la carte son d'un PC ($f_e = 8$ kHz) et sa sauvegarde dans un fichier *.wav, on peut, avec Matlab, effectuer les calculs ci-dessous :

1. élimination des fréquences inintéressantes par filtrage passe-bande du signal entre 60 et 500 Hz $\Rightarrow x_f(t)$;

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

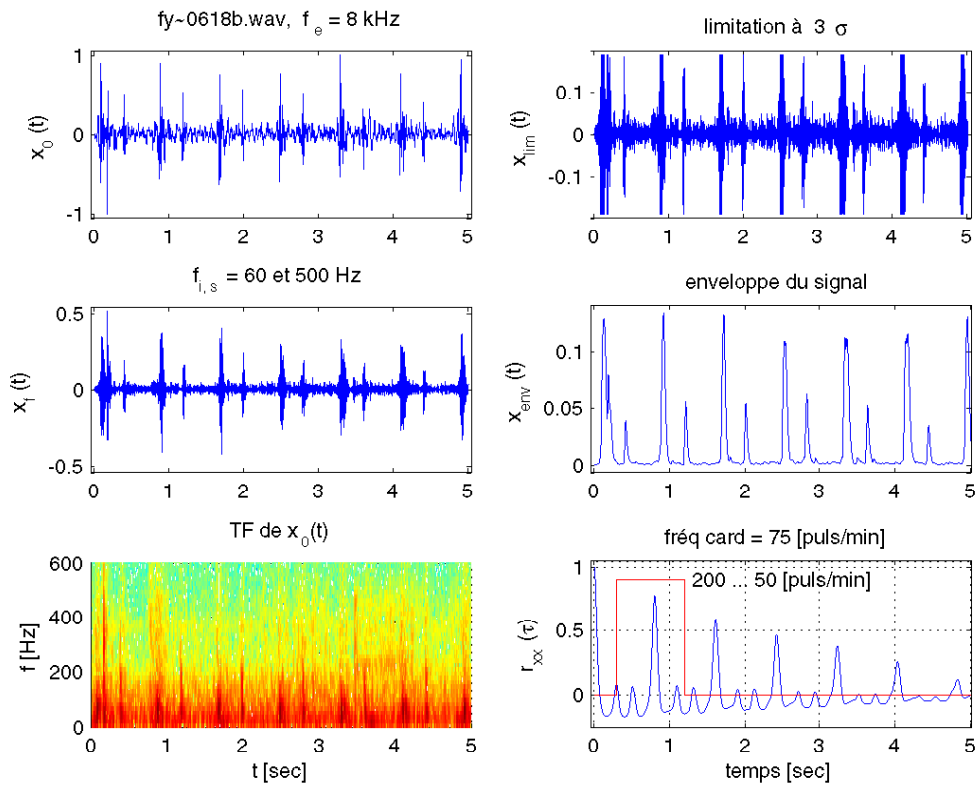


FIGURE 7.13.: Analyse d'un signal phonocardiographique

2. limitation des amplitudes du signal à $3 \cdot \sigma$ où σ est l'écart-type ou valeur efficace du signal filtré $\Rightarrow x_{lim}(t)$;
3. recherche de l'enveloppe du signal ; celle-ci s'obtient de manière similaire à la démodulation d'amplitude par le redressement du signal et son filtrage passe-bas $\Rightarrow x_{env}(t)$;
4. autocorrélation de l'enveloppe $\Rightarrow r_{xx}(\tau)$;
5. recherche du maximum de $r_{xx}(\tau)$ situé dans le domaine des pulsations cardiaques ordinaires ; pour des pulsations comprises entre 50 et 200 puls/min, le premier pic se trouvera entre 1.2 et 0.3 secondes.

Cet exemple montre, à l'évidence, combien l'autocorrélation est puissante pour extraire une information noyée dans du bruit.

7.6. Description des signaux aléatoires

Par définition, les signaux aléatoires ne peuvent pas être décrits analytiquement. On peut cependant tenter de les classer dans une des trois catégories types qui sont :

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (figure 7.14a) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles (figure 7.14b) ;

- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes variables (figure 7.14c).

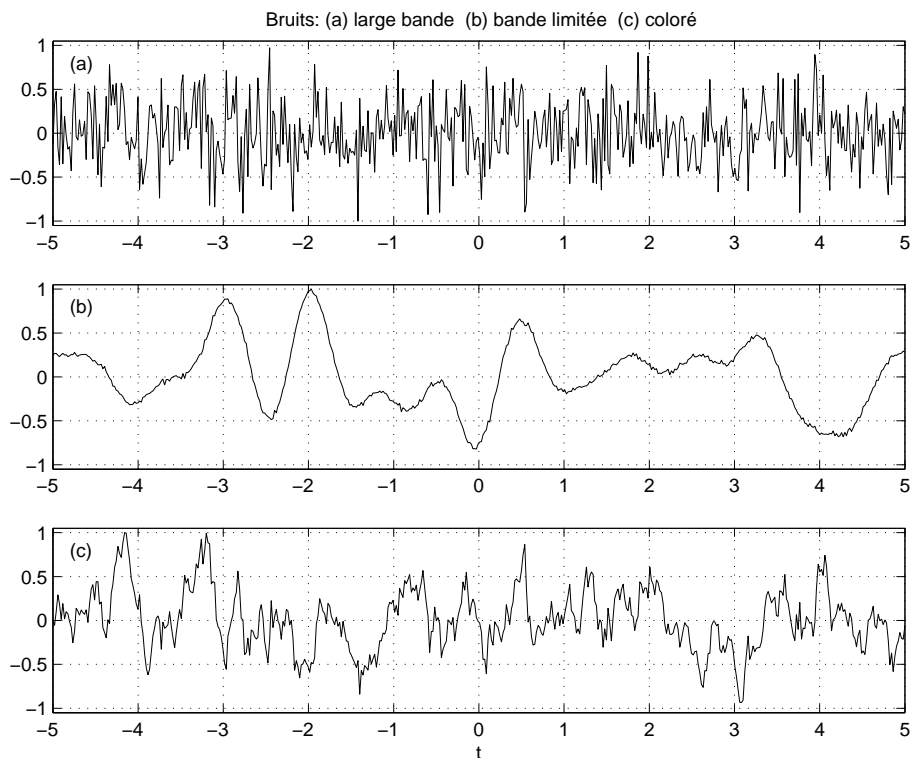


FIGURE 7.14.: Trois signaux aléatoires types

Comme aucune description analytique n'est possible pour les signaux aléatoires, on tente d'en extraire des moyennes temporelles en utilisant leurs fonctions d'autocorrélation (fac) illustrées à la figure 7.15. On en déduit que la fac du premier signal est extrêmement étroite; on la modélise par une impulsion de Dirac. La deuxième fac rappelle une fonction en sinus cardinal. Enfin, la troisième peut être modélisée par une exponentielle décroissante symétrique.

On définit alors la densité spectrale de puissance $R_{xx}(jf)$ comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$:

$$R_{xx}(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad [V^2 \text{ sec}] = [V^2/\text{Hz}]$$

L'observation de la densité spectrale de puissance (figure 7.16a) des trois signaux permet de tirer quelques propriétés et de définir des modèles représentant aussi bien que possible chacune des trois densités spectrales de puissance (figure 7.16b).

Le bruit blanc à densité spectrale constante et bande infinie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$ et sa densité spectrale de puissance est constante. Il est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = A^2 \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (7.47)$$

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

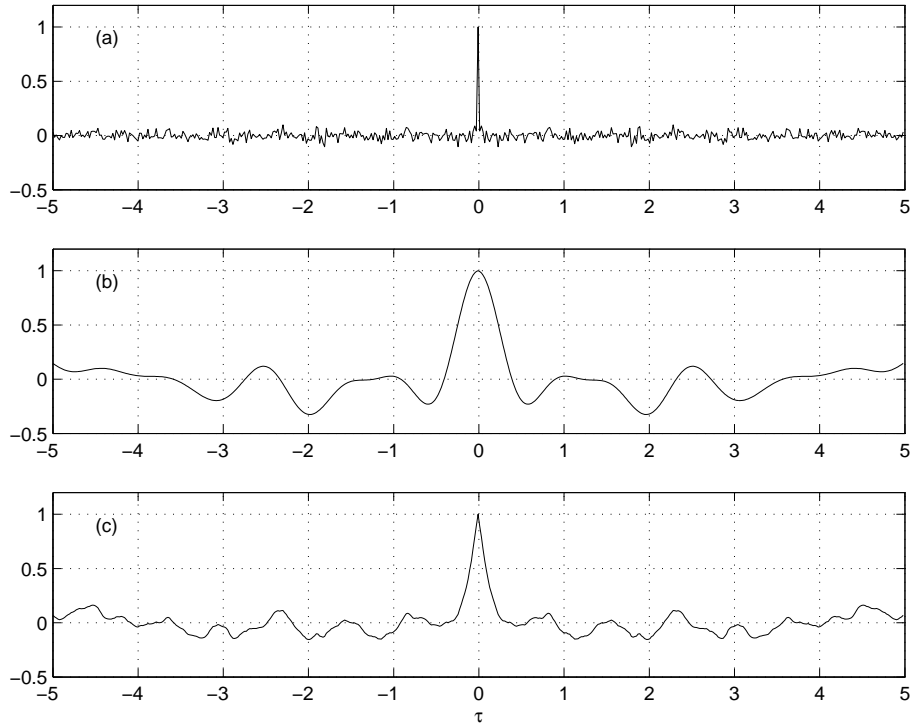


FIGURE 7.15.: Fonctions d'autocorrélation des trois bruits types

dont la fac est une impulsion de Dirac :

$$r_{xx}(\tau) = A^2 \cdot \delta(\tau) \quad [\text{V}^2] \quad (7.48)$$

Le théorème de Parseval nous dit alors que sa puissance est infinie. Comme cela n'est pas possible, on préfère travailler avec un modèle plus réaliste, le bruit à densité spectrale constante et à bande limitée

Le bruit à densité spectrale constante et bande limitée Il contient toutes les fréquences de $-f_{max}$ à $+f_{max}$. Sa puissance finie est souvent désignée par la variance statistique σ_x^2 qui n'est autre que le carré de la valeur efficace X_{eff}^2 du signal. Ce bruit est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2f_{max}} & \text{si } -f_{max} < f < +f_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.49)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(2\pi f_{max}\tau)}{2\pi f_{max}\tau} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [\text{V}^2] \quad (7.50)$$

Le bruit coloré à puissance finie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$. Mais sa puissance σ_x^2 est finie car son contenu spectral diminue assez rapidement

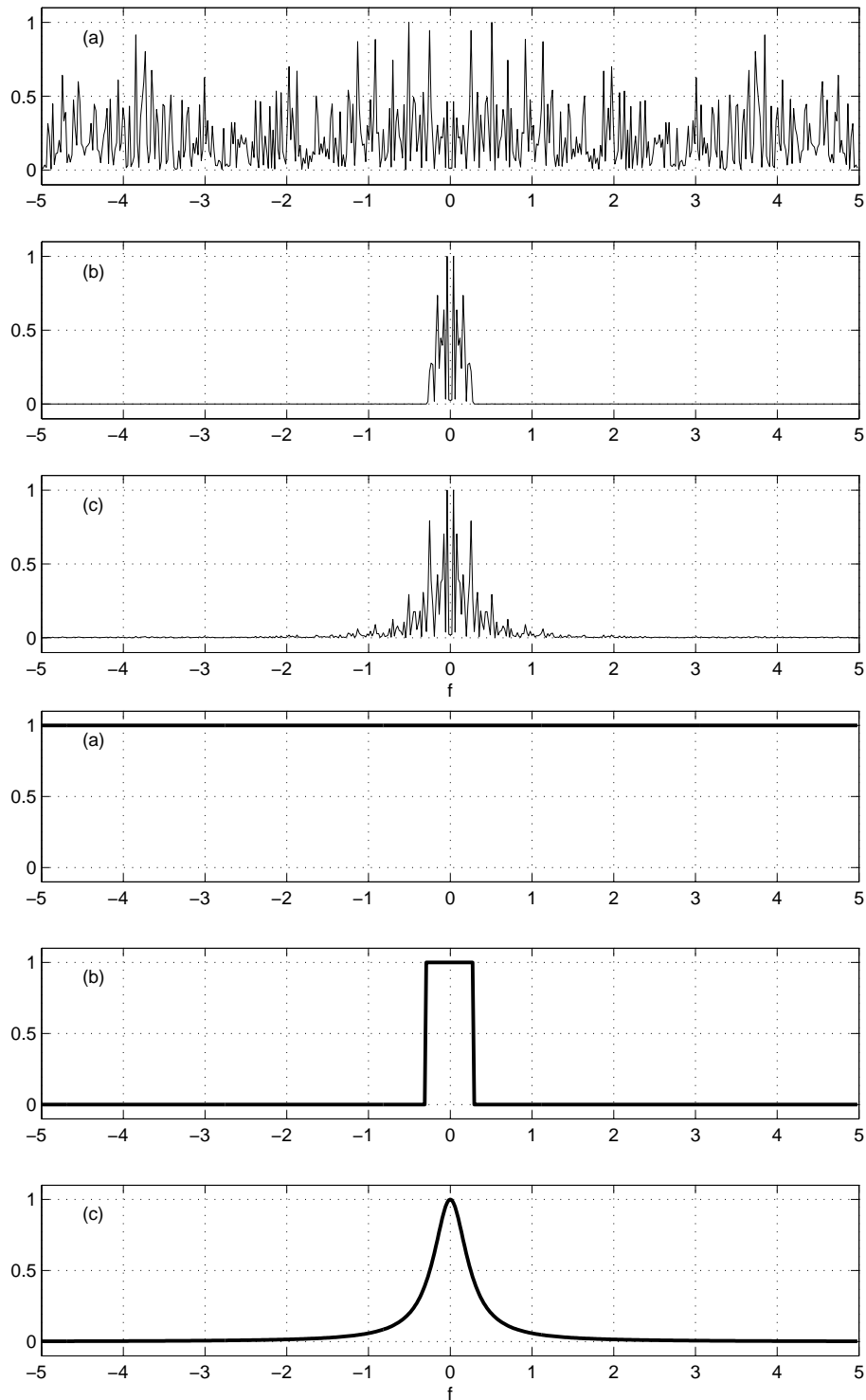


FIGURE 7.16.: a) Densités spectrales de puissance des trois bruits types
 b) Trois modèles simples pour les représenter

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

avec la fréquence. Un modèle souvent utilisé est le suivant :

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad -\infty < f < +\infty \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.51)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-a|\tau|} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [\text{V}^2] \quad (7.52)$$

avec

$$a = 2\pi f_c \quad [1/\text{sec}] \quad (7.53)$$

7.6.1. Tension équivalente de bruit

Il est intéressant de relever que, pour les composants semiconducteurs, la donnée de la densité spectrale de puissance $R(f)$ est remplacée par une *tension équivalente de bruit* qui n'est autre que la racine carrée de la densité spectrale de puissance :

$$e_n(f) \equiv \sqrt{R(f)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (7.54)$$

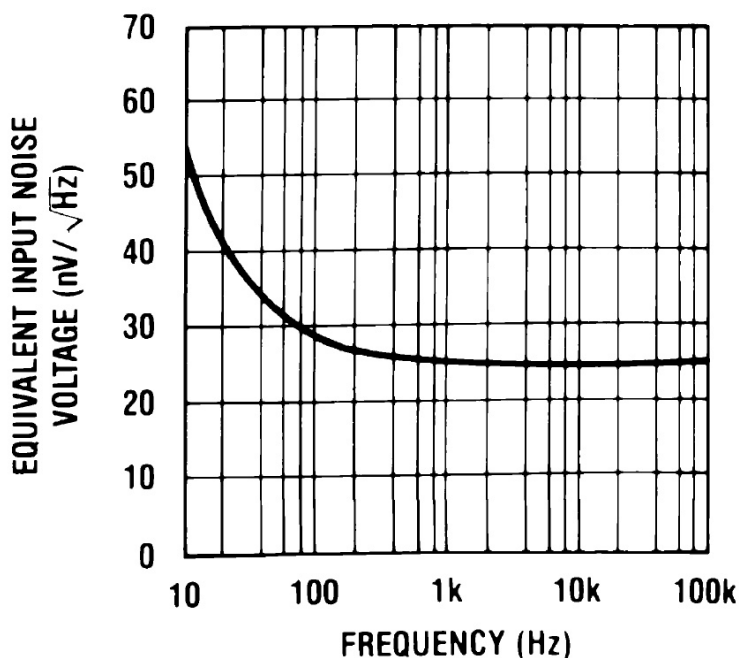


FIGURE 7.17.: Tension équivalente de bruit à l'entrée d'un LF 411

Par exemple, les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel LF411 (fig. 7.17) montrent que, dans les basses fréquences ($f < 30$ Hz), le spectre du bruit décroît

à raison de 10 [dB] par décade environ (flicker noise = bruit de grenaille) et qu'il reste pratiquement constant au delà de 300 Hz. Il vaut alors :

$$e_n \cong 25 \left[\frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad f > 300 \text{ [Hz]}$$

Connaissant cette valeur, on peut ainsi estimer la valeur efficace du bruit dans un domaine de fréquences donné. S'intéressant, par exemple, au domaine de fréquences

$$1 \text{ kHz} < f < 100 \text{ kHz}$$

la puissance du bruit vaut

$$P_n = \int_{f_1}^{f_2} e_n^2(f) df \simeq e_n^2 \cdot \Delta f = 625 \cdot 10^{-18} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot 99 \text{ kHz} = 6.2 \cdot 10^{-11} [\text{V}_{eff}^2]$$

Ce qui correspond à une tension efficace de bruit d'environ $8\mu\text{V}_{eff}$ présente à l'entrée de l'amplificateur opérationnel.

7.7. Systèmes linéaires et densités spectrales

Il est très fréquent que l'on doive étudier des signaux reliés entre-eux par le passage au travers d'un système linéaire, par exemple un filtre. Celui-ci étant décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(jf)$, les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont alors reliés entre eux par le produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (7.55)$$

On s'intéresse ici à préciser, en particulier aux niveaux des unités, quelles sont les relations temporelles et fréquentielles entre des signaux à énergie finie ou à puissance finie.

7.7.1. Signaux à énergie finie

Ce sont les signaux dont la TF existe car ils sont intégrables en valeur absolue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (7.56)$$

Il s'agit généralement de signaux temporaires ou à décroissance rapide. On définit alors les **densités spectrales d'amplitude** (DSA) des signaux $x(t)$ et $y(t)$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

$$Y(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

et l'on a

$$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (7.57)$$

Pour ces signaux, les fonctions de corrélation se calculent comme suit

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad [\text{V sec}] \quad (7.58)$$

et on peut montrer que les relations suivantes sont vraies :

$$R_{xx}(f) = X^*(jf) \cdot X(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.59)$$

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) \cdot Y(jf) = |X(jf)|^2 \cdot H(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.60)$$

$$R_{yy}(f) = |H(jf)|^2 \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.61)$$

7.7.2. Signaux à puissance finie

La TF de ces signaux n'existe pas car leur énergie est infinie. Il s'agit généralement de signaux aléatoires permanents. On les modélise alors par leur fonction d'autocorrélation

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.62)$$

et on définit leur **densité spectrale de puissance** (DSP) $R_{xx}(f)$ comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$R_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.63)$$

Lorsque les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont reliés entre eux par une opération de filtrage linéaire, le produit de convolution relie également les fonctions de corrélation entre elles et l'on a :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) r_{xx}(\tau - \theta) d\theta \quad [\text{V}^2] \quad (7.64)$$

$$R_{xy}(jf) = TF(r_{xy}(\tau)) = H(jf) \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.65)$$

où $R_{xy}(jf)$ est la **densité interspectrale de puissance**.

Le tableau 7.1 réunit les relations existant entre les signaux, les fonctions de corrélation et les densités spectrales d'amplitudes (DSA) ou de puissance (DSP).

7.8. Signaux, spectres et statistique

La page suivante, tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2], illustre les propriétés temporelles, spectrales et statistiques de quelques signaux. Comme on l'a déjà dit plus haut, ces descriptions ne sont que des points de vue différents d'une même réalité : le signal temporel $x(t)$. Ces points de vue sont complémentaires et c'est le but du traitement des signaux de les relier entre eux et d'en tirer efficacement le maximum d'information.

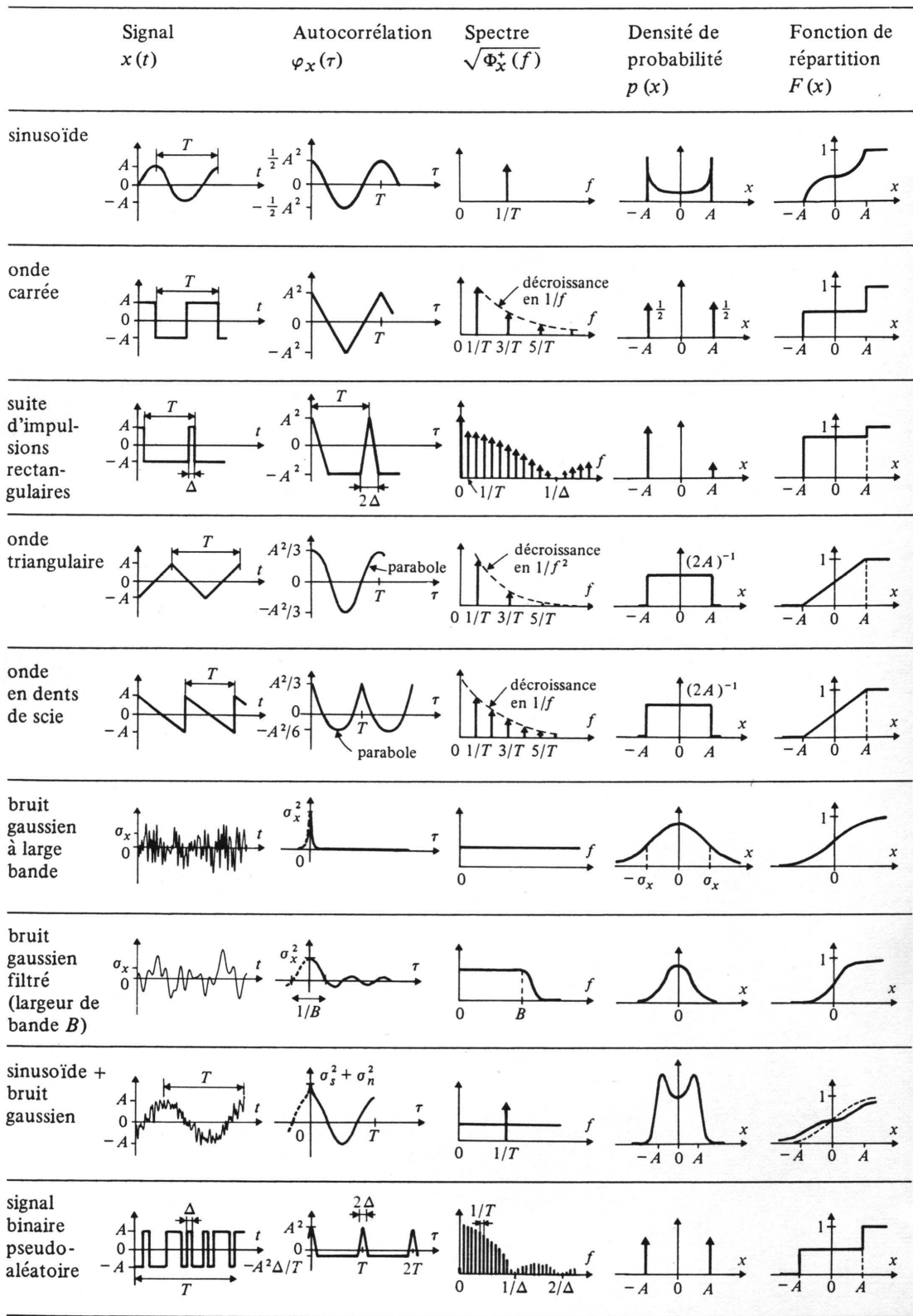


FIGURE 7.18.: Descriptions temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques [2]

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

	Domaine temporel	DSA
Énergie finie	signaux $x(t), y(t)$	$TF(x(t), y(t))$
[unités]	[V]	[V/Hz]
entrée	$x(t)$	$X(jf)$
système	$h(t)$	$H(jf)$
sortie	$y(t)$	$Y(jf)$
relations	$y(t) = h(t) \otimes x(t)$	$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf)$
Puissance finie	Corrélation	DSP
[unités]	[V ²]	[V ² /Hz]
entrée	$r_{xx}(\tau)$	$R_{xx}(f)$
système	$h(\tau)$	$H(jf)$
sortie	$r_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(jf)$
relations	$r_{xy}(\tau) = h(\tau) \otimes r_{xx}(\tau)$	$R_{xy}(jf) = H(jf) \cdot R_{xx}(f)$
	—	$R_{yy}(f) = H(jf) ^2 \cdot R_{xx}(f)$

TABLE 7.1.: Relations temporelles et fréquentielles

7.9. Quelques exemples

Exemple 1 : Signal temporel

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at)\epsilon(t)$ à un filtre passe-bande idéal. On demande :

1. Dessinez la réponse fréquentielle du filtre.
2. Esquissez les densités spectrales d'amplitude $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
3. Que valent les densités spectrales d'énergie $S_1(f)$ et $S_2(f)$?
4. Calculez les énergies W_1 et W_2 des signaux d'entrée et de sortie.
5. A.N. : $U_0 = 10$ [V], $a = 24'000$ [1/sec], $f_1 = 4$ [kHz], $f_2 = 6$ [kHz]

Solution :

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Exemple 2 : Signal aléatoire permanent

Un opérateur vous informe qu'il a mesuré à la sortie d'un amplificateur un bruit large bande dont la valeur efficace vaut $U_{1,eff} = 0.01 [V_{eff}]$.

1. Quelle est la puissance P_1 de ce bruit ? L'information apportée par l'opérateur est-elle significative et suffisante ?
2. Après discussion, celui-ci précise que cette mesure a été effectuée avec un volt-mètre à vraie valeur efficace dont la bande passante est de 100 kHz. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance correspondant.
3. Esquissez $R_1(f)$ et calculez sa valeur.
4. La sortie de cet amplificateur est branchée sur un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est fixée à 1 kHz. Esquissez la densité spectrale de puissance $R_2(f)$ du bruit après le filtre.
5. Quelle valeur efficace $U_{2,eff}$ mesurerez-vous après le filtre ?

Solution :

Exemple 3 : Signal aléatoire permanent

À la sortie d'un amplificateur dont la bande passante est de 100 [kHz], on mesure un bruit de 10 [mV_{eff}]. On filtre ce bruit avec un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1.6$ [kΩ] et $C = 100$ [nF].

1. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance $R_1(f)$ du bruit de sortie de l'amplificateur et calculez sa valeur.
2. Calculez la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
3. Esquissez sur un même diagramme les densités spectrales de puissance $R_1(f)$ et $R_2(f)$ présentes à l'entrée et à la sortie du filtre RC.
4. Quelle sera la valeur efficace de la tension à la sortie du filtre RC ?

Solution :

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Exemple 4 : Signal temporaire

On applique une impulsion de tension d'amplitude E et de largeur Δt à un filtre passe-bande LC-R caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et son facteur de qualité Q_0 . Admettant que la largeur de l'impulsion est beaucoup plus petite que les temps caractéristiques du filtre :

1. Esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ainsi que $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
2. Calculez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$.
3. Calculez l'énergie W_1 du signal d'entrée.
4. Calculez l'énergie W_2 du signal de sortie du filtre.
5. A.N. : $E = 10$ [V], $\Delta t = 10$ [μ sec], $f_0 = 1$ [kHz], $Q_0 = 10$.

Solution :

7.10. Exercices

Correl 0

Considérant deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ définis comme suit :

n	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0

calculez et représentez la fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+m)$$

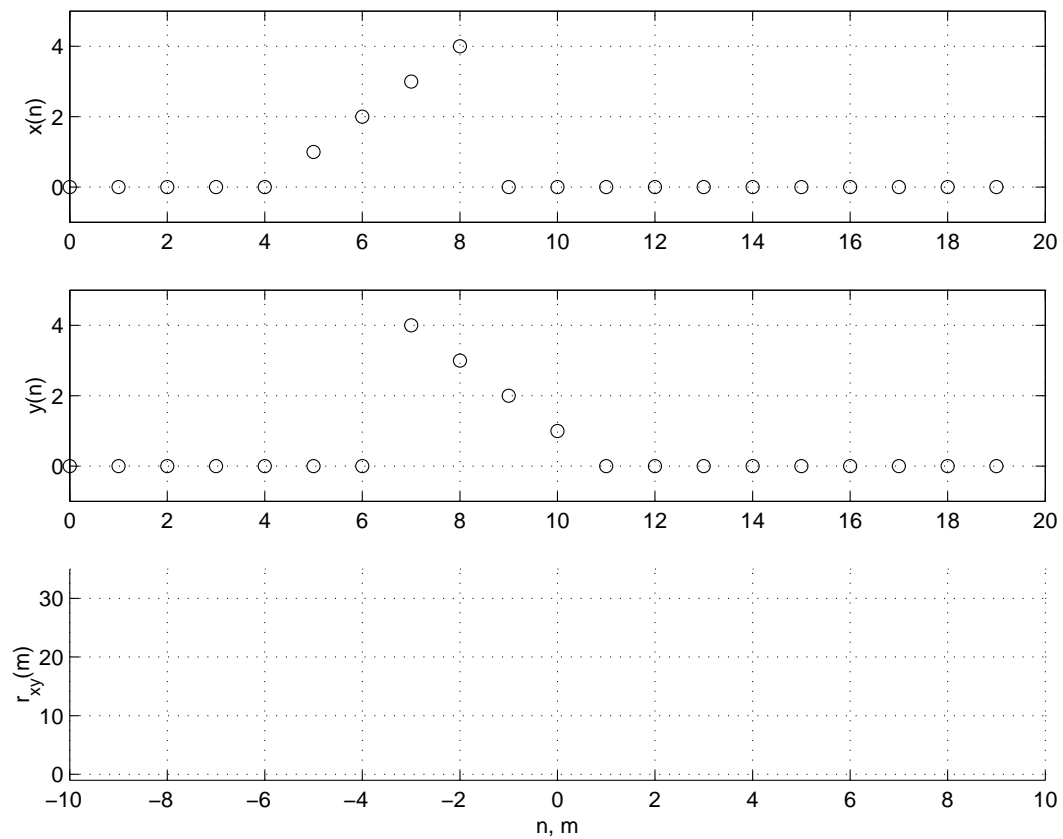


FIGURE 7.19.: Exercice Corr 0

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Correl 1 Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes $\tau = 0, \pm\Delta t, \pm 2\Delta t$;
3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Correl 2 Considérant les 3 signaux suivants :

- une exponentielle décroissante $x(t)$ d'amplitude A et de constante de temps τ_1 ,
- une impulsion rectangulaire $y(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt ,
- une impulsion triangulaire $z(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2\Delta t$,

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux;
2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

Correl 3 Calculez la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $h(t)$ de l'exercice Corr 3. Avant de vous lancer dans les calculs, imaginez où se situera le maximum de la fonction. Esquissez le résultat de l'intercorrélation.

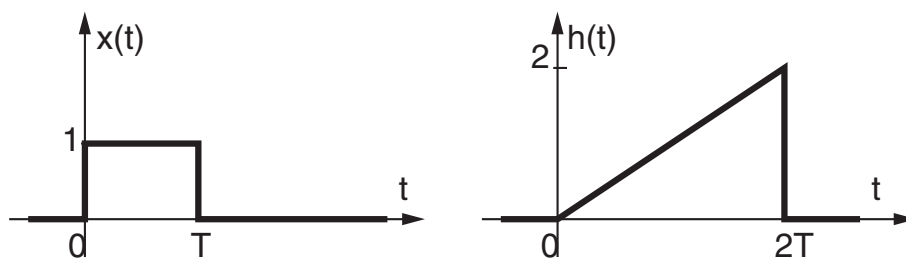


FIGURE 7.20.: Exercice Corr 3

Correl 4 On souhaite connaître la fonction d'intercorrélation des signaux $h_2(t)$ et $h_1(t)$ de l'exercice Corr 4 :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

Pour cela :

1. imaginez tout d'abord l'endroit où se situera le maximum de la fic ;
2. montrez que, pour les points particuliers suivants $\tau = \{-2\Delta t, -\Delta t, 0, +\Delta t\}$, on a, respectivement, $h_{21}(\tau) = \{0, A^2 \frac{\Delta t}{3}, A^2 \frac{\Delta t}{6}, 0\}$;
3. pourquoi, comme il est précisé dans la remarque ci-dessous, le calcul est-il plus simple lorsque τ est compris entre 0 et Δt ?
4. que pensez-vous des résultats graphiques obtenus avec Matlab (figure 7.21) ?

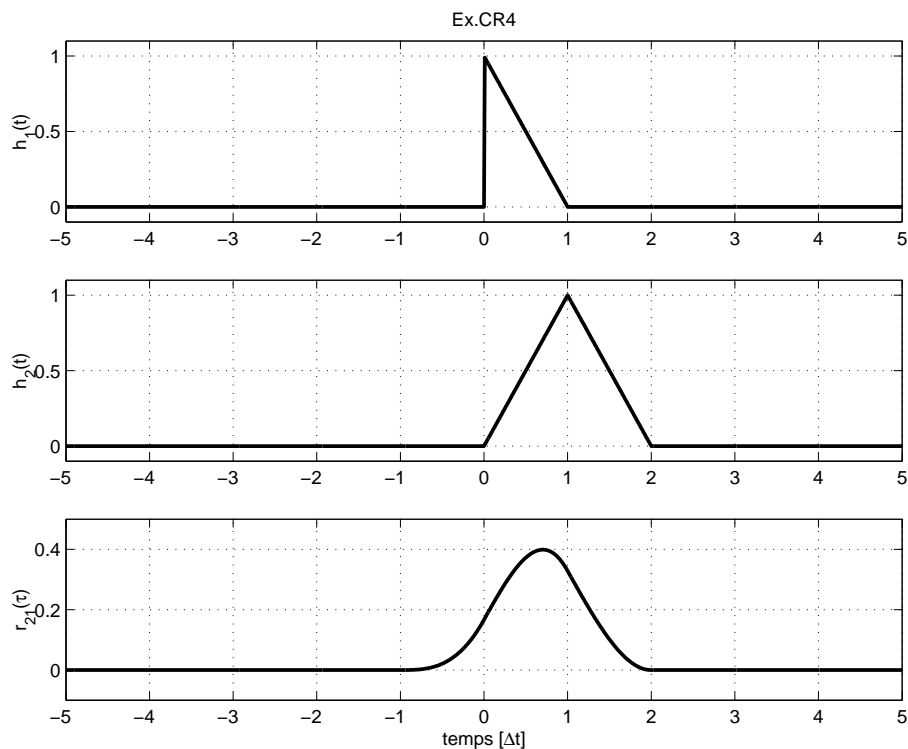


FIGURE 7.21.: Exercice Corr 4

Remarque Pour donner une idée de ce que représente l'approche analytique, voici le calcul de la partie la plus simple correspondant au décalage avancé de $h_1(t + \tau)$ avec τ compris entre 0 et Δt .

Comme l'on a :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

il faut commencer par décrire les 2 fonctions suivantes :

$$h_2(t) = \frac{A}{\Delta t} t \quad h_1(t + \tau) = A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t} \right)$$

7. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

valables pour $0 < t < \Delta t$, respectivement, $-\tau < t < \Delta t - \tau$.

Puis, tenant compte des parties nulles, il vient :

$$\begin{aligned}
 r_{21}(\tau) &= \int_0^{\Delta t - \tau} h_2(t) h_1(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^{\Delta t - \tau} \frac{A}{\Delta t} t A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t - \tau} \left(t - \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{\tau t}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\Delta t} - \frac{\tau t^2}{2\Delta t}\right) \Big|_0^{\Delta t - \tau} \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) - \frac{(\Delta t - \tau)^3}{3\Delta t}\right) \\
 &= A^2 \frac{(\Delta t + \tau)^2}{6 \Delta t^2} (\Delta t - \tau)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier les 2 valeurs suivantes :

$$r_{21}(\tau = 0) = A^2 \frac{\Delta t}{6} \quad r_{21}(\tau = \Delta t) = 0$$

SAL 1 Sachant qu'un signal aléatoire $x(t)$ décrit par sa fac

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 2\pi f_c$$

possède la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

on demande de calculer sa puissance de deux manières différentes. Que vaut-elle ?

Réponse : $P_x = \sigma_x^2$

SAL 2 Sachant qu'un bruit $x(t)$ dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = 10^{-4} [\text{V}^2] \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 1000 [\text{sec}^{-1}]$$

passé au travers d'un filtre passe-bande **idéal** caractérisé par ses deux fréquences de coupure $f_i = 100 [\text{Hz}]$ et $f_s = 200 [\text{Hz}]$, on demande de calculer les valeurs efficaces des signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$.

Réponse : $U_{x,eff} = 10 \text{ mV}$, $U_{y,eff} = 3.3 \text{ mV}$

SAL 3 On considère un bruit large-bande $x(t)$ dont la densité spectrale de puissance est constante et vaut

$$R_{xx}(f) = R_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$$

Sachant que le signal $x(t)$ passe au travers d'un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ nF}$, calculez la valeur efficace du bruit $y(t)$ en sortie du filtre.

Réponse : $P_y = \pi f_c R_0$, $U_{y,eff} = 700 \text{ mV}$

SAL 4 Idem SAL 3, mais avec un filtre CR passe-haut. Au vu du résultat obtenu, quel est le problème ? Que pensez-vous de $R_{xx}(f)$?

Rappel : $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \text{atan}(x)$

SAL 5 On considère un bruit $x(t)$ de puissance moyenne $P_x = 10^{-2} \text{ V}_{eff}^2$. Admettant que sa densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ puisse être décrite par une fonction triangulaire de hauteur R_0 et de base $2f_0 = 20 \text{ kHz}$, calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = P_x/f_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$

SAL 6 Admettant qu'un signal aléatoire de puissance P_x est décrit par la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} R_0 \cdot \left(\frac{|f|-f_0}{f_0}\right)^2 & \text{si } -f_0 < f < +f_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = \frac{3}{2} P_x/f_0$

SAL 7 On admet qu'un signal $x(t)$ possède une densité spectrale de la forme

$$R_{xx}(f) = R_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \quad -\infty < f < +\infty$$

Sachant que la tension efficace du signal $x(t)$ vaut U_{eff} , calculez R_0 .

Réponse : $R_0 = P_x/(\pi f_0)$

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970

Troisième partie .

**Étude des signaux et systèmes
numériques**

8. Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques

Dans ce chapitre, les approches temporelle et fréquentielle de l'échantillonnage sont analysées en détail de manière à bien mettre en évidence le recouvrement spectral qui conduit au théorème de Shannon.

Puis, les effets de la quantification, la notion de rapport signal sur bruit (SNR) sont étudiés de manière à conduire au meilleur choix d'un filtre anti-repliement.

8.1. Introduction

La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux biologiques, sismiques, radars, audio ou vidéo sont analogiques par nature. C'est-à-dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux-mêmes varient de manière continue. Ces signaux peuvent être traités analogiquement à l'aide de filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques (figure 8.1).

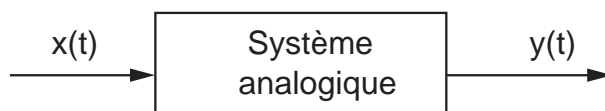


FIGURE 8.1.: Traitement analogique d'un signal $x(t)$

Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité, etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable. On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques (CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. Le schéma correspondant est donné à la figure 8.2.

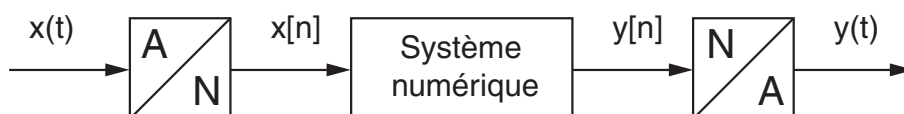


FIGURE 8.2.: Traitement numérique d'un signal analogique $x(t)$

Conceptuellement, on peut considérer la conversion A–N comme un processus faisant intervenir trois actions successives : l'échantillonnage à période fixe T_e , la quantification du signal et son codage. Pratiquement, ces opérations sont effectuées dans un même élément, le convertisseur A–N, qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié.

De même pour la conversion N–A, les opérations implicitement réalisées sont la quantification et le maintien de la valeur numérique pendant une période d'échantillonnage. À ceci s'ajoute généralement un filtrage passe-bas des "escaliers" générés par le convertisseur N–A.

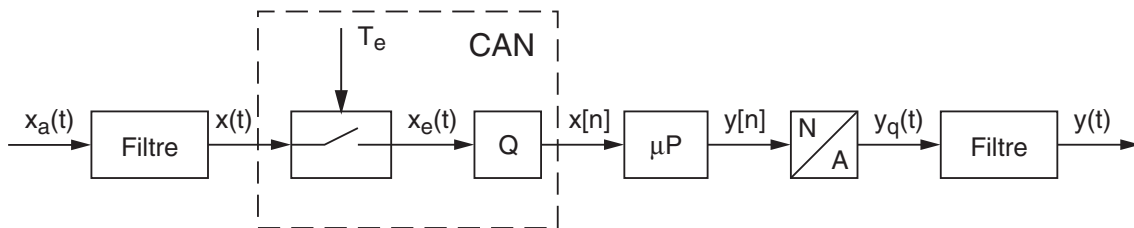


FIGURE 8.3.: Détail d'une chaîne analogique-numérique-analogique

La figure 8.3 présente les éléments qui interviennent lors du traitement numérique d'un signal analogique. On y trouve un filtre antirecouvrement (on verra plus loin sa raison d'être), un échantillonneur commandé par une horloge de période T_e , un quantificateur Q , un processeur numérique μP , un convertisseur N–A et un filtre de lissage.

8.2. Analyse temporelle

8.2.1. Types de signaux

De manière générale, les signaux peuvent être classés dans les catégories suivantes :

1. **Signaux continus en temps et en amplitude** : $x(t)$. On les appelle également signaux analogiques (figure 8.4a) ; ils proviennent généralement de processus physiques.
2. **Signaux discrets en temps, continus en amplitude** : $x_e(t = nT_e)$. Ce sont les signaux échantillonnés (figure 8.4b). Ils ne sont définis qu'à des instants déterminés multiples de la période d'échantillonnage T_e , mais leur amplitude peut varier de manière continue.
3. **Signaux discrets en temps et en amplitude** : $x_q[n]$. De tels signaux sont quantifiés en amplitude ; ils ne peuvent prendre que des valeurs déterminées, généralement, multiples d'un pas de quantification. Ce sont les valeurs numériques fournies par les convertisseurs analogiques-numériques (CAN). Ils ne sont définis qu'aux instants d'échantillonnage et correspondent aux signaux numériques (figure 8.4c).

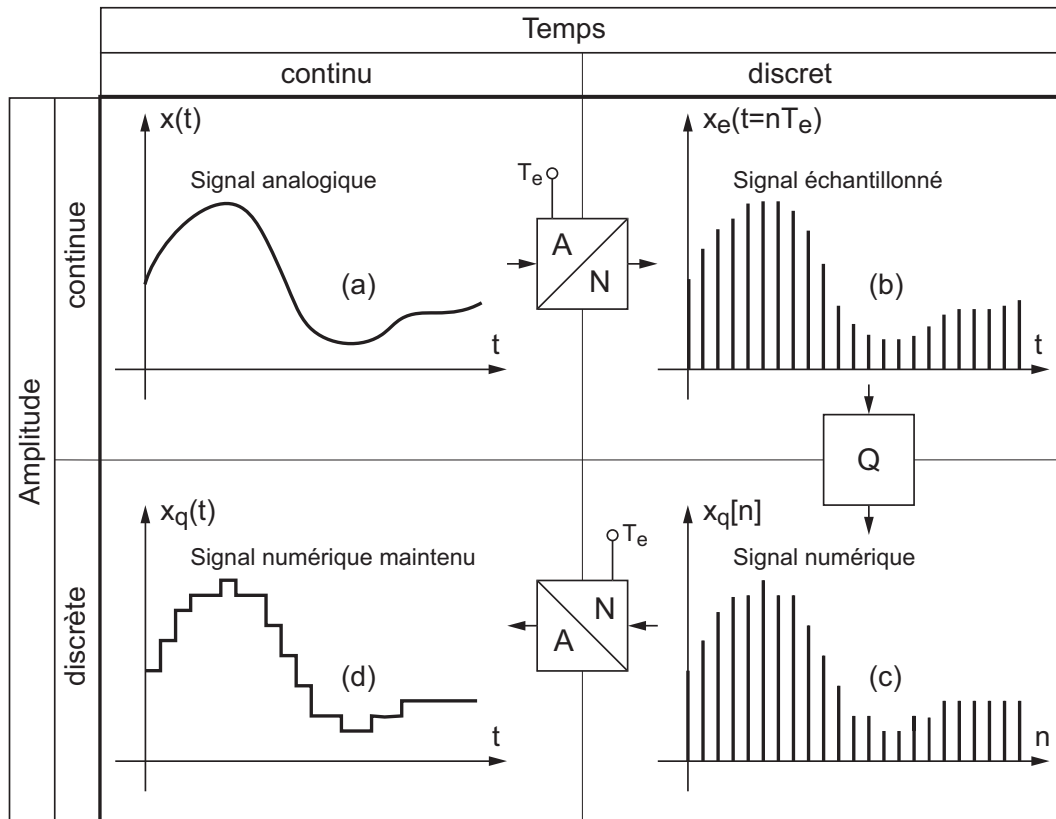


FIGURE 8.4.: Divers types de signaux

4. **Signaux continus en temps, discrets en amplitude** : $x_q(t)$. Ce sont des signaux quantifiés similaires à ceux décrits en 3, dont la valeur est maintenue par un bloqueur d'ordre zéro entre 2 périodes d'échantillonnage (figure 8.4d). Ces signaux correspondent à ceux fournis par les convertisseurs numériques-analogiques (CNA).

8.2.2. Quantification d'un signal : exemple

Donnée On considère un convertisseur A–N 8 bits travaillant entre 0 et 5.12 V avec un codage par arrondi et une période d'échantillonnage $T_e = 0.5 [msec]$. Le signal d'entrée est une exponentielle amortie :

$$x(t) = U_0 \exp(-t/\tau) \varepsilon(t) \quad U_0 = 1 [V] \quad \tau = 1 [ms]$$

Question

1. Tracez la caractéristique du convertisseur et les graphes $x(t)$ et $x_q[n]$.
2. Quelles valeurs obtiendra-t-on pour $x_e[n]$, $x_q[n]$ et $q[n]$.

Réponse Le codage sur 8 bits par arrondi transforme le domaine de conversion de la tension d'entrée $0 \cdots 5.12 [V]$ en $2^8 = 256$ valeurs numériques discrètes avec

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

un pas de quantification de 20 [mV] (figure 8.5a). L'échantillonnage et la quantification du signal sont représentés dans la figure 8.5b. Le tableau suivant donne les différentes valeurs demandées avec les erreurs relatives causées par la quantification :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_e[n]$	1.000	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183
$x_q[n]$	1.00	0.60	0.36	0.22	0.14	0.08	0.04	0.04	0.02
$q[n]$	50	30	18	11	7	4	2	2	1
$\epsilon_q[n]$ %	0.00	-1.08	-2.15	-1.39	+3.47	-2.56	-19.7	+32.5	+9.29

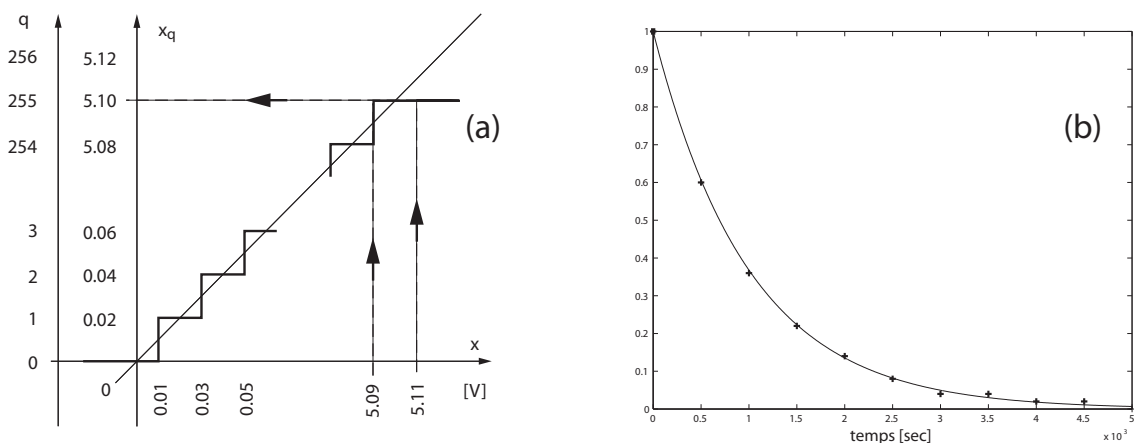


FIGURE 8.5.: Quantification et échantillonnage

8.2.3. Échantillonnage des signaux analogiques

Le signal d'entrée $x(t)$, dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite de valeurs est représentative du signal d'entrée dans la mesure où la période d'échantillonnage est compatible avec la rapidité du signal.

Envisagé dans le domaine temporel (figure 8.6), on peut considérer que le processus d'échantillonnage revient mathématiquement à multiplier le signal analogique $x(t)$ par une suite d'impulsions de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e , appelé "peigne de Dirac". Le signal échantillonné $x_e(t)$ peut alors être représenté par l'expression :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (8.1)$$

La fonction ainsi obtenue est une suite d'impulsions de Dirac dont la surface est modulée par le signal $x(t)$. Bien entendu, il s'agit là d'un modèle mathématique facilitant l'analyse de l'échantillonnage et qui, d'un point de vue pratique, donne heureusement des résultats pas trop différents de ce que l'on obtient avec un échantillonneur réel.

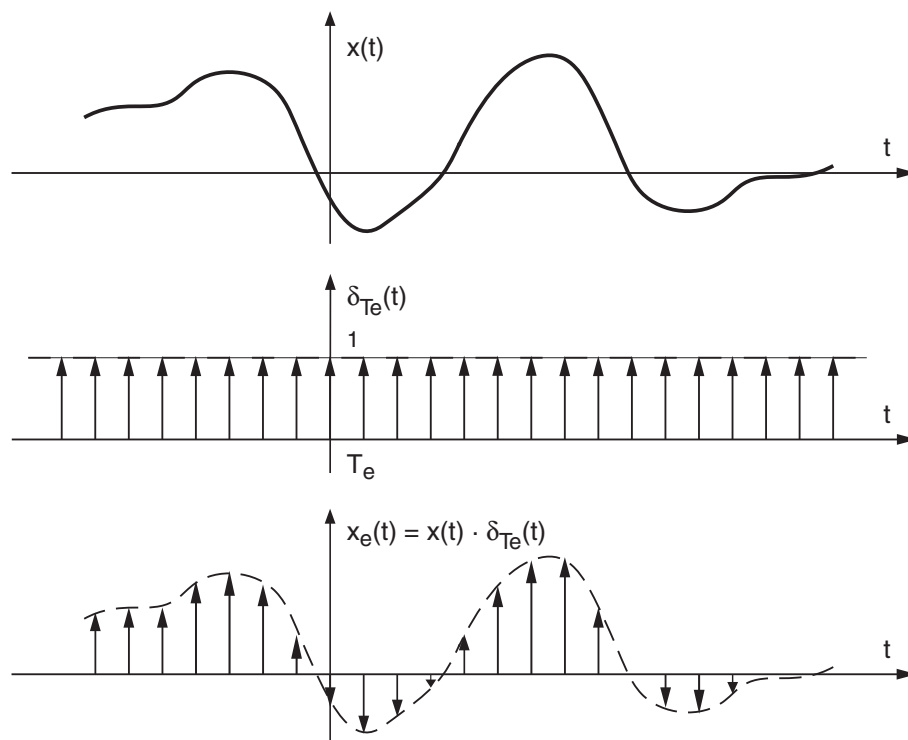


FIGURE 8.6.: Échantillonnage d'un signal

Si on veut respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres. Dans le cas contraire, il n'est plus possible de voir les variations les plus rapides du signal à traiter. Ceci conduit à une ambiguïté, car rien n'exclut que les points échantillonnés du signal A puissent appartenir à un autre signal B contenant des fréquences plus élevées (figure 8.7).

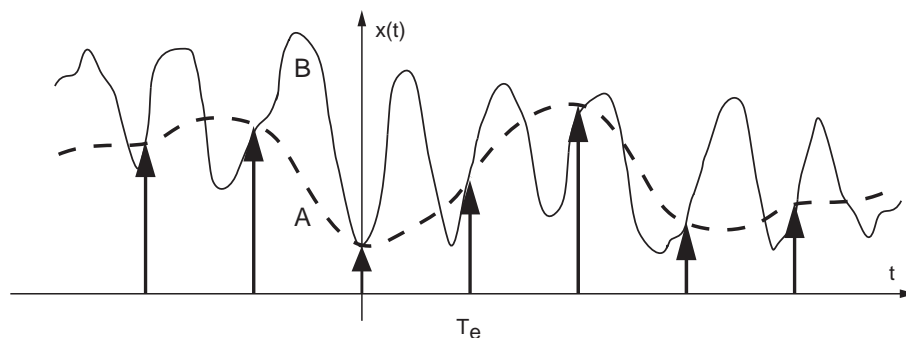


FIGURE 8.7.: Ambiguïté due à l'échantillonnage

8.3. Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage T_e dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

Nous venons de voir que l'échantillonnage d'un signal analogique est modélisé dans l'espace temps par la multiplication du signal $x(t)$ par un peigne temporel de Dirac $\delta_{T_e}(t)$. Or, on sait qu'à une multiplication temporelle correspond, dans l'espace des fréquences, une convolution fréquentielle entre le spectre $X(jf)$ du signal $x(t)$ et celui du peigne de Dirac $D(jf)$:

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) \quad (8.2)$$

8.3.1. Spectre d'un peigne de Dirac

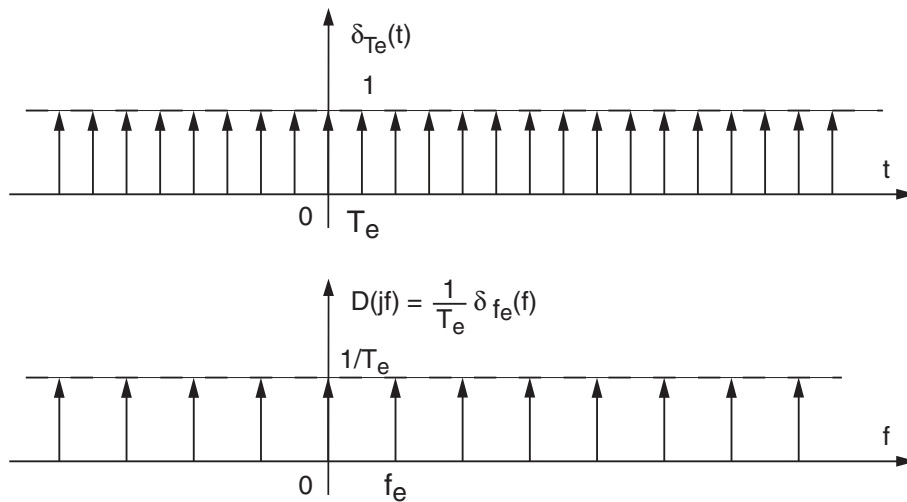


FIGURE 8.8.: Peigne d'impulsions de Dirac et son spectre

Propriété Le spectre d'un peigne temporel de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e est un peigne fréquentiel de Dirac $\delta_{f_e}(f)$ de période $f_e = 1/T_e$ et d'amplitude $1/T_e$.

Démonstration Comme la suite d'impulsions $\delta_{T_e}(t)$ est un signal périodique, on peut la décrire par sa décomposition en série de Fourier :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D(jk) \exp(+j2\pi k f_e t) \quad \text{avec} \quad f_e = \frac{1}{T_e}$$

où $D(jk)$ représente les coefficients de Fourier de $\delta_{T_e}(t)$ qui valent :

$$D(jk) \equiv \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \delta(t) \exp(-j2\pi k f_e t) dt = \frac{1}{T_e} \int_{0-}^{0+} \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{T_e}$$

Ce qui, en terme de transformation de Fourier, s'écrit également

$$D(jf) = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (8.3)$$

et donne un peigne fréquentiel de Dirac. Une représentation graphique en est donnée à la figure 8.8.

8.3.2. Spectre d'un signal échantillonné

On a vu ci-dessus que le spectre d'un signal échantillonné se calcule en effectuant la convolution entre les spectres $X(jf)$ et $D(jf)$ et que ce dernier est un peigne de Dirac de période spectrale f_e . Comme la convolution entre une impulsion de Dirac et une fonction continue reproduit la valeur de la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion de Dirac, on voit que le spectre de base $X(jf)$ est répété en tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e . On a donc :

$$X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e)) \quad (8.4)$$

Ce résultat très important montre que le spectre d'un signal échantillonné est la somme d'une répétition périodique du spectre du signal analogique $X(jf)$ (figure 8.9) et que la période de ce spectre est égale à la fréquence d'échantillonnage f_e .

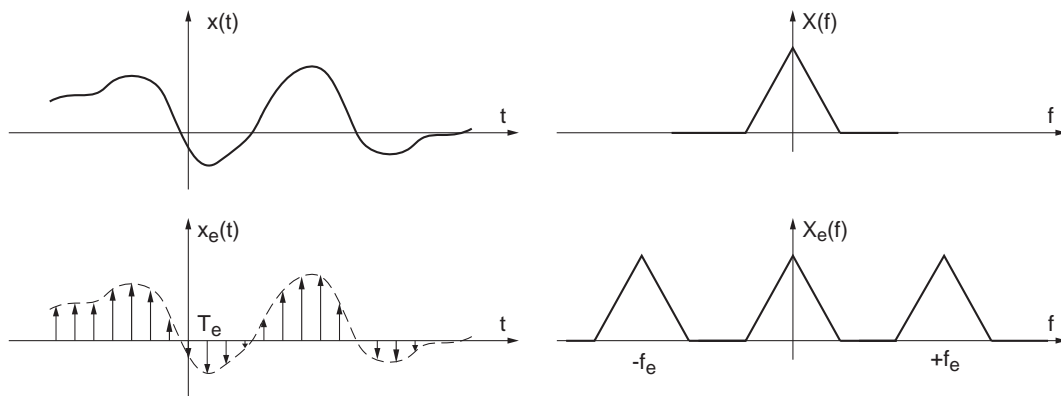


FIGURE 8.9.: L'échantillonnage d'un signal analogique provoque la répétition de son spectre

Échantillonnage d'une sinusoïde Considérant un signal sinusoïdal $x(t)$ de fréquence $f_0 = 3 [kHz]$ échantillonné à la fréquence $f_e = 8 [kHz]$, on obtient les points échantillonnés $x(nT_e)$ représentés à la figure 8.10a. Malgré le faible nombre de points obtenus (quatre points pour une période et demie), le signal $x(t)$ est univoquement défini du point de vue de Fourier.

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies spectrales se trouvant aux fréquences $\pm m f_e \pm f_0 = \pm 3, \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 19, \dots$. On en déduit que, dans la bande de base qui s'étend de 0 à $f_e/2 = 4 [kHz]$, il n'y a qu'une seule raie spectrale située en $f_0 = 3 [kHz]$. C'est la raie correspondant au signal original (figure 8.10b).

8.4. Recouvrement spectral

À cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de f_e , on imagine aisément que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

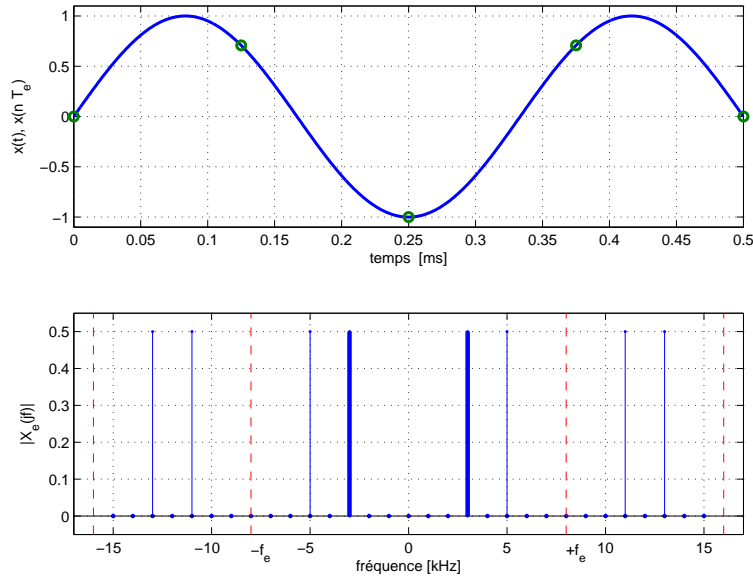


FIGURE 8.10.: Échantillonnage d'une sinusoïde ($f_e > 2 f_0$)

devient trop petite. La figure 8.11 illustre cette situation dans les domaines temporel et spectral. En réduisant la fréquence d'échantillonnage, on diminue la distance entre les spectres qui, pour finir, se recouvrent. Cette superposition correspond à la somme des spectres qui conduit à une déformation irrécupérable du spectre initial : il n'est plus possible de reconstituer le signal $x(t)$ à partir du spectre ainsi obtenu.

Il est donc important de ne pas oublier que l'échantillonnage d'un signal n'est pas une opération aussi anodine qu'elle paraît. Si la période d'échantillonnage est trop petite, cela peut modifier gravement le signal temporel perçu après échantillonnage. Comme le montre la figure 8.12, une sinusoïde de fréquence élevée peut être perçue comme un signal de fréquence beaucoup plus faible.

Le recouvrement spectral illustré par les figures 8.11 et 8.13 peut également être interprété comme un repliement du spectre autour de $f_e/2$. Cette fréquence particulièrement importante $f_N = f_e/2$ porte le nom de *fréquence de Nyquist* et elle délimite le domaine d'analyse compris entre $\pm f_e/2$. Ainsi que le montre la figure 8.13, les valeurs obtenues par superposition des spectres peuvent appartenir aussi bien à une sinusoïde de 2 kHz qu'à celle de 6, 10 ou 14 kHz. Ce qui fait que si l'on n'y prend pas garde, la fréquence réelle 6 kHz est perçue comme un signal basse-fréquence de 2 kHz. Tout se passe comme si les signaux de fréquences 6, 10 ou 14 kHz étaient perçus comme un seul signal de fréquence 2 kHz.

En analysant la figure 8.13, on voit que les raies spectrales apparentes dues à l'échantillonnage se situent en

$$f_{app} = \pm m f_e \pm f_k, \quad m \neq 0 \quad (8.5)$$

et que, si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée, elles peuvent se retrouver dans la bande de base $-f_e/2 < f < +f_e/2$.

Un exemple de repliement spectral bien connu est le phénomène observé au cinéma lorsqu'un chariot équipé de roues à rayons se déplace. La scène filmée est

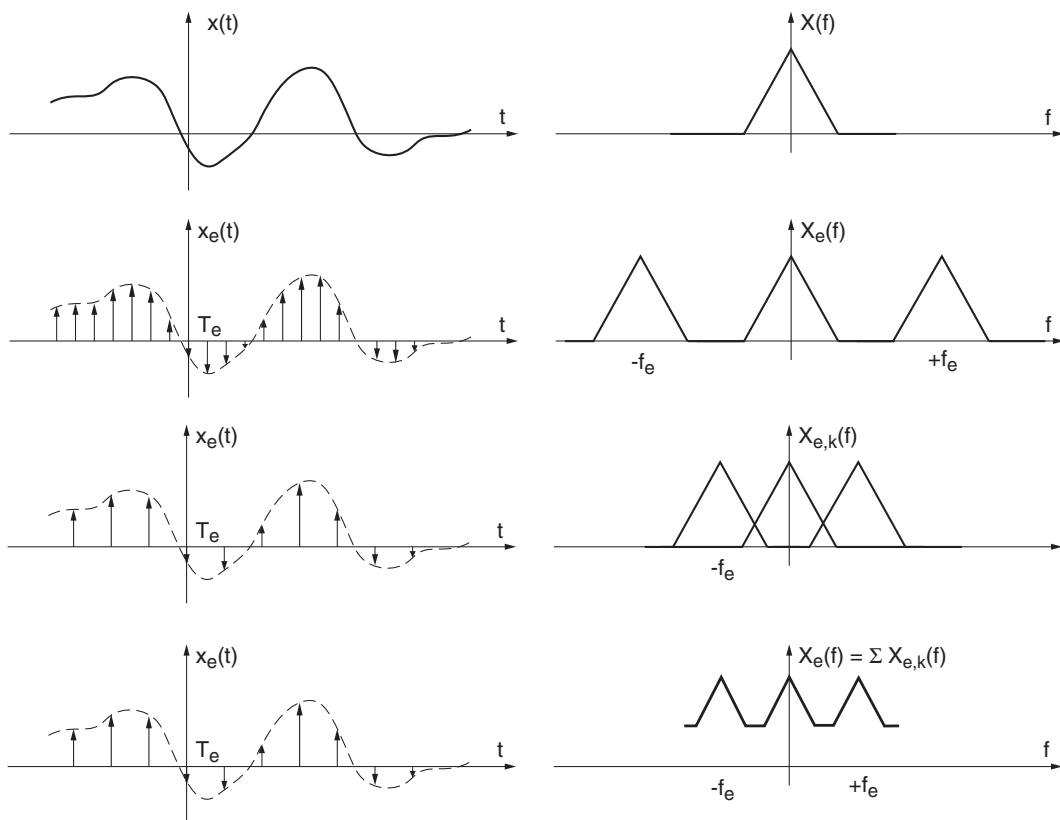


FIGURE 8.11.: Échantillonnage et recouvrement spectral

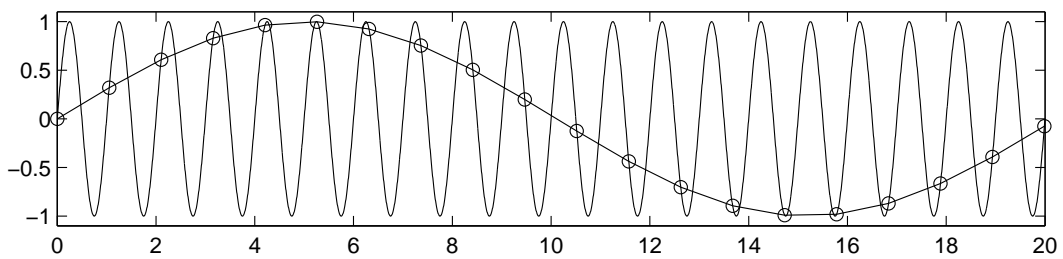


FIGURE 8.12.: Sinusoïde fortement sous-échantillonnée

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

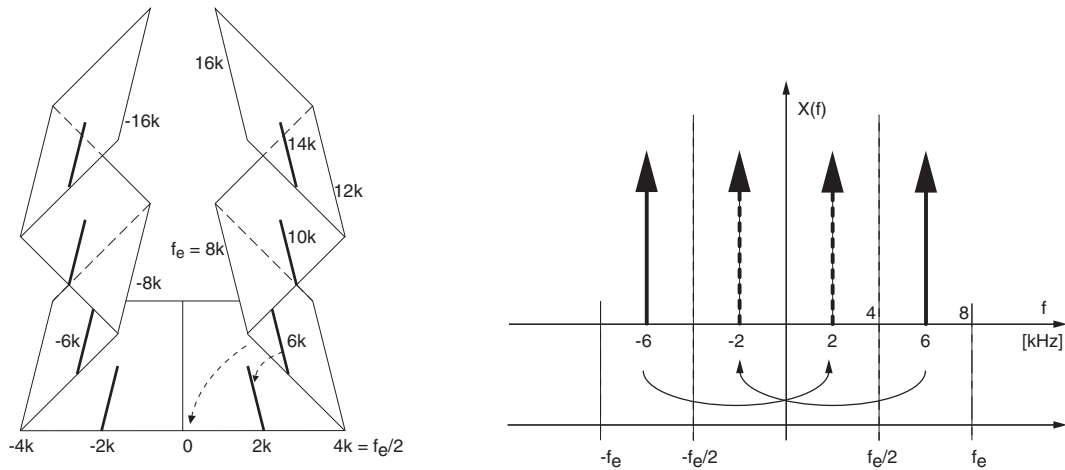


FIGURE 8.13.: Illustration du recouvrement spectral

échantillonnée par la caméra à raison de 24 images par secondes. Lorsque le chariot démarre et accélère, la fréquence du signal représenté par la rotation des rayons augmente et à un moment dépasse la fréquence de Nyquist (12 images par seconde). Dès cet instant, la vitesse de rotation semble diminuer, s'annuler et même devenir négative. L'information contenue dans l'image est faussée par le recouvrement spectral et ne correspond plus à la réalité. Il s'agit de l'effet stroboscopique bien connu.

8.4.1. Quelques exemples

Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

Donnée On considère un signal sinusoïdal $x(t)$ de fréquence $f_0 = 5 [kHz]$ que l'on échantillonne avec une fréquence $f_e = 8 [kHz]$.

Questions

1. Dessinez la fonction $x(t)$ et les points échantillonnés $x(t = nT_e)$.
2. Calculez la fréquence apparente f_{app} du signal $x[n] = x(t = nT_e)$.
3. Dessinez la sinusoïde basse-fréquence passant par les points échantillonnés.
4. Calculez et dessinez le spectre du signal échantillonné.

Réponses Les courbes demandées sont calculées et dessinées avec Matlab à l'aide des commandes ci-dessous :

```
% paramètres des signaux
fo = 5e3; fe = 8e3;
To = 1/fo; Te = 1/fe;
% calcul de x(t)
```

```

tmax = 5e-3; kmax = 500;
dt = tmax/kmax;
tt = 0:dt:tmax;
xt = sin (2*pi* tt/To);

```

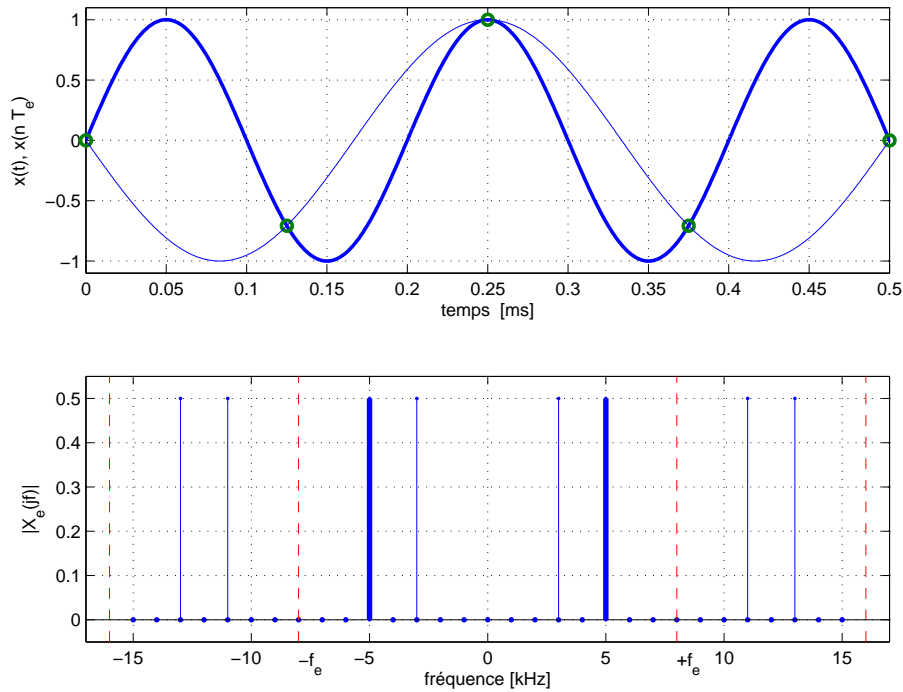


FIGURE 8.14.: Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

La fréquence apparente vaut $f_{app} = |f_0 - f_e| = 3 [kHz]$. Comme elle se situe en dessous de la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2 = 4 [kHz]$, elle sera associée à la présence d'une oscillation de période 0.33 [ms] qui n'existe pas en réalité (figure 8.14).

```

% signal apparent
fapp = fo - fe;
xta = sin (2*pi * tt * fapp);
% échantillonnage de x(t)
tn = 0:Te:tmax;
xn = sin (2*pi * tn/To);
% traçage dans le domaine temporel
subplot(2,1,1);
h1 = plot (tt, xt); grid;
set(h1,'LineWidth',2); hold on;
plot(tn, xn, 'o', tt, xta, '-');
xlabel ('temps [sec]');

```

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies se trouvant aux fréquences suivantes :

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

$k = 1, m = 0, 1, 2, 3$	0	1	2	3	...
$+m f_e \pm f_0$	± 5	+3, +13	+11, +21	+19, +29	...
$-m f_e \pm f_0$	± 5	-3, -13	-11, -21	-19, -29	...

On en déduit l'information erronée que, dans la bande de base allant de 0 à $f_e/2 = 4 [kHz]$, il n'y a qu'une raie spectrale : celle correspondant au signal apparent de fréquence $f_{app} = 3 [kHz]$ (figure 8.14).

Échantillonnage d'un signal carré

Considérons un signal carré de période $T_0 = 1 [ms]$ dont on sait que son spectre est constitué de raies situées en tous les multiples impairs de la fondamentale $f_0 = 1 [kHz]$. Ce signal est échantillonné à la fréquence $f_e = 12.8 [kHz]$.

Comme le rapport entre $f_e = 12.8 [kHz]$ et $f_0 = 1 [kHz]$ n'est pas entier ; le recouvrement spectral fait apparaître de manière évidente des raies parasites en des fréquences inattendues (figure 8.15). Ces raies apparentes se situent en

$$f_{app} = \pm m \cdot f_e \pm k \cdot f_0$$

En ne considérant que les premiers spectres latéraux ($m = \pm 1$), on peut calculer les fréquences apparentes suivantes

$$f_{app} = \pm 12.8 \pm (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$$

De manière plus détaillée, cela donne :

$m = \pm 1, k = 1, \dots$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
$+12.8 + (\dots)$	+13.8	+15.8	+17.8	+19.8	+21.8	+23.8	+25.8	+27.8	+29.8	...
$+12.8 - (\dots)$	+11.8	+9.8	+7.8	+5.8	+3.8	+1.8	-0.2	-2.2	-4.2	...
$-12.8 + (\dots)$	-11.8	-9.8	-7.8	-5.8	-3.8	-1.8	+0.2	+2.2	+4.2	...
$-12.8 - (\dots)$	-13.8	-15.8	-17.8	-19.8	-21.8	-23.8	-25.8	-27.8	-29.8	...

Les valeurs mises en gras correspondent aux fréquences apparentes que l'on retrouve dans la bande de base comprise entre 0 et $f_N = f_e/2 = 6.4 [kHz]$.

Échantillonnage d'une suite d'impulsions rectangulaires

Afin de mieux comprendre comment un spectre est modifié par le recouvrement spectral, on considère une SIR de période $T_0 = 1 [ms]$ et de largeur $\Delta t = 0.2 [ms]$. Cette SIR est échantillonnée à la fréquence $f_e = 16 [kHz]$

On sait que le spectre de la SIR est constitué de raies situées en des multiples de la fondamentale $f_0 = 1 [kHz]$ s'annulant pour tous les multiples de $1/\Delta t = 5 [kHz]$. À cause de l'échantillonnage, ce spectre devient périodique f_e . Une illustration en est donnée dans la figure 8.16 où l'on a représenté

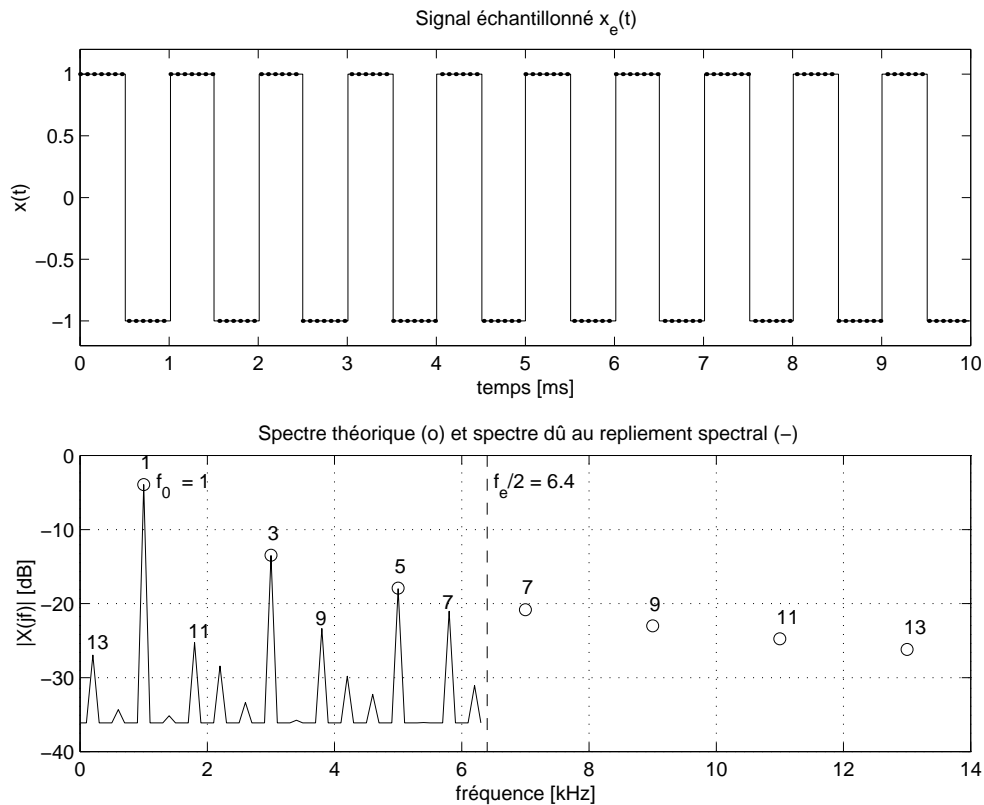


FIGURE 8.15.: Échantillonnage d'un signal carré

1. le signal temporel $x(t)$ et les valeurs échantillonnées $x_e(n)$;
2. le spectre de base $X(jf)$ et son enveloppe (sinus cardinal) ;
3. le spectre de base $X(jf)$ et ses copies en $f = \pm f_e$;
4. le spectre $X_e(jf)$ du signal échantillonné qui provient de la somme des spectres précédents.

Comme le spectre du signal échantillonné est la somme de tous les spectres décalés en $\pm m f_e$, on voit que le spectre résultant est composé du spectre original auquel viennent s'ajouter les raies spectrales des spectres latéraux.

Dans cet exemple où nous avons choisi un rapport entier entre f_e et f_0 égal à 16, les raies spectrales se superposent alors exactement. Si bien que l'on observe des raies situées à l'endroit où on les attend. *Le risque est alors grand de ne pas voir que les amplitudes des raies spectrales sont faussées par le recouvrement spectral.*

En particulier, si l'on considère la raie spectrale d'ordre 4, on voit que le résultat dû à l'échantillonnage sera la somme des composantes d'ordre $+20, -12, (f_e \pm 4), +36, -28, (2f_e \pm 4) \dots$ dues aux décalages spectraux $\pm f_e, \pm 2f_e, \dots$. On voit donc que, de manière générale, le repliement spectral fait apparaître en la fréquence $f_k = k f_0$ des composantes spectrales provenant de $k f_0 \pm m f_e$.

À titre informatif, voici le code Matlab créé pour analyser l'échantillonnage de la SIR.

```
% création d'une période
```

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

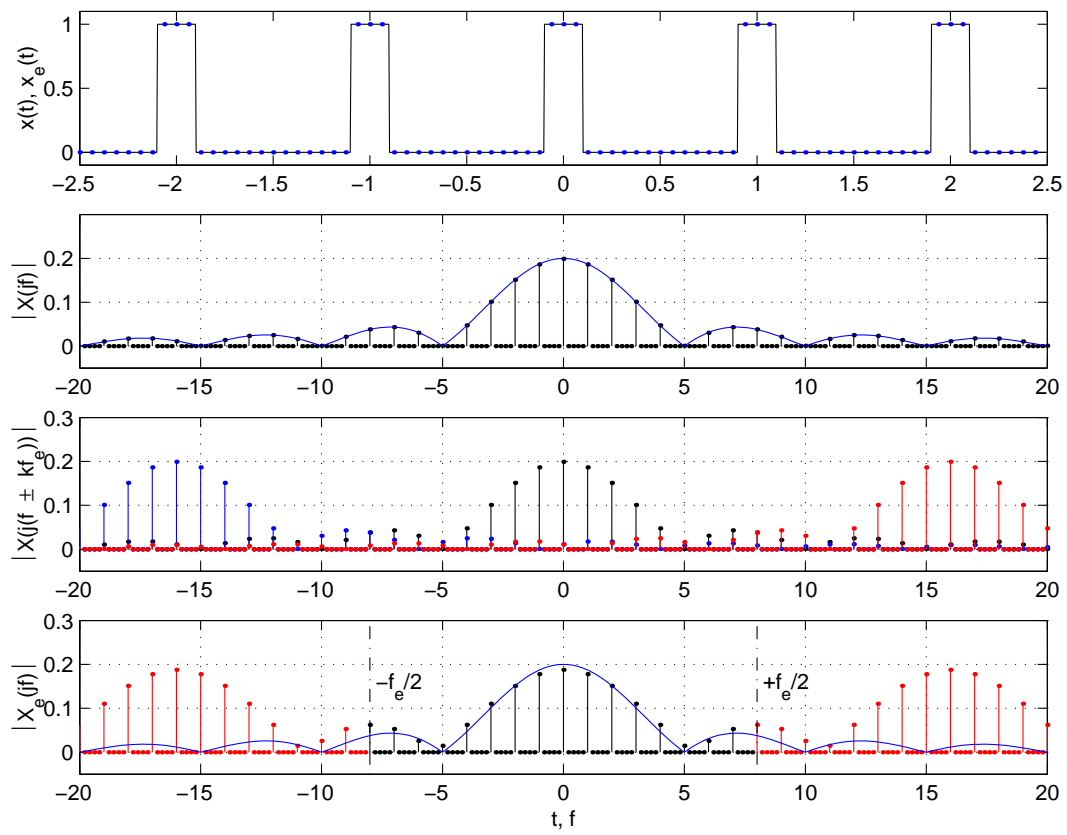


FIGURE 8.16.: Échantillonnage d'une SIR

```

T0 = 1; delta = 1/5; k0 = 256;
dt = T0/k0;
t0 = -T0/2:dt:T0/2-dt;
xt0 = (t0>(-delta/2)) & (t0<(delta/2));

% création de Nper périodes
Nper = 5;
tt = -Nper*T0/2:dt:Nper*T0/2-dt;
xt = [];
for k1 = 1:Nper, xt = [xt,xt0]; end;

% échantillonnage tous les ndt points
ndt = 16; Te = ndt*dt;
tn = tt(1:ndt:length(tt));
xn = xt(1:ndt:length(xt));

% spectre de xt (analogique)
duree = max(tt)-min(tt)+dt;
fmax = 1/dt; df = 1/duree;
ff = -fmax/2:df:fmax/2-df;
Xjf = fftshift(fft(xt))/length(xt);
Xf = abs(Xjf);

% spectre théorique de xt (enveloppe)
Xjftth = delta/T0*sinc(ff*delta/T0);

% spectre de xn
fe = 1/Te; Nfft = length(xn);
dfe = fe/Nfft;
ffe = -fe/2:dfe:fe/2-dfe;
Xejf = fftshift(fft(xn))/Nfft;

% graphes
subplot(4,1,1);
plot(tt,xt,tn,xn,'.');
subplot(4,1,2);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjftth));
subplot(4,1,3);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
stem(ff-fe,Xf,'b. ');
stem(ff+fe,Xf,'r. ');
subplot(4,1,4);
stem(ffe,abs(Xejf),'. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjftth));

```

Échantillonnage d'une exponentielle décroissante

Donnée Une exponentielle décroissante d'amplitude $A = 10V$, de constante de temps $\tau = 0.2 msec$ est échantillonnée avec $T_e = \tau/2 = 0.1 msec$.

Question Calculez le contenu spectral du signal échantillonné pour $f = 0$ et $f = f_c$ en se limitant à l'effet des 2 premiers spectres latéraux seulement.

Réponse Sachant que le signal

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \varepsilon(t)$$

possède le spectre suivant

$$X(jf) = A \frac{\tau}{1 + j2\pi f\tau}$$

le spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ vaut :

$$\begin{aligned} X_e(jf) &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(f - k f_e)) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{1 + j2\pi(f - k f_e)\tau} \end{aligned}$$

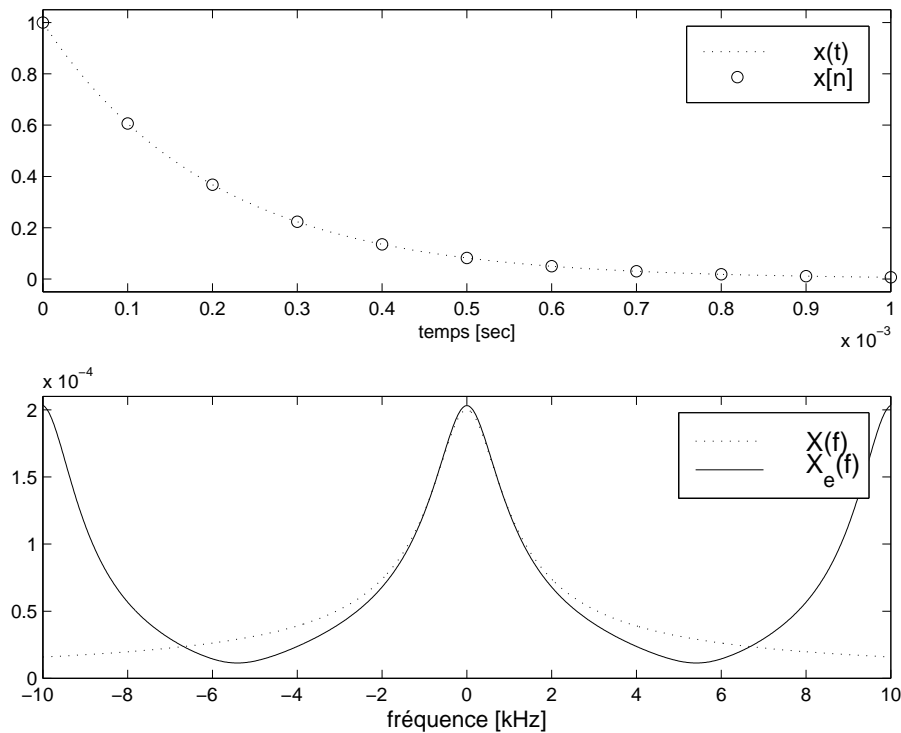


FIGURE 8.17.: Échantillonnage d'une exponentielle amortie et son spectre

La méthode la plus simple pour calculer $X_e(jf)$ consiste à utiliser Matlab. Dans le calcul qui suit, on notera que pour des raisons d'échelle, la période d'échantillonnage n'est pas prise en compte dans le calcul des spectres.

```

% parametres
A = 10.0; tau = 0.2e-3;
fc = 1/(2*pi*tau);
Te = tau/2; fe = 1/Te;

% spectre original en f = 0 et f = fc:
f = [0, fc];
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
Xfm = abs (Xf0)
    >> Xfm = 0.2000e-3 0.1414e-3

% repetition spectrale
% spectre original
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
% spectres dus à ±fe
Xfp1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + fe)*tau);
Xfm1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - fe)*tau);
% spectres dus à ±2fe
Xfp2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + 2*fe)*tau);
Xfm2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - 2*fe)*tau);

% spectre résultant
Xfe = Xf0 + Xfm1 + Xfp1 + Xfm2 + Xfp2
Xfem = abs (Xfe)
    >> Xfem = 0.2031e-3 0.1415e-3

% erreurs relatives
erreurs = (Xfem - abs(Xf0)) ./ abs(Xf0)
    >> erreurs = 0.0157 0.0008

```

Cet échantillonnage de l'exponentielle amortie avec $T_e = \tau/2$ conduit donc aux erreurs relatives suivantes :

- 1.57% pour l'amplitude de la composante continue
- 0.08% pour l'amplitude à la fréquence de coupure ($f_c = 796 [Hz]$).

Une illustration de la somme de ces spectres est donnée à la figure 8.17.

8.5. Théorème de l'échantillonnage

Les exemples ci-dessus ont montré à l'évidence que les résultats fournis par l'analyse d'un signal échantillonné peuvent être gravement modifiés si l'on n'y prend pas garde. En 1948, Shannon a montré que, pour éviter ces problèmes, il suffit de

satisfaire l'inégalité suivante :

$$f_e > 2 f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e < \frac{T_{min}}{2} \quad (8.6)$$

Ce théorème s'énonce également de la manière suivante :

Un signal $x(t)$ peut être représenté de manière univoque par une suite de valeurs échantillonnées si la fréquence d'échantillonnage f_e est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.

En pratique, on limite, avant échantillonnage, le spectre du signal avec un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure dépend de la bande passante utile. Afin de laisser un peu d'espace pour la bande de transition du filtre antirecouvrement, on choisira :

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e \simeq \frac{T_{min}}{3 \cdots 5} \quad (8.7)$$

Plus de détails seront donnés dans la section 8.7.

8.5.1. Filtre antirecouvrement

En général, les fréquences présentes dans un signal s'étendent sur un domaine plus étendu que ce qui est utile pour le message à transmettre. Suivant la qualité attendue pour celui-ci, on limite plus ou moins le domaine fréquentiel sur lequel portera le traitement du signal.

Connaissant ce domaine d'intérêt, délimité par la fréquence f_{max} , on pourra éviter le recouvrement spectral en **filtrant analogiquement le signal $x(t)$ avant son échantillonnage**. Comme il n'est pas possible, avec un filtre réel, de supprimer totalement les fréquences supérieures à f_{max} , on est amené à accepter l'effet d'un léger recouvrement spectral.

La figure 8.18 illustre le recouvrement spectral que l'on obtient avec des filtres de Butterworth dont la réponse fréquentielle et le recouvrement spectral sont décrits par

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}} \quad H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{2m}}} \quad (8.8)$$

8.5.2. Exemple

Donnée Considérons un signal $x(t)$, à spectre constant dans une large bande de fréquence que l'on filtre passe-bas avec un filtre de Butterworth d'ordre $m = 6$ et de fréquence de coupure $f_c = 1 [kHz]$.

Dans ce qui suit, on souhaite estimer la valeur de la fréquence d'échantillonnage f_e nécessaire pour que l'effet du recouvrement spectral à la fréquence de coupure f_c soit inférieur à 1%.

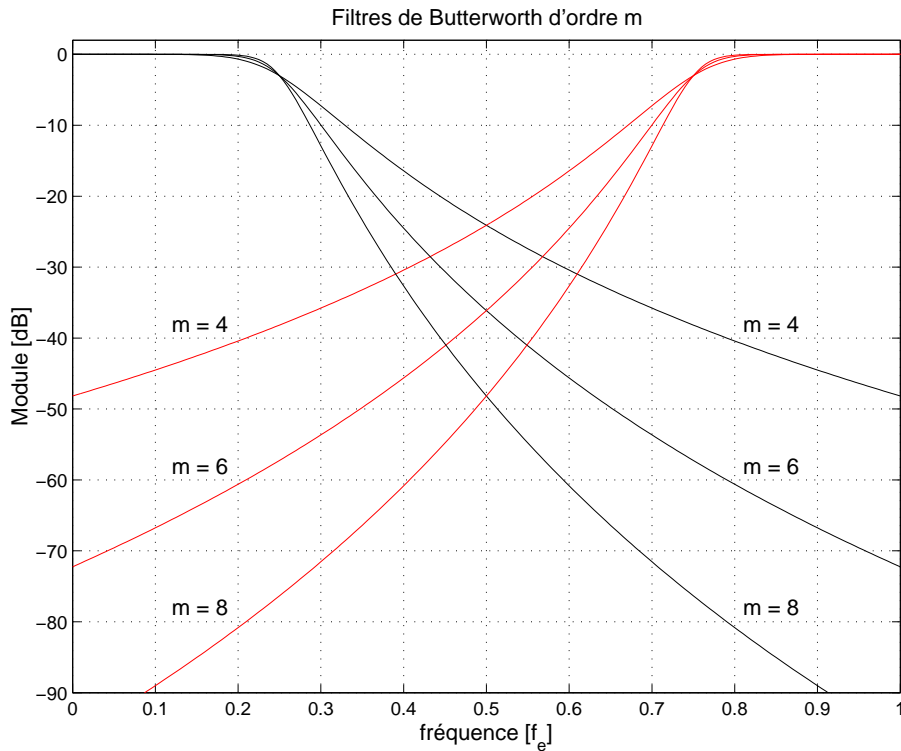


FIGURE 8.18.: Recouvrement spectral pour un filtre de Butterworth ($f_e = 4 f_c$)

Solution Puisque en $f = f_c$, l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth vaut $1/\sqrt{2} = 0.707$, l'amplitude due au recouvrement spectral en cet endroit devra être inférieure à 1% de 0.707; c'est-à-dire, $0.00707 = 1/141$ (figure 8.19).

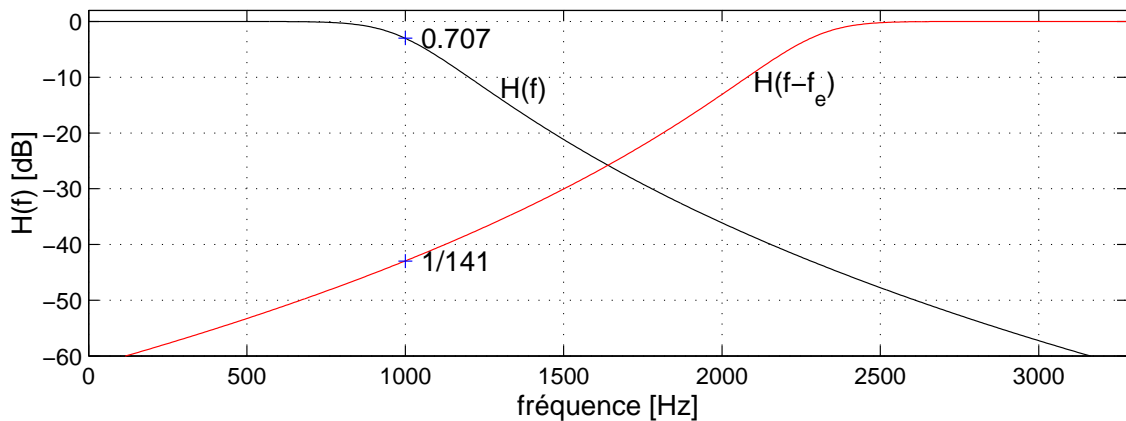


FIGURE 8.19.: Effet du filtre antirecouvrement d'ordre 6 avec $f_e = 3.28 f_c$

Ne considérant que le premier spectre latéral, l'effet du recouvrement est décrit par la réponse fréquentielle centrée en $+f_e$:

$$H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{12}}} = \frac{1}{141} \quad \text{lorsque } f = f_c$$

On a donc :

$$1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c} \right)^{12} = 1 + \left(\frac{f_e - f_c}{f_c} \right)^{12} = 141^2 = 2 \cdot 10^4$$

De cette équation, on tire :

$$\begin{aligned} f_e &= \left(1 + (2 \cdot 10^4)^{1/12} \right) f_c \\ &= 3.28 f_c = 3.28 [kHz] \end{aligned}$$

Remarque Il est important de relever que ce résultat provient d'une estimation basée sur les modules des spectres alors que, pour être exact, il aurait fallu travailler avec les spectres complexes (voir l'exemple du paragraphe 8.4.1).

8.6. Quantification d'un signal échantillonné

8.6.1. Quantification uniforme

Le convertisseur A–N effectue la numérisation d'un signal analogique après échantillonnage et délivre des séquences numériques codées avec un pas de quantification Q dépendant du nombre de bits du convertisseur. Dans le cas d'une loi de quantification uniforme où les valeurs codées sont obtenues par arrondi dans le domaine de conversion Δ_{CAN} du convertisseur, on a :

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} \quad (8.9)$$

Considérant pour la suite que le CAN travaille avec n bits entre $+U_{max}$ et $-U_{max}$ (figure 8.20), on a $\Delta_{CAN} = 2U_{max}$ et le pas de quantification vaut alors

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{2U_{max}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}} \quad (8.10)$$

Le pas de quantification Q rapporté au domaine de conversion Δ_{CAN} définit la résolution du convertisseur

$$R_{CAN} \equiv \frac{Q}{\Delta_{CAN}} = \frac{1}{2^n} = 1 \text{ LSB} \quad (8.11)$$

On dit, de manière équivalente, que la résolution est égale au poids du bit le plus faible du convertisseur.

Lorsque les valeurs codées sont obtenues par arrondi, l'erreur due au codage se répartit uniformément autour de la droite de conversion idéale et la caractéristique de codage est celle représentée à la figure 8.20. Dans le domaine de quantification, l'erreur maximum due à la quantification vaut alors :

$$E_Q = \frac{Q}{2} = \frac{U_{max}}{2^n}$$

Par exemple, si l'on considère un CAN 4 bits travaillant entre ± 8 [V], on aura

$$\Delta_{CAN} = 16 \text{ [V]} \quad Q = \frac{2 \cdot 8 \text{ [V]}}{2^4} = 1.00 \text{ [V]} \quad E_Q = 0.50 \text{ [V]} \quad R_{CAN} = \frac{1}{16}$$

En observant attentivement la figure 8.20, on voit que le domaine de conversion s'étend plus précisément de $U_{min} = -8 - 0.5 = -8.5$ [V] à $U_{max} = +8 - 0.5 = 7.5$ [V]. Ce qui donne bien évidemment $\Delta_{CAN} = 16$ [V].

Remarque Il est important de bien distinguer entre résolution et précision d'un convertisseur. Généralement, ces deux grandeurs sont du même ordre. On peut cependant très bien imaginer l'exemple d'un convertisseur 4 bits qui aura une résolution de $1/16 = 6.25\%$ alors que les 16 valeurs fournies par le convertisseur peuvent être précises à 0.1%.

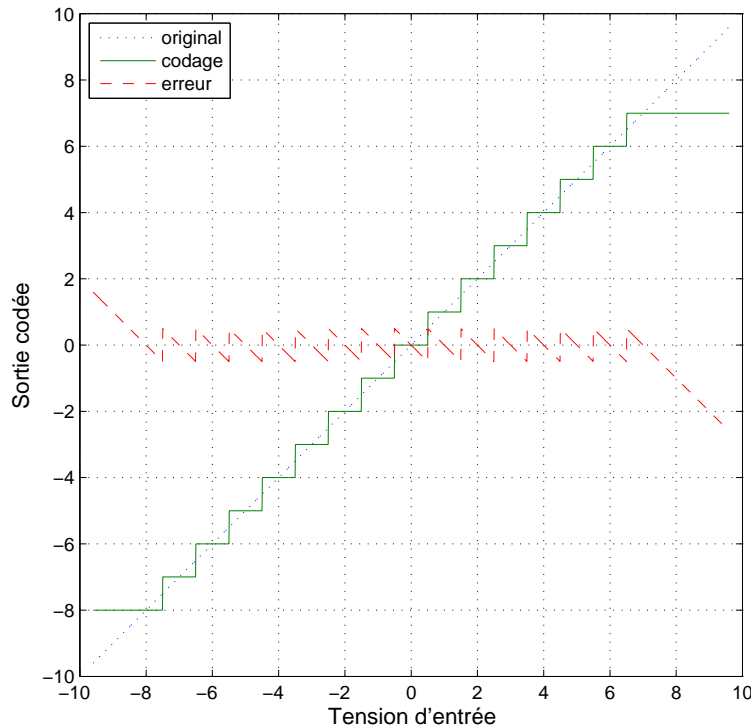


FIGURE 8.20.: Loi de quantification uniforme et signal d'erreur pour un convertisseur 4 bits travaillant entre ± 8 [V]

8.6.2. Bruit de quantification

Nous venons de voir que l'opération de quantification remplace chaque valeur du signal $x(t = nT_e)$ par une approximation. L'effet de cette approximation revient, mathématiquement, à superposer au signal d'origine $x(t)$ un signal d'erreur $e(t)$ que l'on appelle le bruit de quantification. L'amplitude maximum de ce signal d'erreur est $E_Q = Q/2$ (figure 8.21). Sa puissance est une mesure de la dégradation que subit le signal.

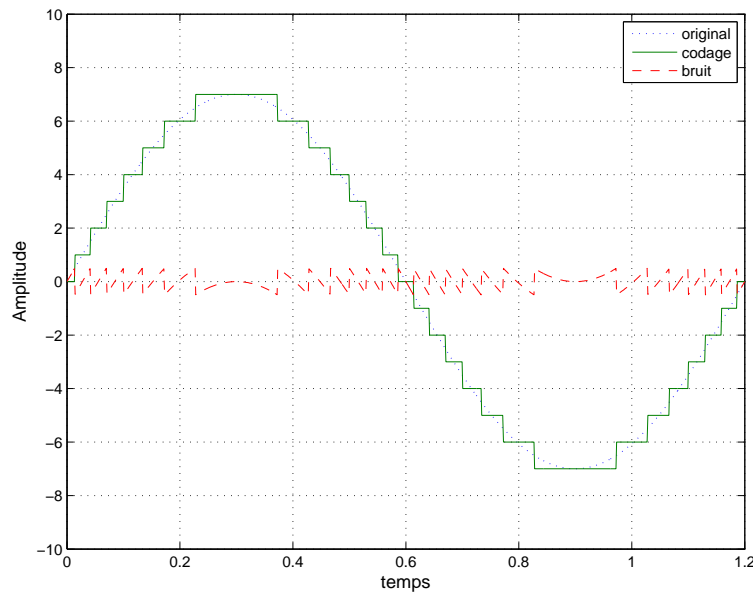


FIGURE 8.21.: Numérisation et bruit de quantification d'un signal analogique ne débordant pas le domaine du CAN

Si le pas de quantification est beaucoup plus petit que l'amplitude du signal $x(t)$, on peut raisonnablement admettre que le signal d'erreur est constitué de segments de droite compris entre $\pm Q/2$ et de durée variable Δt (figure 8.21). L'équation décrivant ce signal d'erreur élémentaire s'écrit alors :

$$e(t) = \frac{Q}{\Delta t}t \text{ pour } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq +\frac{\Delta t}{2}$$

et sa puissance moyenne vaut :

$$\begin{aligned} P_Q &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^2(t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left(\frac{Q}{\Delta t} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{Q}{\Delta t} \right)^2 \frac{1}{3} 2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement le résultat bien connu pour une distribution statistique uniforme :

$$P_Q = \frac{E_Q^2}{3} = \frac{Q^2}{12} \quad (8.12)$$

La valeur ainsi obtenue est une estimation de la puissance du bruit de quantification suffisante pour la plupart des cas réels. Si l'on exprime cette puissance par rapport au nombre de bits du convertisseur, on obtient :

$$P_Q = \frac{1}{12} \left(\frac{2U_{max}}{2^n} \right)^2 = \left(\frac{U_{max}}{2^n \sqrt{3}} \right)^2$$

8.6. Quantification d'un signal échantillonné

La puissance du bruit de quantification P_Q permet de calculer la valeur efficace du bruit de quantification qui vaut :

$$Q_{eff} = \sqrt{P_Q} = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (8.13)$$

Le spectre du signal d'erreur est plus difficile à évaluer. Mais dans la plupart des cas, les conditions sont remplies pour que la densité spectrale du bruit de quantification puisse être considérée constante.

8.6.3. Rapport signal sur bruit

Lorsque qu'un signal est perturbé par du bruit, il est nécessaire de chiffrer l'importance de cette perturbation par rapport au signal. On introduit alors la notion de rapport signal sur bruit (SNR = Signal to Noise Ratio) défini comme le quotient entre la valeur efficace du signal X_{eff} et celle du bruit N_{eff} :

$$SNR \equiv \frac{X_{eff}}{N_{eff}} \quad (8.14)$$

Dans notre cas, le bruit est dû à la quantification du signal. On a donc $N_{eff} = Q_{eff}$ avec $Q_{eff} = Q/\sqrt{12}$. Le rapport signal sur bruit d'un convertisseur vaut alors :

$$SNR = \frac{X_{eff}}{Q/\sqrt{12}} = 2^{n-1} \sqrt{12} \frac{X_{eff}}{U_{max}} \quad (8.15)$$

Exprimé en dB, ce rapport signal sur bruit vaut :

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(12) + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} \end{aligned}$$

d'où :

$$SNR_{dB} = 6n + 4.8 \text{ dB} + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} < 6n + 4.8 \text{ dB} \quad (8.16)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit d'un convertisseur A-N dépend de son domaine de conversion et de la valeur efficace du signal. Comme l'amplitude de celui-ci ne doit pas dépasser le domaine du convertisseur si l'on veut éviter des saturations, on voit que le SNR sera toujours inférieur à $6n + 4.8$ dB.

8.6.4. SNR de quelques signaux

Signal sinusoïdal "pleine échelle"

Dans le *cas particulier* où le signal analogique est une *sinusoïde d'amplitude égale à la tension maximum* U_{max} du convertisseur A-N, on a :

$$X_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{n-1} Q$$

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Le rapport signal sur bruit maximum que l'on peut avoir après quantification vaut alors :

$$SNR_{max} = \frac{X_{eff}}{Q_{eff}} = \frac{2^{n-1}Q/\sqrt{2}}{Q/\sqrt{12}} = \sqrt{6} 2^{n-1}$$

Exprimé en dB, ce rapport devient :

$$\begin{aligned} SNR_{max,dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(6) \\ &\simeq 6(n-1) + 7.8 \text{ dB} \end{aligned}$$

d'où

$$SNR_{max,dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} \quad \text{si } A = U_{max} \quad (8.17)$$

Il est important de se rappeler que ce résultat n'est valable que pour une sinusoïde dont l'amplitude couvre toute la plage du convertisseur A-N et qu'il représente le SNR maximum possible pour un convertisseur donné.

Ainsi, pour un convertisseur 8 bits, le rapport signal sur bruit maximum vaut environ 50 dB. Ceci est suffisant pour la plupart des applications industrielles, mais pas du tout en haute-fidélité où l'on désire un rapport d'au moins 96 dB. Dans ce cas, 16 bits sont nécessaires avec un convertisseur d'excellente linéarité.

Dans le cas plus général où l'amplitude A du signal sinusoïdal est inférieure à U_{max} , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (8.18)$$

Signal triangulaire “pleine échelle”

Dans le cas particulier où le signal analogique est un triangle d'amplitude égale à la tension maximum U_{max} du convertisseur A-N, on montre aisément (voir exercices) que le rapport signal sur bruit obtenu après quantification vaut au maximum :

$$SNR_{max,dB} = 6n \quad \text{si } A = U_{max} \quad (8.19)$$

Dans le cas plus général où l'amplitude A du signal triangulaire est inférieure à U_{max} , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (8.20)$$

Signal à distribution gaussienne

Dans le cas où l'on peut admettre que la distribution statistique d'un signal quelconque est gaussienne, on montre que le risque de dépassement du domaine de conversion est inférieur à

$$\begin{aligned} 5\% &\text{ si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{2} \\ 0.3\% &\text{ si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{3} \end{aligned}$$

En considérant ce dernier cas (satisfaisant d'un point de vue pratique), on a :

$$SNR_{max,dB} = 6n + 4.8 dB - 20 \log 3 = 6n - 4.7 dB \quad \text{si } X_{eff} = \frac{U_{max}}{3}$$

Dans ce cas, plus général que celui du signal sinusoïdal, on voit que le rapport signal sur bruit ne dépassera pas 43 dB pour un convertisseur 8 bits. Une illustration de la quantification de trois signaux types est donnée dans la figure 8.22.

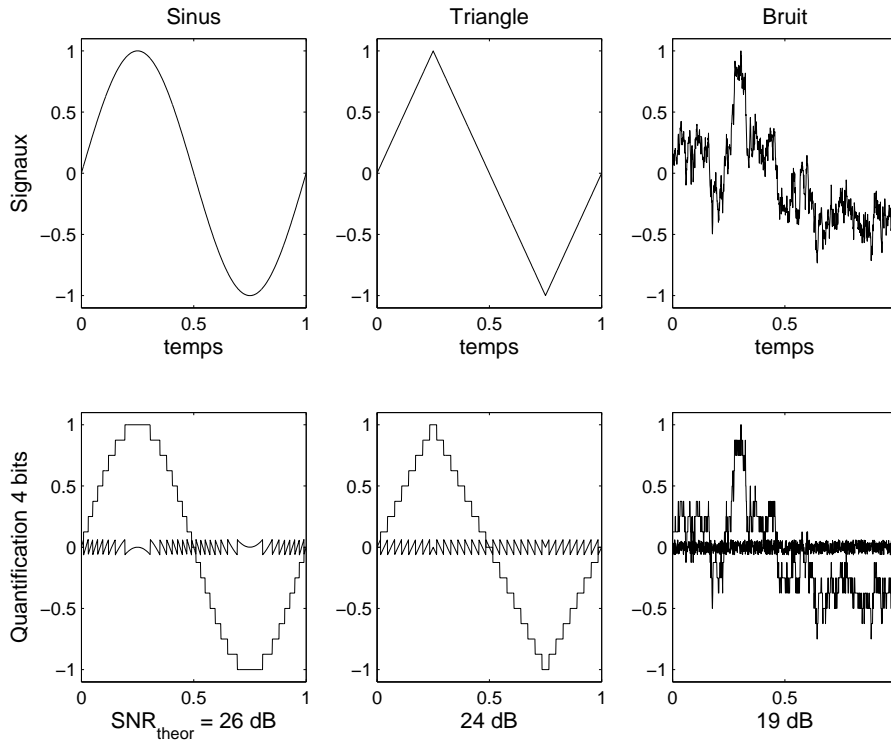


FIGURE 8.22.: Quantification avec 4 bits de trois signaux types

8.6.5. Non linéarité du convertisseur

Jusqu'à présent, on a considéré des convertisseurs A-N parfaits, exempts de toute erreur de linéarité; cela signifie que la relation sortie-entrée est décrite par une droite et que les pas de quantification se répartissent régulièrement le long de cette droite. Or dans la réalité, la relation sortie-entrée n'est jamais exactement linéaire. Une illustration en est donnée à la figure 8.23.

En général, la valeur absolue de la différence entre la courbe réelle et la droite idéale ne dépasse pas un demi LSB. Dans ce cas, l'erreur de non linéarité est au maximum équivalente à la perte d'un bit de poids faible. On admet alors, de manière conservative, que le nombre de bits effectif est diminué de 1

$$n_{eff} = n - 1$$

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Ce qui conduit aux résultats globaux suivants

$$R_{NL} = \frac{1}{2^{n_{eff}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad Q_{NL} = \frac{U_{max}}{2^{n_{eff}-1}} = \frac{U_{max}}{2^{n-2}} \quad (8.21)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit calculé jusqu'ici est réduit d'un facteur 2 ou de 6 dB. Le rapport signal sur bruit est alors corrigé de la manière suivante :

$$SNR_{NL, dB} \simeq SNR_{dB} - 6 \text{ dB} \quad (8.22)$$

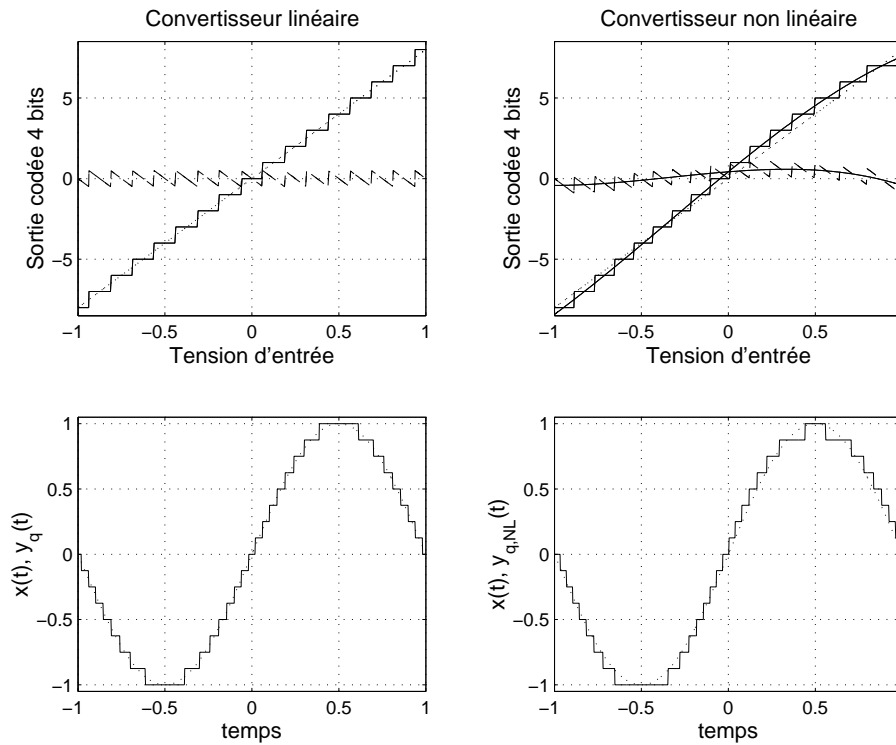


FIGURE 8.23.: Effet d'une non-linéarité

Signaux	SNR_{max} [dB]	SNR_{max} avec NL [dB]
sinus	$6n + 1.8$	$6n - 4$
triangle	$6n$	$6n - 6$
bruit gaussien	$6n - 4.7$	$6n - 11$

TABLE 8.1.: Limite des convertisseurs A–N

8.6.6. Conclusion

Les situations que l'on vient d'analyser peuvent se résumer dans le tableau 8.1. De celui-ci, on notera que de manière générale, une conversion A–N réelle peut difficilement fournir un rapport signal sur bruit supérieur à $6(n - 1) \text{ dB}$ même si

8.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

la plage du convertisseur est utilisée dans sa totalité. On retiendra donc la relation suivante

$$SNR < 6n - 6 \text{ [dB]} \quad (8.23)$$

comme représentative de ce que l'on peut obtenir au mieux dans des situations réelles.

Quelques de valeurs de SNR

Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux introduit des erreurs dont on peut estimer la valeur. Celles-ci ne seront acceptables que si elles ne dépassent pas des limites psycho-physiologiques généralement connues.

En téléphonie par exemple, il est important et suffisant que les locuteurs puissent se reconnaître au son de leurs voix. Comme les fréquences fondamentales présentes dans les voix humaines dépassent rarement 1 kHz, on admet qu'une bande passante de 4 kHz est suffisante pour laisser passer les harmoniques nécessaires. Cette bande passante permet de fixer la fréquence d'échantillonnage utilisée en téléphonie numérique à 8 kHz. De plus, de manière à ce que la voix numérisée ne soit pas trop "granulaire", une dynamique de 50 dB est demandée : des convertisseurs 8 bits sont généralement acceptés.

Applications	Dynamique	Nombre de bits
Téléphonie	50 dB	8
Mesures industrielles	70 dB	12
Audio numérique	96 dB	16
Multimètre numérique	> 100 dB	18

TABLE 8.2.: Quelques valeurs SNR typiques

En audio de haute qualité, les limites que l'on souhaite atteindre sont fixées par les capacités de l'oreille humaine ; la dynamique et la bande passante demandées sont donc bien plus élevées qu'en téléphonie. Ainsi, pour reproduire la qualité sonore d'une salle de concert, on exige une bande passante de 20 kHz et une dynamique de plus de 80 dB car cela correspond au rapport entre le volume sonore d'un grand orchestre et le bruit de fond d'une salle silencieuse.

8.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

Nous venons de voir que, lors d'une conversion A-N, deux effets négatifs apparaissent :

1. le recouvrement spectral causé par l'impossibilité d'avoir un filtre idéal ;
2. la limitation du rapport signal sur bruit due à la résolution du convertisseur.

Généralement le nombre de bits et la bande passante nécessaires sont fixés par l'application ; il reste donc à trouver la fréquence d'échantillonnage f_e et l'ordre n du filtre antirecouvrement. Le critère le plus fréquemment admis pour trouver ces deux valeurs est le suivant :

L'effet du recouvrement doit être inférieur à la résolution liée à la quantification et à la non linéarité du convertisseur CAN.

Admettant que l'on utilise un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre m et de fréquence de coupure f_c , on aura, à l'extrémité de la bande passante ($f = f_c$), une atténuation du recouvrement spectral valant (voir section 8.5.1)

$$H(f - f_e)|_{f=f_c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}}}$$

On a vu que la résolution d'un convertisseur A-N à n bits possédant une non-linéarité de $\pm\frac{1}{2}$ LSB vaut pratiquement

$$R \simeq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Admettant qu'à la fréquence de coupure le recouvrement spectral doit être inférieur à la résolution du convertisseur, il vient

$$\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}} > 2^{n-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^m &> 2^{n-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$f_e > f_c \cdot \left(1 + (2^{n-1})^{1/m}\right) \quad (8.24)$$

Le tableau 8.3 donne le rapport f_e/f_c pour différents filtres de Butterworth et convertisseurs A-N entachés d'une non linéarité de $\pm\frac{1}{2}$ LSB. On notera que si l'on souhaite utiliser un filtre d'ordre 2 seulement avec un convertisseur 8 bits, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage 13 fois supérieure à la fréquence de coupure. Alors que, si l'on adopte un filtre d'ordre 8, une fréquence d'échantillonnage 3 à 5 fois supérieure à la fréquence de coupure suffit suivant le nombre de bits du CAN.

C'est pourquoi, admettant que l'échantillonneur est précédé d'un filtre antirecouvrement d'ordre 8, on propose généralement une fréquence d'échantillonnage telle que

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_c \quad (8.25)$$

Ordre m du filtre	Nombre de bits n du CAN				
	8	10	12	14	16
2	13	24	47	92	182
4	4.4	5.8	7.7	10.6	14.5
5	3.7	4.5	5.6	7.1	9.0
6	3.3	3.9	4.6	5.5	6.7
7	3.0	3.5	4.0	4.7	5.5
8	2.9	3.2	3.6	4.1	4.7

TABLE 8.3.: Rapport f_e/f_c en fonction de l'ordre du filtre (Butterworth) et du convertisseur analogique numérique (n bits $\pm \frac{1}{2}$ LSB)

8.8. Reconstruction du signal

8.8.1. Convertisseur N–A

Le convertisseur N–A convertit un signal numérique en un signal analogique. Son but est de fournir un signal continu entre chaque échantillon. Cette opération consiste à réaliser une interpolation continue entre les valeurs numériques fournies par le processeur à chaque période d'échantillonnage. On peut imaginer différents interpolateurs allant du simple au compliqué :

- l'interpolateur d'ordre 0 qui maintient constante la valeur numérique fournie ;
 - l'interpolateur d'ordre 1 qui relie linéairement deux valeurs numériques successives ;
 - l'interpolateur d'ordre 2 qui relie paraboliquement trois valeurs numériques successives ;
 - l'interpolateur idéal qui remplace chaque valeur numérique par un sinus cardinal.
- L'interpolateur le plus simple est celui d'ordre zéro et c'est également celui qui est réalisé par un convertisseur numérique-analogique classique. Il est souvent désigné sous le nom de bloqueur d'ordre zéro.

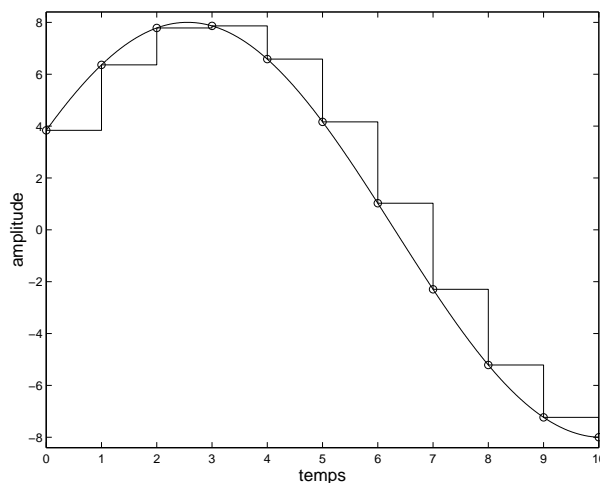


FIGURE 8.24.: Interpolation d'ordre zéro réalisée par un convertisseur N–A

8.8.2. Interpolateur idéal

Dans l'énoncé du théorème d'échantillonnage, Shannon a également donné son corollaire qui précise qu'un signal $x(t)$ peut être reconstruit à partir des valeurs échantillonnées en utilisant la fonction d'interpolation suivante :

$$g(t) = \frac{\sin(\pi f_e t)}{(\pi f_e t)} \quad (8.26)$$

Cela signifie que le signal peut être reconstruit avec une somme de sinus cardinaux temporels centrés sur les instants d'échantillonnage $t = nT_e$ et d'amplitudes égales aux valeurs échantillonnées $x[n]$:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin(\pi f_e (t - nT_e))}{(\pi f_e (t - nT_e))} \quad (8.27)$$

Une illustration de cette interpolation est donnée à la figure 8.25. On notera que cette interpolation idéale n'est pratiquement réalisable qu'en temps différé et de manière approchée seulement.

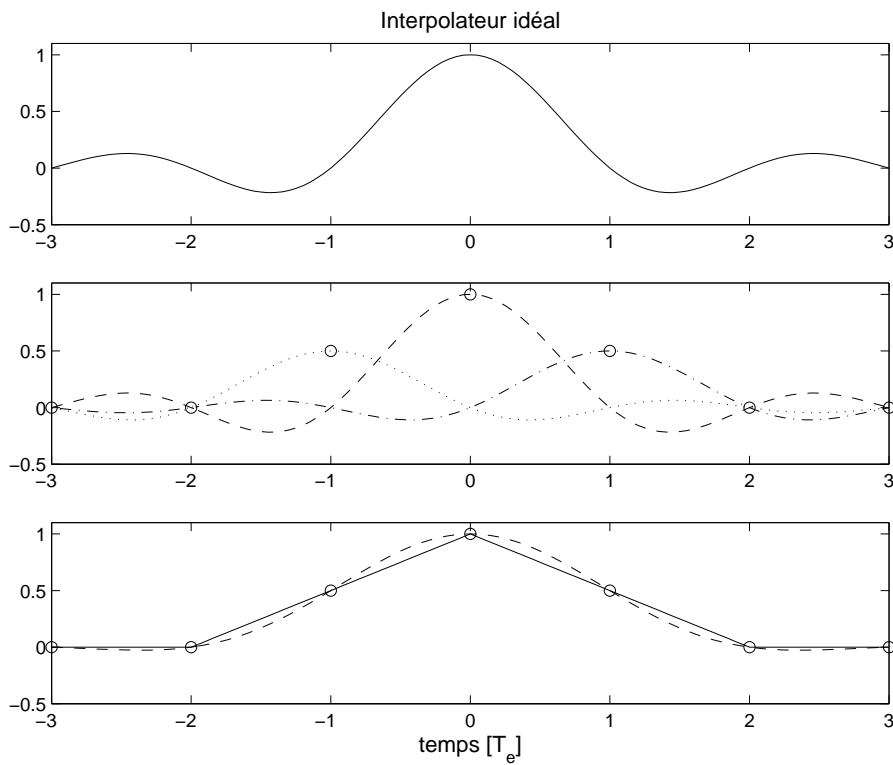


FIGURE 8.25.: Reconstruction d'un signal triangulaire à l'aide d'un interpolateur idéal

Une comparaison entre les résultats fournis par l'interpolateur d'ordre zéro et l'interpolateur idéal peut être faite en observant les reconstructions illustrées à la figure 8.26. Comme le signal original possède une discontinuité, cela conduit à un effet de Gibbs assez prononcé. Dans le cas d'un signal sans discontinuité échantillonné assez rapidement, la reconstruction est presque parfaite.

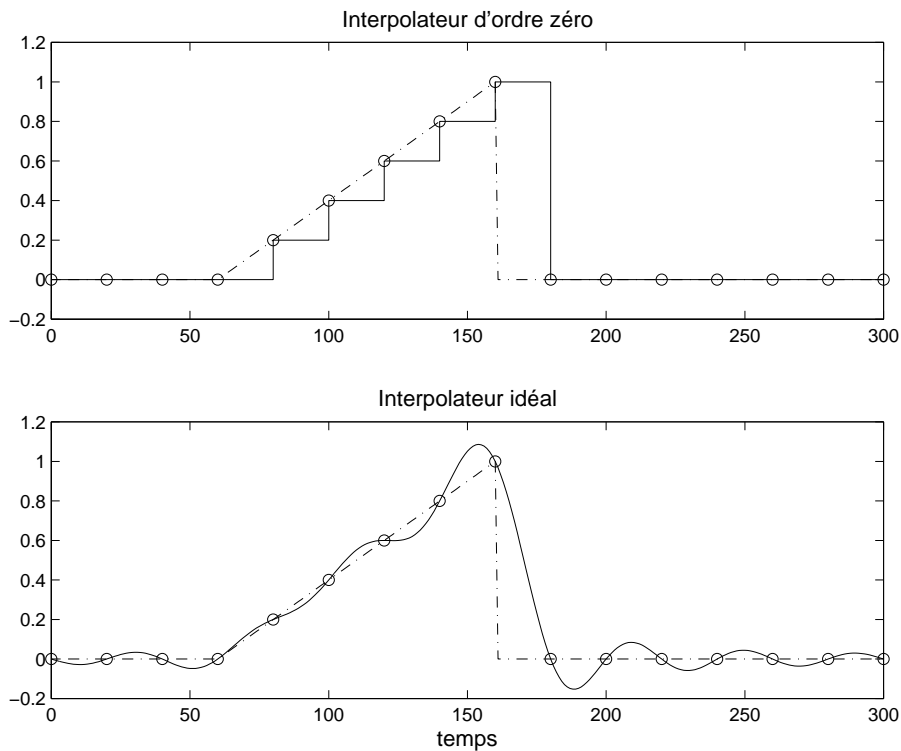


FIGURE 8.26.: Échantillonnage et reconstruction d'une rampe

8.8.3. Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un CNA

Le bloqueur d'ordre zéro fournit un signal analogique en escalier dont chaque niveau est égal à la valeur du signal numérique. Fondamentalement, cela signifie que le signal $x[n]$ est remplacé par une suite d'impulsions rectangulaires d'amplitude variable.

À cette opération de maintien de la valeur $x[n]$ correspond un opérateur linéaire dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est une impulsion d'amplitude 1 et de durée T_e (figure 8.27) :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.28)$$

La réponse en fréquence d'un tel opérateur est la transformée de Fourier $H(jf)$ de sa réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$H(jf) = T_e \frac{\sin(\pi f T_e)}{(\pi f T_e)} \exp(-j\pi f T_e) \quad (8.29)$$

Sa représentation bien connue est rappelée à la figure 8.28. Pour comparaison, on y a superposé en traitillé la réponse fréquentielle d'un interpolateur idéal. On notera que le CNA agit comme un filtre passe-bas entre 0 et $f_e/2$ et qu'il sera bon d'en tenir compte lors de la reconstruction du signal analogique.

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

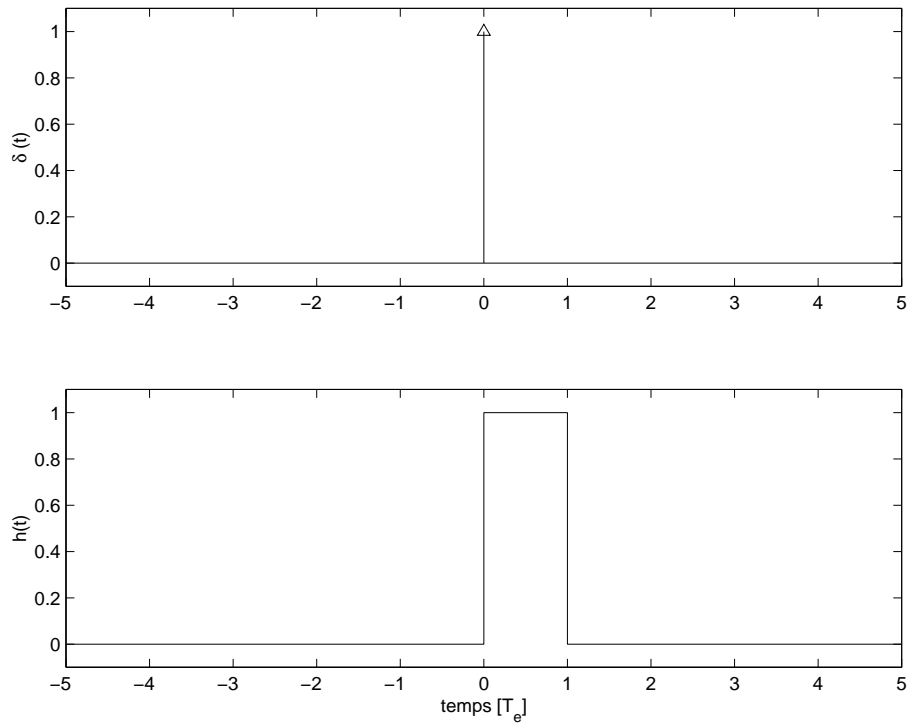


FIGURE 8.27.: Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro

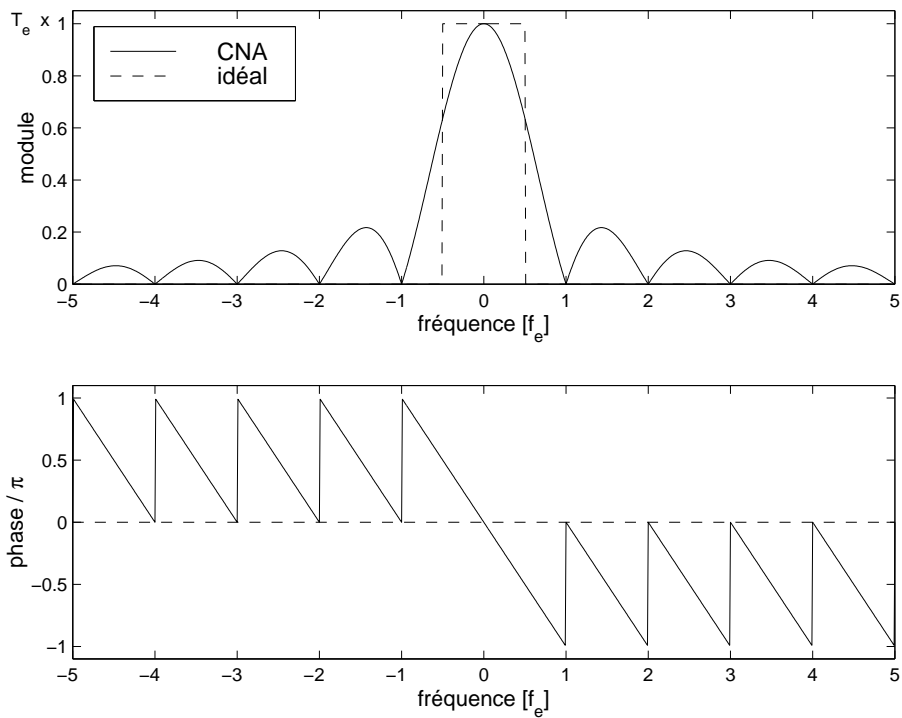


FIGURE 8.28.: Réponse fréquentielle d'un interpolateur d'ordre zéro

8.8.4. Filtre de reconstruction ou de lissage

On peut se rapprocher d'un signal analogique plus habituel en éliminant les escaliers du signal $x_s(t)$ créé par le CNA. Pour cela, on fait suivre le convertisseur d'un filtre passe-bas, dit de reconstruction ou de lissage. La bande passante de celui-ci doit être suffisante pour laisser passer l'information contenue dans la bande de base du signal numérique. Comme celui-ci s'étend de 0 à $f_e/2$, les filtres antirecouvrement et de reconstruction sont généralement les mêmes.

8.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N – N-A

Une illustration des différents points étudiés dans ce chapitre est donnée dans les figures qui suivent. On y décrit à l'aide de graphiques les effets du filtre antirecouvrement (FAR), de l'interpolateur d'ordre zéro (CNA) et celui du filtre de lissage (FL). Les signaux rencontrés correspondent à ceux du schéma fonctionnel suivant :

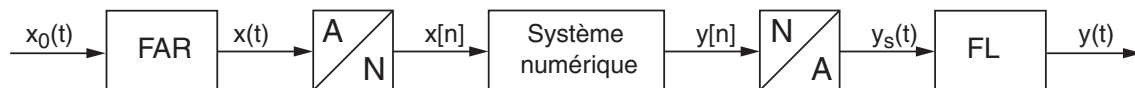


FIGURE 8.29.: Chaîne de traitement des signaux

8.9.1. Échantillonnage sans filtre antirecouvrement

La figure 8.30 montre le signal $x_0(t)$ échantillonné sans filtrage préalable et son spectre. On y voit en particulier combien le spectre d'amplitude $X_e(f)$ résultant s'éloigne du spectre original $X_0(f)$.

8.9.2. Échantillonnage avec filtre antirecouvrement

La figure 8.31 montre le signal $x(t)$ échantillonné avec un filtre antirecouvrement et son spectre. On y voit en particulier que le spectre d'amplitude $X_e(f)$ résultant est très proche, entre 0 et f_c , du spectre original $X_0(f)$.

8.9.3. Effet du convertisseur N–A

La figure 8.32 montre le signal échantillonné et son spectre ainsi que celui du bloqueur d'ordre 0 qui n'est autre que le premier lobe de la fonction sinus cardinal. Il est bien clair que ce spectre, qui est aussi la réponse fréquentielle du bloqueur, va modifier le spectre du signal $y[n]$ appliqué au CNA.

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

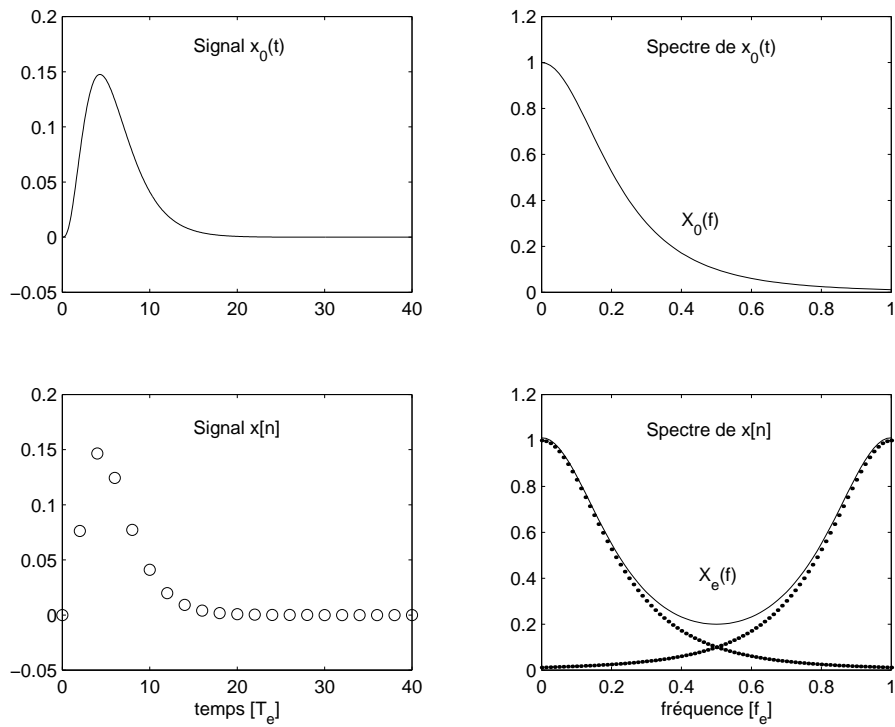


FIGURE 8.30.: Échantillonnage **sans** filtre antirecouvrement

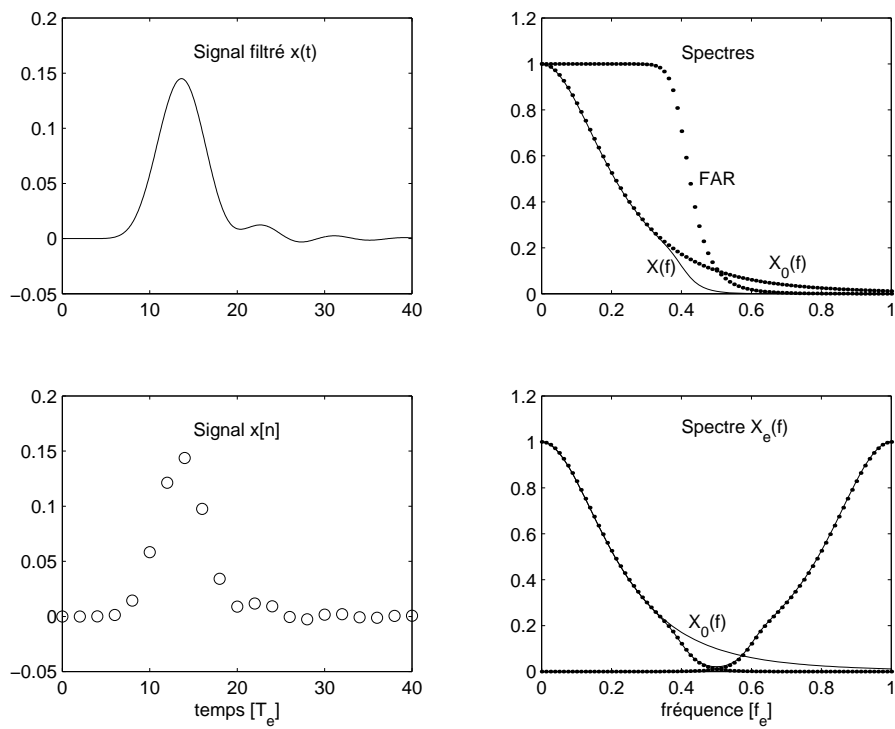


FIGURE 8.31.: Échantillonnage **avec** filtre antirecouvrement

8.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N - N-A

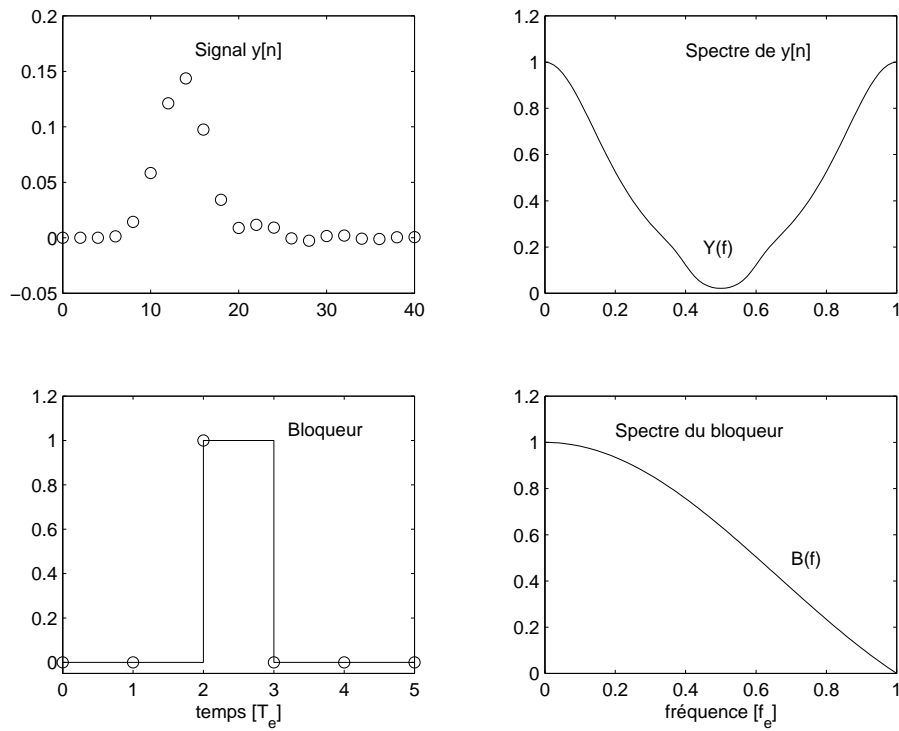


FIGURE 8.32.: Signal numérique et bloqueur d'ordre 0

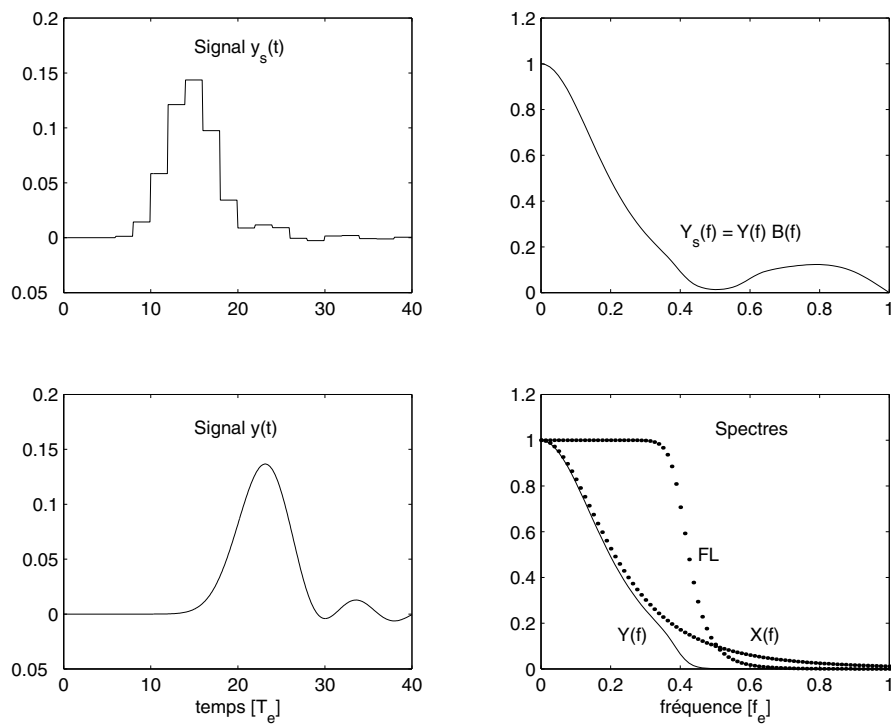


FIGURE 8.33.: Reconstruction sans et avec filtre de lissage

8.9.4. Reconstruction du signal analogique

La figure 8.33 montre le signal en escalier et son spectre $Y_s(f) = Y(f) \cdot B(f)$ qui provient du produit entre le spectre de $y[n]$ et la réponse fréquentielle du bloqueur.

Afin d'éliminer les escaliers de $y_s(t)$, on fait suivre le CNA d'un filtre passe-bas identique au filtre antirecouvrement puisque les fréquences supérieures à $f_e/2$ ne contiennent aucune information intéressante.

8.9.5. Correcteur d'amplitude

Il est fréquent de compléter ce filtre passe-bas par un correcteur d'amplitude accentuant les fréquences élevées. Ce correcteur, de réponse fréquentielle $1/B(f)$ pour f compris entre 0 et $f_e/2$, est construit de manière à compenser le comportement passe-bas du bloqueur. On obtient alors une réponse fréquentielle $Y(f) \simeq X(f)$ proche de celle du signal original.

8.10. Exercices

Ech 1 : Considérant un signal dont le spectre est représenté à la figure 8.34, déterminez la fréquence d'échantillonnage minimum pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral.

Admettant $f_e = 16 [kHz]$,

1. dessinez le spectre du signal échantillonné pour f compris entre $\pm 16kHz$;
2. que faut-il faire pour éviter le recouvrement spectral ?
3. dessinez le nouveau spectre ; quel en est l'avantage ?

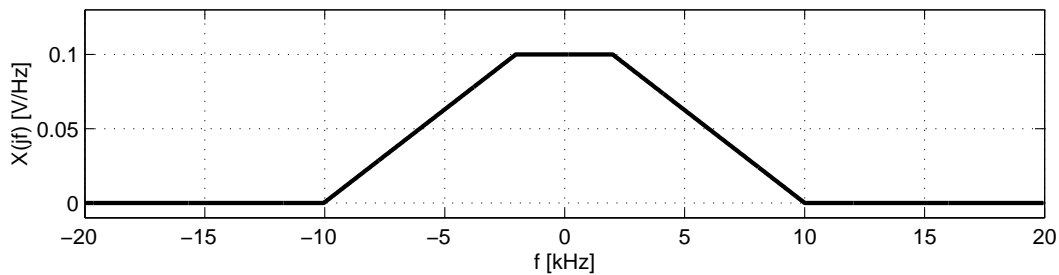


FIGURE 8.34.: Exercice 1

Ech 2 : On considère un signal $x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 t)$:

1. que valent sa période T_0 et sa fréquence f_0 ?
2. esquissez $x_a(t)$ sur 3 périodes au moins et dessinez son spectre $X_a(jf)$;
3. marquez les points d'échantillonnage de $x_a(t)$ lorsque $T_e = T_0/4$; esquissez le spectre $X_e(jf)$; analysez $x[n]$ et $X_e(jf)$;
4. faites de même lorsque $T_e = 3T_0/4$; quelle sinusoïde passe parmi ces points ? concluez ;
5. dans le cas où $T_e = T_0/2$, il se passe quelque chose de particulier ; analysez et commentez.

Ech 3 : On considère une SIR d'amplitude $A = 10 [V]$, de période $T_0 = 1 [msec]$ et de largeur $\Delta t = T_0/4$ que l'on échantillonne avec $T_e = T_0/20$;

1. esquissez $x(t)$ et $x_e(t)$;
2. esquissez $X(jf)$ et $X_e(jf)$;
3. que valent $X(jf)$ et $X_e(jf)$ pour $f = 3 [kHz]$?
 Rép. : $X_e(+j3) = X(+j3) + X(-j17) + X(+j23) + \dots$

8. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Ech 4 : Soit un signal en dents de scie d'amplitude comprise entre $\pm A = \pm 5 [V]$, de période $T_0 = 1 [msec]$ que l'on échantillonne avec la fréquence $f_e = 8 [kHz]$;

1. esquissez $x(t)$ et $x_e(t)$;
2. sachant que $X(jk) = (-1)^{k+1} A/(jk\pi)$, $k \neq 0$, esquissez $X(jf)$ et $X_e(jf)$;
3. que valent $X(jf)$ et $X_e(jf)$ pour $f = 1 [kHz]$?

Ech 5 : Considérant le signal analogique

$$x_a(t) = 2 \cos(100\pi t) + 5 \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos(380\pi t) + 16 \sin\left(600\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. quelle valeur minimum faut-il choisir pour f_e si l'on veut respecter le théorème d'échantillonnage?
2. soit $f_e = 3 f_{e,min}$, esquissez les spectres d'amplitudes et de phases du signal $x_e(t)$.

Ech 6 : Un signal analogique

$$x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 240 t) + 3 \cos\left(2\pi \cdot 540 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

est échantillonné à raison de 600 échantillons par seconde.

1. que vaut la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2$?
2. si elles existent, que valent les fréquences apparentes f_{app} ?
3. si $x(n)$ est restitué à l'aide d'un convertisseur NA suivi d'un filtre passe-bas idéal tel que $f_c = f_e/2$, que vaut le signal reconstruit $y_a(t)$?

Ech 7 : Considérant un signal carré à valeur moyenne nulle de période $T_0 = 1 [ms]$ et d'amplitude $A = 1 [V]$ que l'on échantillonne à la fréquence $f_e = 9.8 [kHz]$, on demande :

1. Quelles sont les fréquences et amplitudes des raies spectrales du signal analogique? Esquissez le spectre d'amplitudes.
2. Quelle est la largeur de la bande de base? Quelles sont les composantes spectrales réelles présentes dans la bande de base?
3. Quelles sont les fréquences apparentes présentes dans la bande de base?
4. Quelles sont les amplitudes de chacune de ces raies?
5. Les résultats de l'analyse spectrale sont donnés dans la figure 8.35; associez les numéros des composantes spectrales théoriques aux raies spectrales obtenues après échantillonnage.

Ech 8 : Considérant une exponentielle décroissante $x(t) = e^{-at} \varepsilon(t)$ que l'on échantillonne avec une fréquence f_e , montrez que le spectre du signal échantillonné vaut :

$$X_e(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi k f_e)^2}$$

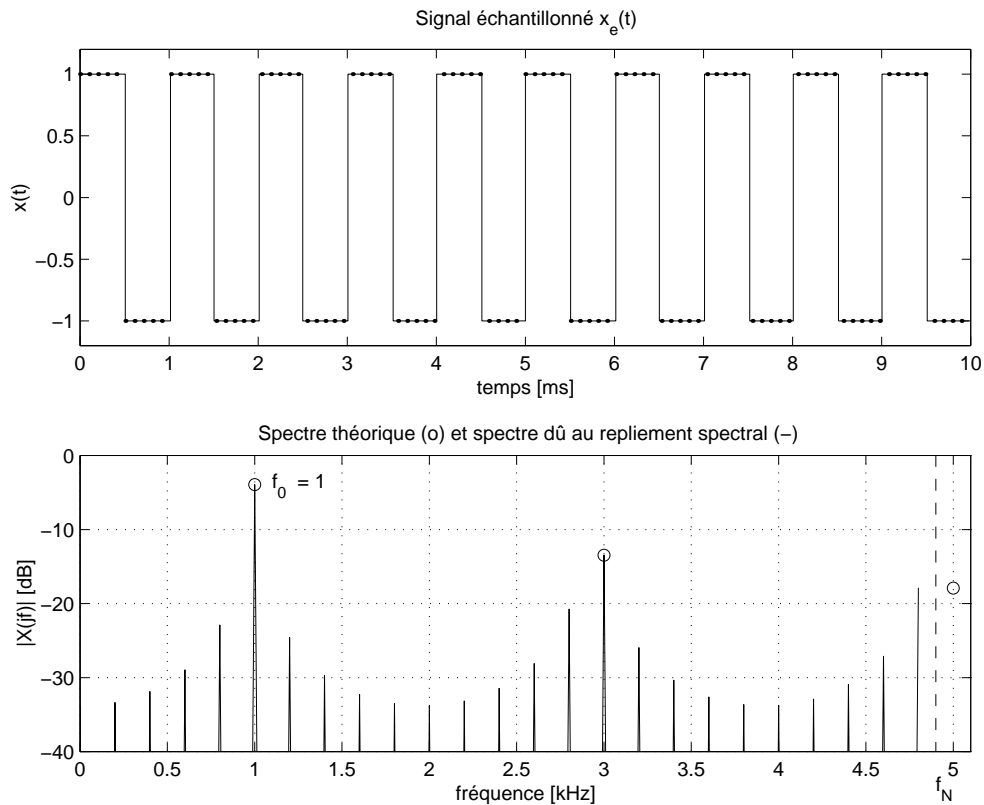


FIGURE 8.35.: Échantillonnage et repliement spectral pour un signal carré

AnNa 1 : Considérant qu'un signal est échantillonné à 40kHz et numérisé avec 16 bits, quelle est la durée d'enregistrement que l'on peut stocker dans 1 Moct ?

AnNa 2 : Un filtre numérique est constitué des éléments suivants :

- un convertisseur AN à 12 bits avec un temps de conversion de $5\mu\text{s}$,
- un processeur DSP de 16 bits avec un cycle d'horloge de 50ns,
- un convertisseur NA à 12 bits avec un temps d'établissement de $0.5\mu\text{s}$.

Calculez la bande passante maximum que peut traiter ce filtre sachant que pour chaque valeur échantillonnée le DSP calcule le signal de sortie avec l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{19} h(m) x(n - m)$$

en effectuant une multiplication et une addition en un seul cycle d'horloge.

AnNa 3 : Un signal sinusoïdal d'amplitude 6 V est numérisé à l'aide d'un convertisseur 16 bits. Sachant que celui-ci travaille entre ± 10 V et qu'il est entâché d'une non-linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB, calculez :

1. sa résolution et son pas de quantification ;
2. les valeurs efficaces du signal et du bruit de quantification ;
3. le rapport signal sur bruit du signal numérisé.

AnNa 4 : On échantillonne un signal sinusoïdal d'amplitude 5 V avec un CAN 16 bits / ± 10 V entâché d'une de non-linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB. Est-il possible de garantir un SNR d'au moins 90 dB ?

AnNa 5 : On échantillonne un signal analogique

$$x(t) = 4 \cos(2\pi \cdot 300 t) - 2 \cos(2\pi \cdot 900 t) [V]$$

avec un convertisseur AN 16 bits travaillant entre ± 5 V qui possède une non linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB. Les valeurs numériques du CAN sont transmises à travers une ligne dont le débit est de 10^4 oct/sec. On demande :

1. y a-t-il repliement spectral ?
2. que valent la résolution et le pas de quantification du convertisseur ?
3. que vaut la puissance du signal $x(t)$? quelle est sa valeur efficace ?
4. que vaut le rapport signal sur bruit de conversion AN ?

AnNa 6 : On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure 4 kHz comme filtre antirepliement. Considérant que le signal échantillonné est perturbé par une composante spectrale d'amplitude $A = 5$ V et de fréquence $f_0 = 8$ kHz, on demande :

1. quelle fréquence d'échantillonnage faut-il choisir pour que le repliement de la perturbation se fasse en $f \geq f_c$?
2. quelle sera l'amplitude A_r du signal replié en $f = f_c$?

AnNa 7 : On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 comme filtre antirepliement en amont d'un convertisseur AN 12 bits avec $\pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité. Sa fréquence de coupure f_c est fixée à 8 kHz.

1. quelle est la résolution du convertisseur comprenant la quantification et la non-linéarité ;
2. esquissez la réponse fréquentielle du filtre et celle causée par le repliement spectral ;
3. calculez la fréquence d'échantillonnage nécessaire pour que l'affaiblissement du repliement spectral en $f = f_c$ soit inférieur à la résolution du convertisseur.

Rép. : $f_e = 13.7 f_c$

AnNa 8 : Un signal $x(t)$ sinusoïdal d'amplitude $A = 10$ [V] de fréquence $f = 1$ [kHz] est échantillonné très rapidement (à 1 [MHz], par exemple) à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique 4 bits travaillant entre ± 10 [V].

1. esquissez les signaux $x(t), x_e[n], x_q(t)$;
2. esquissez l'erreur de quantification $e(t)$;
3. quelle est la valeur efficace de ce bruit de quantification ?
4. que vaut le SNR ?

AnNa 9 : On remplace le signal sinusoïdal de l'exercice précédent par un signal triangulaire de mêmes amplitude et fréquence. Qu'est ce qui change ?

9. Description des signaux et systèmes numériques

Ce chapitre décrit tout d'abord les signaux numériques au travers de quelques exemples fondamentaux. Il s'attarde ensuite sur la description des systèmes numériques et de leurs propriétés.

Puis, considérant les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI), on définit le produit de convolution avant d'analyser en détail sa réalisation et quelques applications telles que l'interpolation numérique.

On termine enfin par la description des modèles récurrents de quelques systèmes fondamentaux.

9.1. Signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notées $x[n]$ pour $-\infty < n < +\infty$. Dans le cas où la séquence provient de l'échantillonnage périodique d'un signal continu $x(t)$, on aura :

$$x[n] = x(nT_e)$$

Les signaux discrets sont souvent représentés graphiquement (figure 9.1). Bien que l'abscisse soit dessinée de manière continue, il est important de noter que la séquence $x[n]$ n'est définie que pour n entier. Pour n non entier, $x[n]$ est simplement non définie.

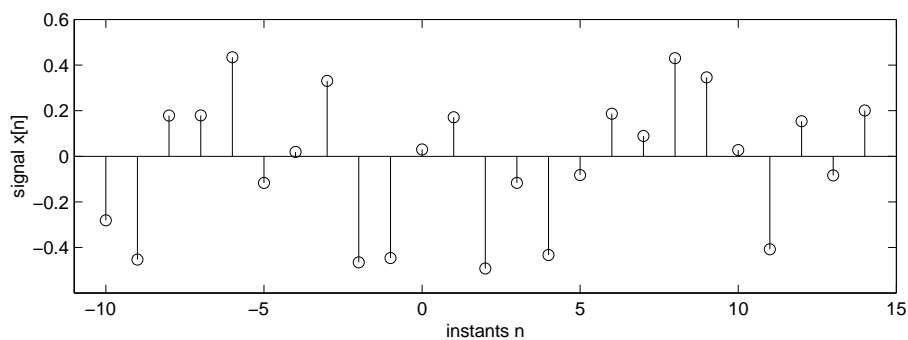


FIGURE 9.1.: Graphe d'un signal numérique

9.1.1. Quelques signaux fondamentaux

Parmi l'infinité de séquences que l'on peut imaginer, il y en a quelques unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et des systèmes. Ce sont :

1. L'*impulsion unité* définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence (telle que celle de la figure 9.1) peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées $\delta[n-k]$ et d'amplitude $x[k]$. La suite $x[n]$ peut donc être décrite par l'expression suivante :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \quad (9.2)$$

2. Le *saut unité* défini par :

$$\varepsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

De manière équivalente, on a :

$$\varepsilon[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad (9.4)$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux sauts unités :

$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] \quad (9.5)$$

3. L'*exponentielle numérique* décrite par :

$$x[n] = R^n \varepsilon[n] \quad (9.6)$$

Dans le cas où $0 < R < 1$, on obtient une exponentielle décroissante alors que pour $|R| > 1$, l'amplitude de la séquence ne cesse d'augmenter avec n .

4. La *sinusoïde* décrite par :

$$x[n] = \cos(n \Omega_0 + \varphi) \quad (9.7)$$

avec $\Omega_0 = 2\pi f_0 T_e$.

5. La *suite complexe* généralement décrite par une exponentielle numérique dont l'argument est complexe :

$$x[n] = (a + jb)^n \varepsilon[n]$$

En remplaçant l'argument $a + jb$ par sa représentation polaire

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \arctan \frac{b}{a} \equiv R \exp(j\Omega_0)$$

on obtient

$$x[n] = R^n \exp(jn\Omega_0) \varepsilon[n] \quad (9.8)$$

Grâce à la relation d'Euler, on voit que cette séquence est une oscillation à valeurs complexes dont l'amplitude varie exponentiellement avec le temps n . L'enveloppe sera croissante si $R > 1$ et décroissante si $R < 1$.

6. Le *phaseur* de pulsation Ω_0 :

$$x[n] = \exp(jn\Omega_0) \quad (9.9)$$

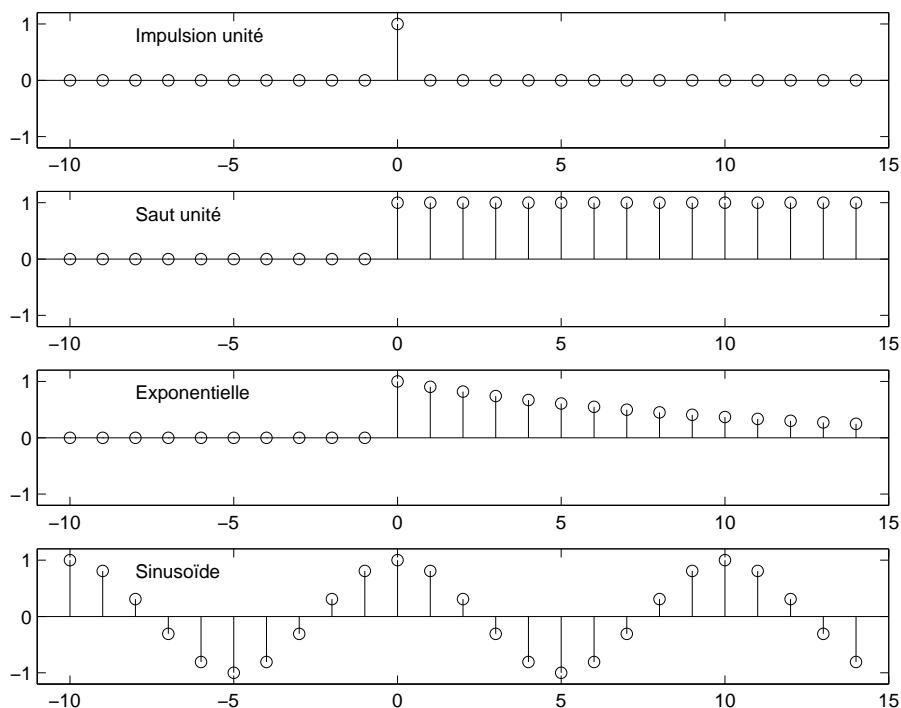


FIGURE 9.2.: Quelques signaux fondamentaux

Les séquences exponentielle, sinusoïdale et complexe décrites ci-dessus sont particulièrement importantes dans l'analyse des systèmes linéaires.

On notera que pour les signaux discrets, la pulsation normalisée Ω_0 se mesure en radians par échantillon et non pas en radians par seconde comme pour la pulsation ω_0 des signaux continus.

9.1.2. Périodicité des signaux numériques

Du point de vue de la périodicité, il existe une différence importante entre signaux continus et discrets. Dans le cas de ces derniers, la périodicité existe si :

$$x[n] = x[n + N]$$

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

où N est un entier représentant la période de la séquence. Ce qui, pour une sinusoïde discrète, s'écrit :

$$x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi) = A \cos(n\Omega_0 + N\Omega_0 + \varphi)$$

Comme la sinusoïde est périodique 2π , on doit avoir

$$N\Omega_0 = k2\pi \tag{9.10}$$

Or ceci n'est possible que si Ω_0/π est rationnel.

Considérons comme exemple le cas où $\Omega_0 = 1$. On a alors $N = 2\pi k$; ce qui n'est pas possible car N et k sont des entiers et que π est irrationnel. Par contre, si $\Omega_0 = 3\pi/11$, on a alors :

$$N\Omega_0 = N3\pi/11 = k2\pi \Rightarrow N = \frac{22}{3}k$$

et la plus petite valeur de N satisfaisant cette équation est 22 lorsque k vaut 3. Ces deux valeurs signifient qu'il faut 22 échantillons pour retrouver la valeur de départ (une période numérique) et que cette période numérique contient 3 périodes du signal analogique échantillonné.

On voit donc que les *séquences sinusoïdales n'ont pas nécessairement la même période que leur correspondant analogique* et, suivant la valeur de Ω_0 , elles peuvent même ne pas être périodiques du tout.

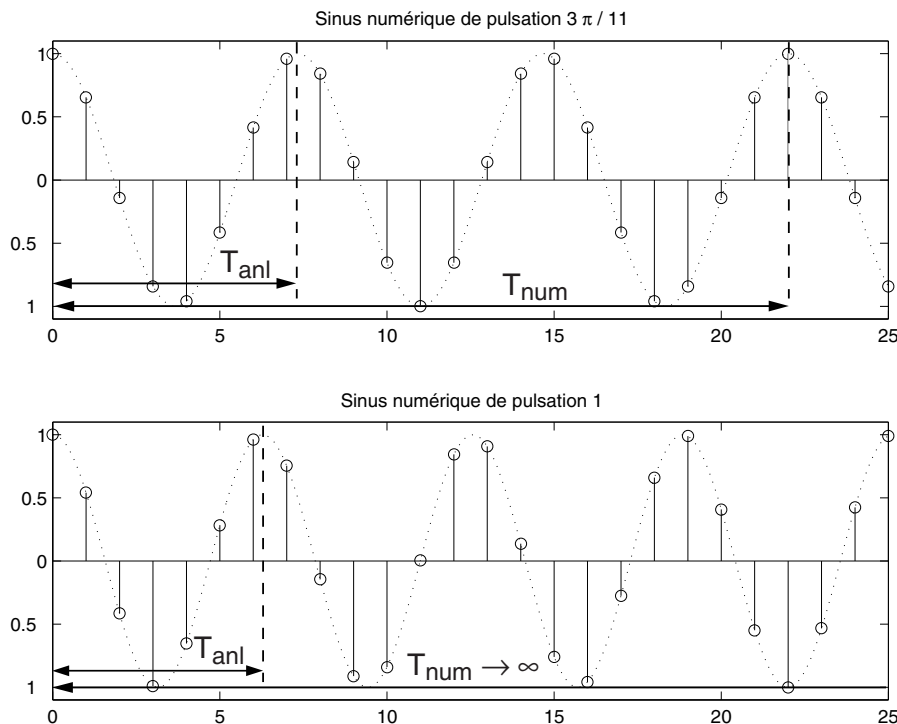


FIGURE 9.3.: Périodes numérique et analogique

On doit encore rappeler le fait que *l'interprétation des hautes et basses fréquences* est différente pour les signaux discrets ou continus. En effet, pour une sinusoïde analogique, l'oscillation sera d'autant plus rapide que la pulsation ω_0 est élevée. Dans le cas du signal discret $x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi)$, l'oscillation sera d'autant plus rapide que Ω_0 se rapproche de π et elle deviendra plus lente si Ω_0 varie de π à 2π . Cette deuxième partie correspond au phénomène de repliement spectral. En fait, à cause de la périodicité des spectres des signaux discrets, ce qui se passe autour de $\Omega = 2\pi$ est indistinguable de ce qui se passe autour de $\Omega = 0$.

9.2. Systèmes numériques

Un système numérique est une fonction ou un algorithme prédéfini qui opère sur un signal numérique (appelé l'entrée ou l'excitation) et qui produit un autre signal numérique nommé la sortie ou la réponse du système.

Un tel système est défini mathématiquement comme un opérateur ou une transformation qui modifie une séquence d'entrée $x[n]$ en une séquence de sortie $y[n]$. On peut représenter cette transformation par un opérateur T tel que $y[n] = T\{x[n]\}$ et en donner l'équation ou son schéma fonctionnel (section 9.2.2).

9.2.1. Exemples de système numériques

Quelques systèmes simples

Considérons des systèmes simples décrits par les équations du tableau 9.1.

A chacun de ces systèmes, on applique à l'instant $n = 0$ le signal :

$$x[n] = \{\uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

Les réponses de chacun des systèmes sont alors les suivantes :

1. L'équation (a) représente le système identité qui restitue simplement le signal qu'on lui applique :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

2. L'équation (b) représente un décalage arrière d'un pas :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, \dots\}$$

3. Dans le cas (c), le signal est avancé d'un pas :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

4. La sortie du système (d) fournit à chaque instant la valeur maximum du signal considéré aux instants présent (n), précédent ($n - 1$) et suivant ($n + 1$) :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 0, 0, 0, \dots\}$$

a	$y[n] = x[n]$
b	$y[n] = x[n - 1]$
c	$y[n] = x[n + 1]$
d	$y[n] = \max \{x[n - 1], x[n], x[n + 1]\}$
e	$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[k]$
f	$y[n] = x[n] - x[n - 1]$

TABLE 9.1.: Équations décrivant des systèmes numériques

5. Le système (e) représente un accumulateur qui fait la somme des valeurs qui apparaissent au cours du temps :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 3, 6, 10, 15, 15, 15, 15, 15 \dots\}$$

6. Le système (f) effectue la différence entre la valeur actuelle et la précédente ; ce qui, numériquement, correspond à la dérivation analogique :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 1, 1, 1, 1, -5, 0, 0 \dots\}$$

Moyenneur glissant

Un moyenneur glissant d'ordre 5 est défini par l'équation :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n - 2] + x[n - 1] + x[n] + x[n + 1] + x[n + 2]) \quad (9.11)$$

Ce système fournit à chaque instant n la valeur moyenne des 5 échantillons $x[n]$ entourant et correspondant à la position n . Un tel opérateur est fréquemment utilisé pour atténuer des fluctuations et mettre ainsi en évidence une tendance à moyen terme. Une illustration en est donnée par la figure 9.5 représentant l'enregistrement d'une température.

On notera que ce moyenneur centré sur l'instant n est un système non causal ; c'est-à-dire que pour pouvoir l'utiliser, il est nécessaire d'avoir préalablement à sa disposition les valeurs à traiter. Si l'on désirait effectuer ce traitement en temps réel

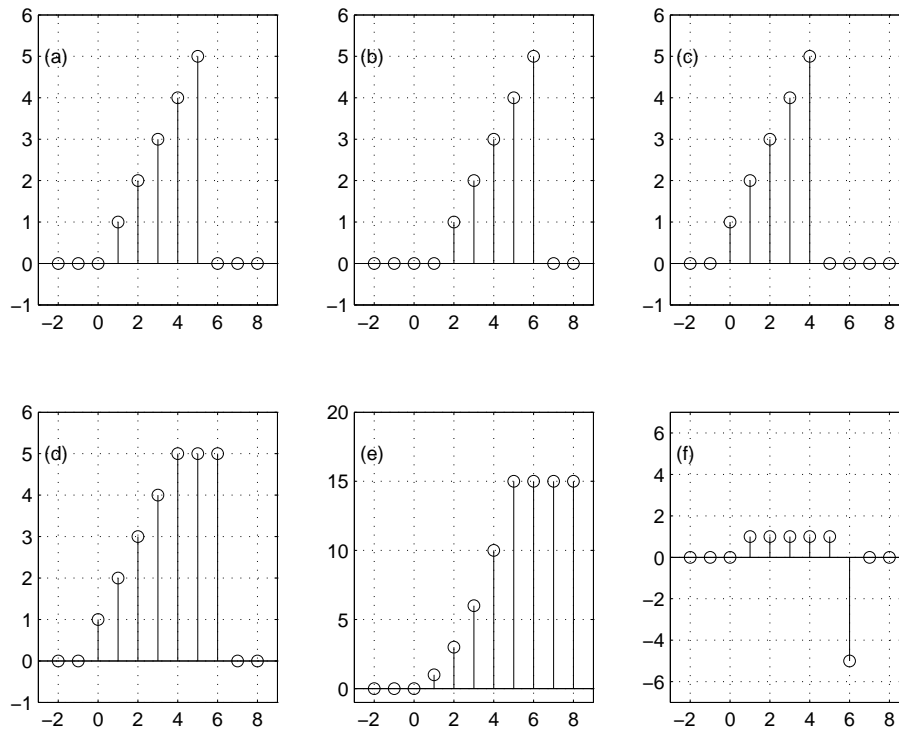


FIGURE 9.4.: Réponses des systèmes considérés

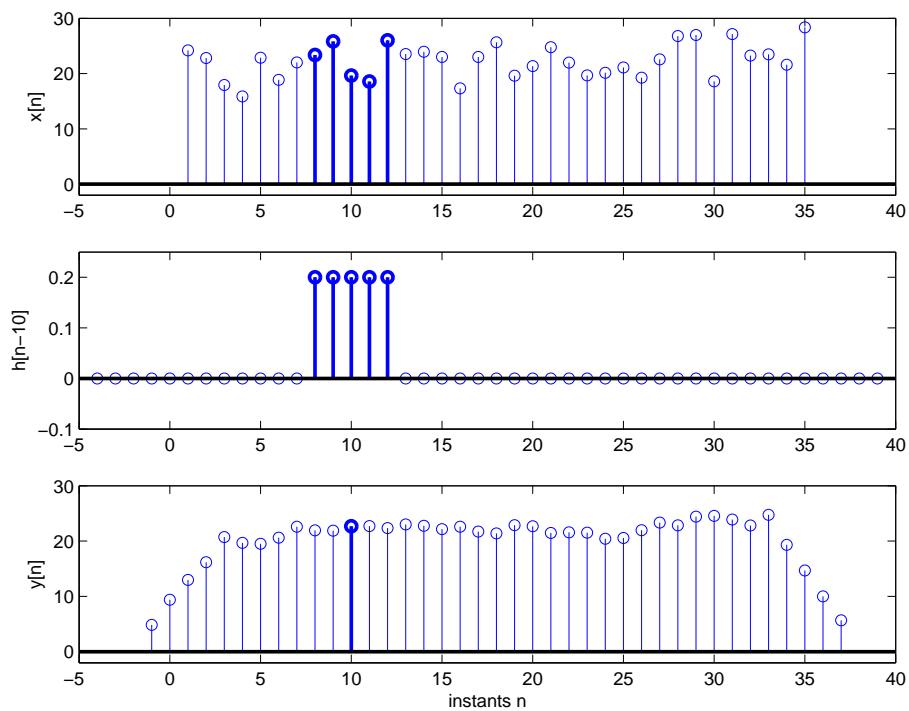


FIGURE 9.5.: Lissage de l'évolution d'une température

(système causal), on ne pourrait calculer la moyenne glissante que sur les 5 points les plus récents :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]) \quad (9.12)$$

9.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique

Un système numérique peut être décrit, comme on l'a vu, par la donnée d'une équation liant le signal de sortie au signal d'entrée. On peut également, et c'est fréquemment le cas, représenter ces systèmes à l'aide de diagrammes fonctionnels.

Ceux-ci illustrent alors graphiquement les opérations effectuées sur le signal d'entrée ainsi que les connexions les reliant. Les plus fréquentes sont l'addition de 2 valeurs (\oplus), la multiplication de 2 signaux entre eux (\otimes), la multiplication d'un signal par un coefficient (\rightarrow), le décalage avant (z) et le décalage arrière (z^{-1}).

Deux illustrations de schémas fonctionnels sont présentées dans la figure 9.6. Le premier des deux schémas correspond à l'équation non linéaire suivante :

$$y[n] = 0.5 (x_1[n] + x_1[n-1]) \cdot x_2[n] + 0.9 y[n-1]$$

dans laquelle on trouve un moyennneur causal d'ordre 2 (premier cadre) et un filtre passe-bas d'ordre 1 (deuxième cadre).

Le deuxième schéma fonctionnel illustre une équation aux différences linéaire d'ordre 2

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

représentant un filtre récursif d'ordre 2.

9.2.3. Propriétés des systèmes

Suivant leurs propriétés, on peut classer les systèmes de la façon suivante :

1. *Système statique*

Un système statique ou sans mémoire est un système dont la sortie $y[n]$ ne dépend que du signal d'entrée à l'instant n . Par exemple :

$$y[n] = a x[n] + n x[n]^2$$

2. *Système dynamique*

Inversement, un système tenant compte de ce qui s'est passé ou se passera est dit dynamique ou avec mémoire :

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

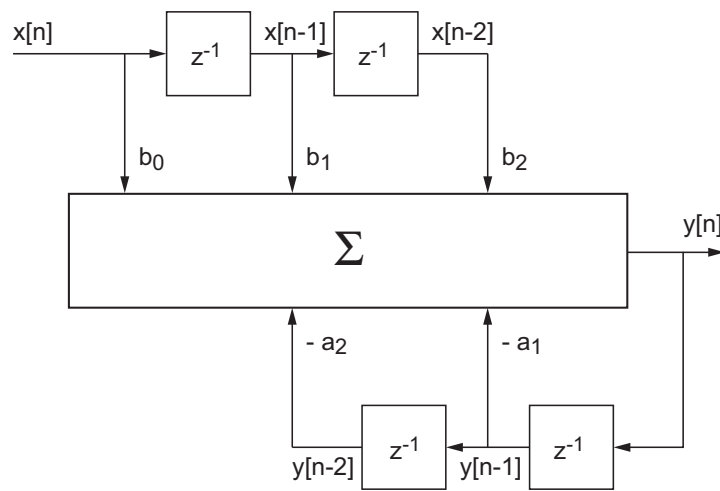
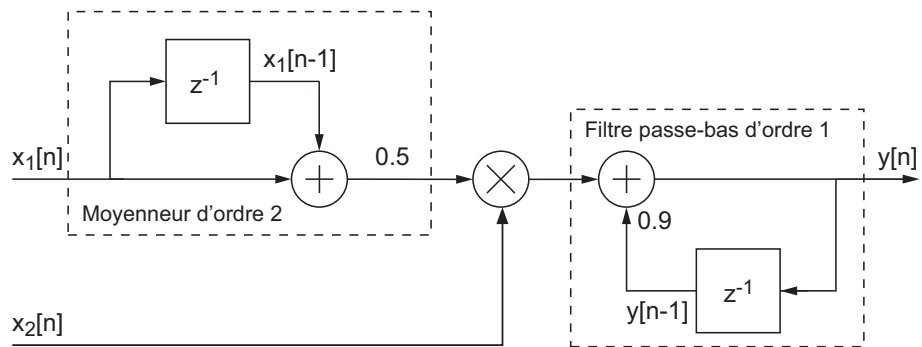


FIGURE 9.6.: Deux exemples de schémas fonctionnels

3. *Système linéaire*

Un système linéaire satisfait au principe de superposition :

$$\begin{aligned} y[n] &= T \{a x_1[n] + b x_2[n]\} \\ &= a T \{x_1[n]\} + b T \{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

4. *Système temporellement invariant*

Un système invariant dans le temps est un système pour lequel un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie simplement décalé de la même valeur :

$$\begin{aligned} \text{si } T \{x[n]\} &= y[n] \\ \text{alors } T \{x[n+d]\} &= y[n+d] \end{aligned}$$

De manière équivalente, un système est dit temporellement invariant lorsqu'on peut croiser les opérations de décalage et de transformation sans modifier le signal de sortie. On a alors :

$$y_{D,T}[n] = y_{T,D}[n]$$

On notera que tous les systèmes décrits par une équation aux différences à coefficients constants sont temporellement invariants.

5. *Système causal*

Un système est causal si la séquence de sortie ne dépend que des valeurs actuelles ou passées de la séquence d'entrée.

6. *Système stable*

Un système est stable si, quelle que soit la séquence d'amplitude finie appliquée à l'entrée, sa sortie ne devient pas infiniment grande.

On notera que les propriétés mentionnées ci-dessus sont des propriétés liées aux systèmes et sont indépendantes des séquences appliquées à ceux-ci.

Remarque Il est important de ne pas oublier que la grande liberté offerte lors de la réalisation des systèmes numériques peut parfois conduire à des pièges. Ainsi en est-il de la succession des opérations effectuées sur un signal. En effet, on a pris l'habitude avec les systèmes analogiques d'effectuer des opérations dans l'ordre qui nous convient sachant que le résultat est théoriquement indépendant de l'ordre des opérations de filtrage. Cela était possible parce que les systèmes analogiques réels sont pratiquement tous linéaires et temporellement invariants par nature.

Or, avec les systèmes numériques, les opérations que l'on peut souhaiter faire ne sont limitées que par notre imagination et certaines d'entre elles conduisent à des résultats qui dépendent de la succession des opérations effectuées. Il est donc très important de vérifier si les opérations avec lesquelles on agit sur un signal sont temporellement invariantes ou non.

Quelques exemples

L'accumulateur Un accumulateur défini par la relation :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (9.13)$$

correspond à l'opération analogique d'intégration. C'est un système linéaire. On notera que si on lui applique une impulsion unité $\delta[n]$, sa sortie sera un saut unité $\varepsilon[n]$. Si on lui applique un saut unité, sa sortie ne cessera d'augmenter linéairement avec n et tendra vers l'infini. L'accumulateur n'est donc pas un système stable.

Différences avant et arrière La différence entre 2 valeurs successives est l'équivalent de la dérivation analogique. On peut effectuer la différence avant définie par la relation :

$$y[n] = x[n+1] - x[n] \quad (9.14)$$

Elle n'est évidemment pas causale; ce qui est par contre le cas pour la différence arrière :

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (9.15)$$

Opérateur quadratique Afin d'illustrer ce qu'est un système invariant temporellement, considérons l'opérateur quadratique :

$$y[n] = x^2[n] \quad (9.16)$$

Si l'on effectue d'abord l'élévation au carré puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x^2[n] \rightarrow x^2[n-d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n-d] \rightarrow x^2[n-d] = y_{D,T}[n]$$

Comme les deux résultats sont identiques, le système est temporellement invariant.

Sous-échantillonnage Cette opération très fréquente en traitement numérique des signaux n'est pas invariante temporellement. Pour le voir, considérons une situation où l'on ne prend qu'un échantillon sur deux :

$$y[n] = x[2n] \quad (9.17)$$

Si l'on effectue d'abord la contraction puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[2n] \rightarrow x[2n-d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n-d] \rightarrow x[2(n-d)] = y_{D,T}[n]$$

Comme le résultat dépend de l'ordre des opérations, le système n'est pas temporellement invariant.

Le tableau 9.2 rassemble les propriétés de quelques opérations fréquemment effectuées en traitement numérique des signaux et mentionne si les opérations sont linéaires (L), invariantes temporellement (I), causales (C), stables (S) et si elles nécessitent une mémoire (M). Quelques opérations sont laissées à l'analyse du lecteur.

	Opérations	Équations	L	I	C	S	M
a	Différence avant	$x[n + 1] - x[n]$	O	O	N	O	O
b	Différence arrière	$x[n] - x[n - 1]$	O	O	O	O	O
c	Accumulation	$\sum_{-\infty}^n x[k]$	O	O	O	N	O
d	Amplification	$a x[n]$	O	O	O	O	N
e	Moyenneur centré	$(x[n + 1] + x[n] + x[n - 1]) / 3$	O	O	N	O	O
f	Contraction temporelle	$x[n^2]$					
g	Sous-échantillonnage	$x[2n]$					
h	Rotation autour de Oy	$x[-n]$					
j	Multiplication temporelle	$n x[n]$					
k	Opération quadratique	$x^2[n]$					
l	Amplification et décalage	$a x[n] + b, \quad b \neq 0$					

TABLE 9.2.: Propriétés de quelques transformations

9.2.4. Interconnexions des systèmes

Comme pour les systèmes analogiques, les systèmes numériques peuvent être interconnectés pour former des systèmes plus complexes. Pour ce faire, on a deux possibilités : les connecter en cascade ou en parallèle (figure 9.7). Lors d'une connexion en cascade, on a les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} y_1[n] &= H_1 \{x[n]\} \\ y[n] &= H_2 \{y_1[n]\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[n] = H_2 \{H_1 \{x[n]\}\}$$

Lors d'une connexion en parallèle, on a les relations suivantes :

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \Rightarrow y[n] = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\}$$

Et c'est seulement dans le cas où les systèmes sont *linéaires et temporellement invariants* que l'on pourra écrire comme on a l'habitude de le faire avec les systèmes continus :

$$\begin{aligned} y[n] &= (H_1 \cdot H_2) \{x[n]\} = (H_2 \cdot H_1) \{x[n]\} \\ y[n] &= (H_1 + H_2) \{x[n]\} = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\} \end{aligned}$$

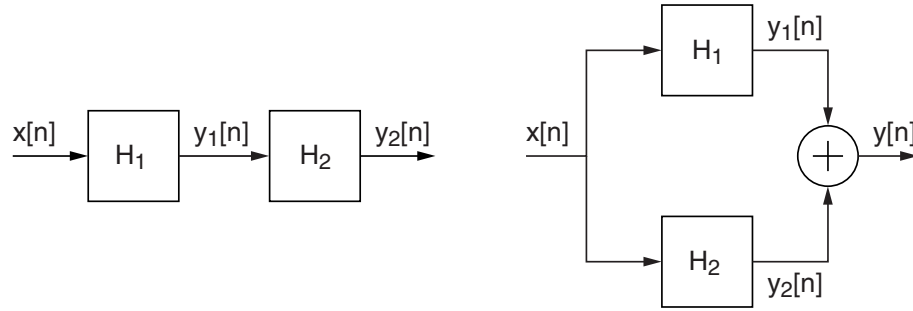


FIGURE 9.7.: Interconnexions de 2 systèmes en cascade ou en parallèle

9.2.5. Conclusions

Comme nous venons de le voir, les systèmes linéaires et temporellement invariants (systèmes LTI) constituent une classe importante des systèmes et c'est seulement sur les systèmes LTI que l'on peut appliquer les notions de réponse impulsionnelle, de produit de convolution et de fonction de transfert.

9.3. Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Parmi l'ensemble des réponses temporelles d'un système, il en est une qui permet de calculer toutes les autres : c'est la réponse impulsionnelle que l'on obtient en appliquant à un système LTI une impulsion unité $\delta[n]$. Cette réponse particulière est désignée par $h[n]$:

$$h[n] \equiv T \{ \delta[n] \} \quad (9.18)$$

On a vu au début de ce chapitre qu'un signal quelconque $x[n]$ peut être considéré comme une suite d'impulsions d'amplitude variable :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (9.19)$$

Puisque les systèmes que nous examinerons dès à présent sont linéaires et temporellement invariants, la réponse de ceux-ci au signal $x[n]$ sera constituée d'une somme de réponses dues à chaque impulsion $x[k] \delta[n - k]$:

$$y_k[n] = T \{ x[k] \delta[n - k] \} = x[k] h[n - k] \quad (9.20)$$

Ce qui, en tenant compte de l'ensemble des impulsions, conduit à :

$$y[n] = T \{ x[n] \} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] \quad (9.21)$$

Cette relation importante porte le nom de *produit de convolution numérique*. Les opérations que nous venons d'effectuer peuvent être décrites et résumées dans la

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

suite de relations suivantes

$$\begin{aligned} \delta[n] &\rightarrow h[n] \\ \delta[n-k] &\rightarrow h[n-k] \\ x[k] \delta[n-k] &\rightarrow x[k] h[n-k] \\ \sum x[k] \delta[n-k] &\rightarrow \sum x[k] h[n-k] \\ x[n] &\rightarrow y[n] \end{aligned}$$

qui sont illustrées par la figure 9.8.

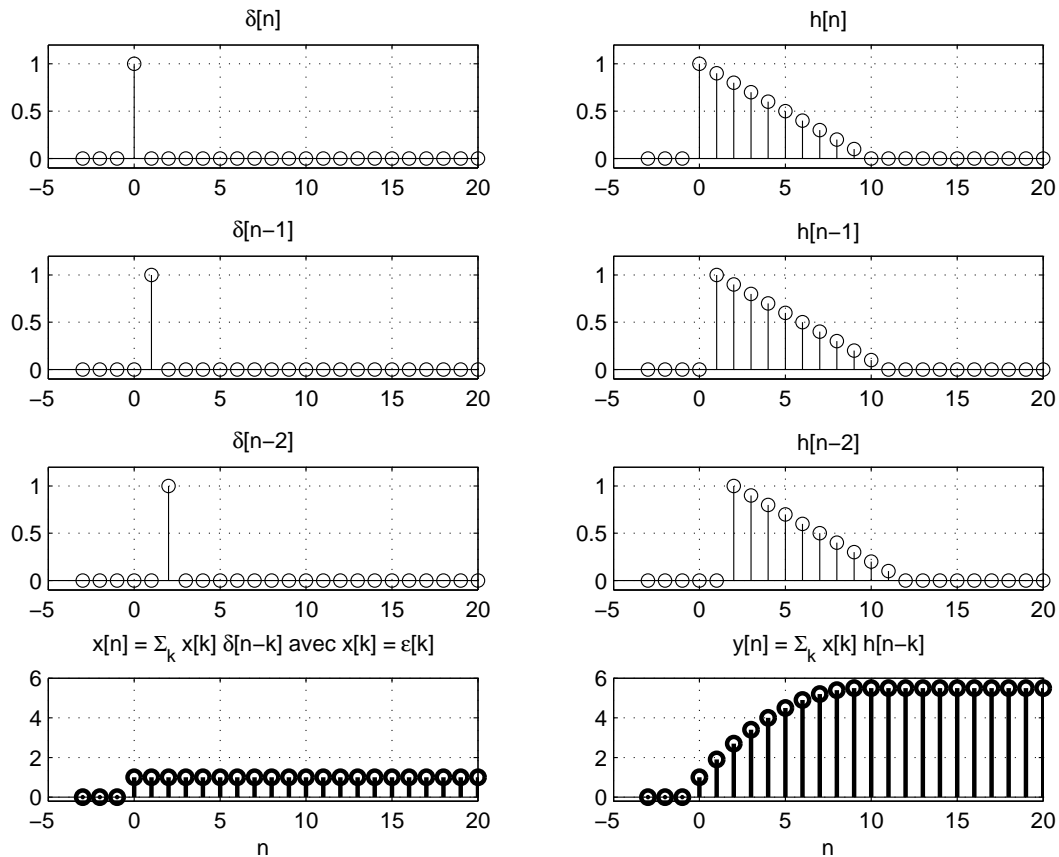


FIGURE 9.8.: Illustration du produit de convolution

Un simple changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \quad (9.22)$$

Ce résultat s'écrit symboliquement sous la forme :

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] \quad (9.23)$$

L'intérêt du produit de convolution réside dans le fait qu'un système LTI est totalement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$ et que le calcul de la réponse

à un signal quelconque peut alors se faire en restant dans le domaine temporel. On notera que le produit de convolution est le résultat direct de la linéarité et de l'invariance temporelle; il ne peut donc s'appliquer qu'aux systèmes LTI.

9.3.1. Systèmes causaux

Systèmes à réponse impulsionnelle infinie

Dans le cas où le système considéré est causal, sa réponse impulsionnelle $h[n]$ ne peut pas précéder l'instant de l'application du signal $x[n]$ au système; elle est donc nulle si $n < 0$. Considérant que l'on applique le signal $x[n]$ à l'instant $n = 0$, on a donc :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+n} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+n} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (9.24)$$

Systèmes à réponse impulsionnelle finie

De plus, dans le cas très fréquent de systèmes causaux à réponse impulsionnelle de durée finie (systèmes RIF), la réponse impulsionnelle est nulle pour $n < 0$ et pour $n \geq N$. Alors, considérant que $x[n < 0] = 0$, la réponse impulsionnelle est de longueur N et la réponse du système à un signal quelconque $x[n]$ se calcule avec :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (9.25)$$

Le schéma fonctionnel correspondant à cette équation est représenté à la figure 9.9 (on notera l'usage de l'opérateur z^{-1} qui effectue un décalage arrière).

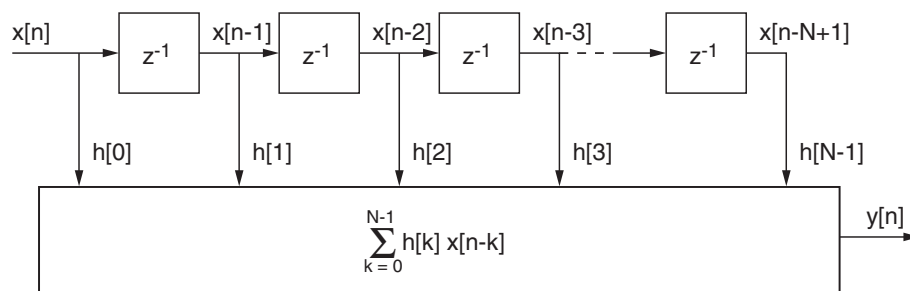


FIGURE 9.9.: Représentation du produit de convolution

Il est important de bien comprendre les opérations sous-jacentes à l'équation de convolution

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

On voit que l'on doit tout d'abord "retourner" le signal d'entrée $x[k]$ (ici, un saut unité) autour de l'ordonnée afin d'obtenir $x[-k]$ (figure 9.10). Puis, à chaque instant n on devra :

1. décaler $x[-k]$ en n pour obtenir $x[n - k]$;
2. effectuer sa multiplication avec $h[k]$ pour obtenir $h[k] \cdot x[n - k]$;
3. sommer la suite de valeurs ainsi obtenues. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/ni.html>

La figure 9.10 illustre la situation pour $n = 10$ et l'on voit que la somme des valeurs successives vaut :

$$\sum_{k=0}^{10} h[k] x[n - k] = 1 + 0.9 + 0.9^2 + \dots + 0.9^{10} = 6.86 = y[10]$$

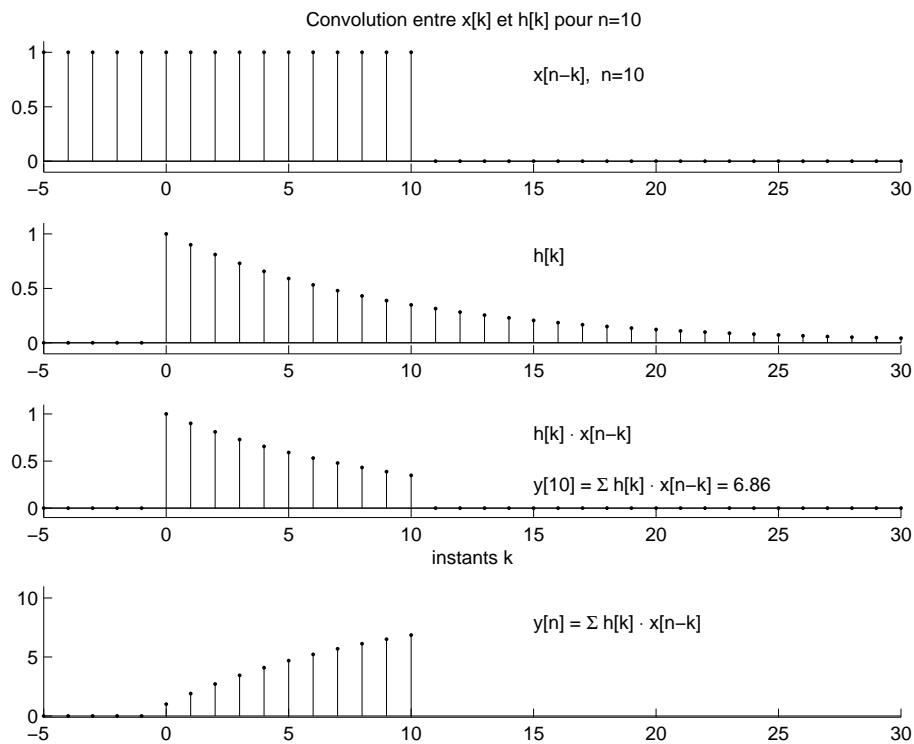


FIGURE 9.10.: Illustration du calcul d'un produit de convolution

9.3.2. Réalisation d'un produit convolution

Considérant la figure 9.9, on voit que pour calculer un produit de convolution il faut avoir à sa disposition les suites de valeurs $h[k]$ et $x[n - k]$. Cela nécessite donc deux espaces-mémoire de longueur N . Dans le premier (généralement une EPROM), on stockera les valeurs de la réponse impulsionnelle $h[k]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$ caractérisant le système que l'on souhaite réaliser. Dans le deuxième, qui sera constamment mis à jour (généralement une RAM), on gardera les N dernières valeurs du signal d'entrée $x[n]$ (figure 9.11).

9.3. Réponse impulsionnelle et produit de convolution

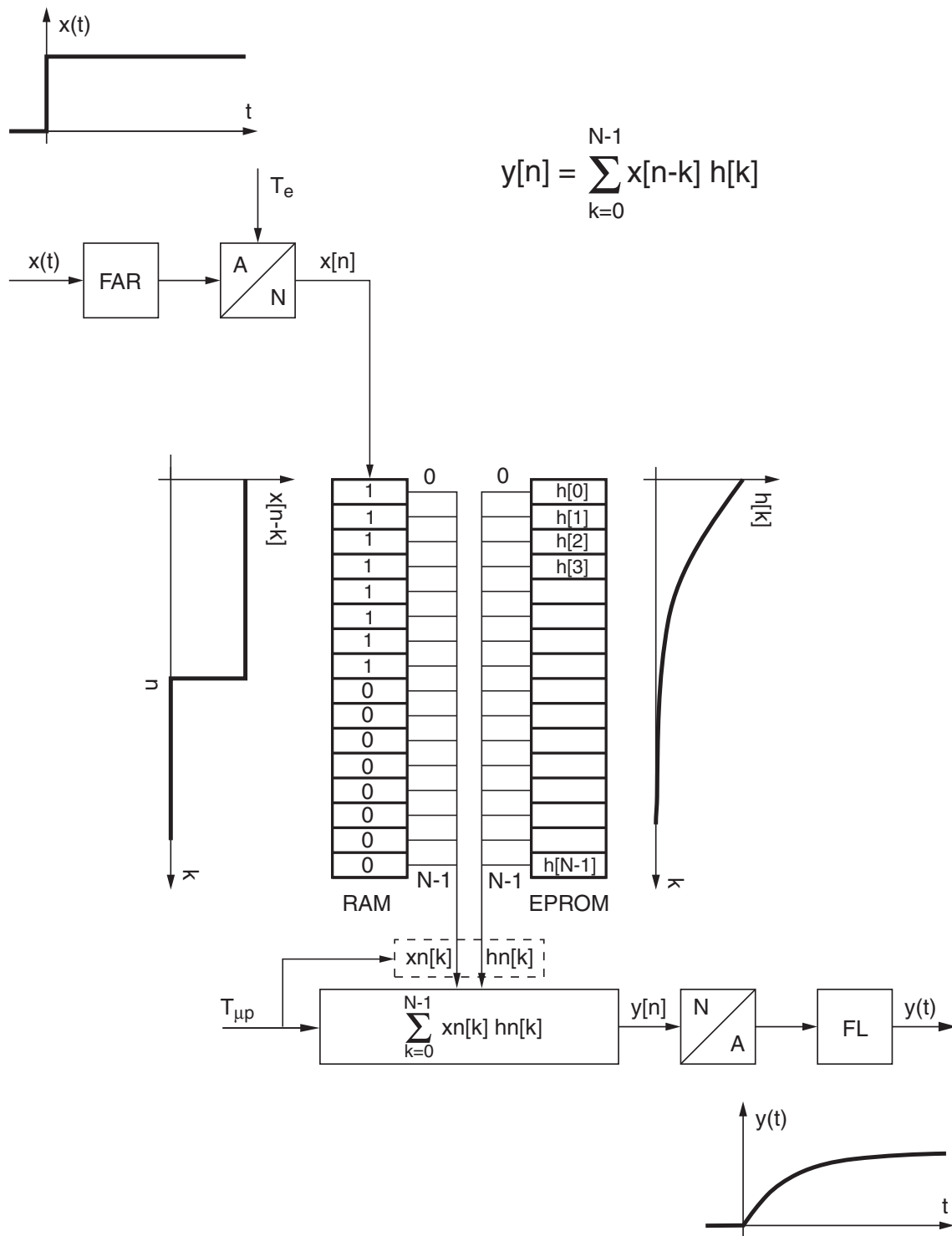


FIGURE 9.11.: Schéma technologique d'une convolution numérique

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Comme exemple illustratif, imaginons que l'on souhaite réaliser un équivalent numérique d'un filtre passe-bas analogique dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la sortie $y(t)$ sont décrites par :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

dont l'équivalent numérique s'écrit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n T_e h[k] x[n - k]$$

On notera que dans cette expression, la période d'échantillonnage T_e multiplie la réponse impulsionnelle $h[k]$ dont les unités sont l'inverse du temps. De manière à normaliser la réponse impulsionnelle numérique par rapport à T_e , on la définit comme suit :

$$h[n] \equiv T_e h(t = nT_e) \quad (9.26)$$

Ce qui dans notre cas particulier devient :

$$h[n] = T_e \frac{1}{\tau} e^{-nT_e/\tau} = \frac{T_e}{\tau} (e^{-T_e/\tau})^n$$

En posant :

$$R = e^{-T_e/\tau}$$

la réponse impulsionnelle du filtre numérique passe-bas d'ordre 1 s'écrit donc :

$$h[n] = \frac{T_e}{\tau} R^n \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (9.27)$$

En limitant la longueur de la réponse impulsionnelle aux N premières valeurs et admettant que le contenu de la RAM a été initialisé à zéro, la réponse à un signal quelconque se calcule alors comme suit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n - k]$$

Une traduction algorithmique du produit de convolution pourrait être la suivante :

```
{initialisation des variables}
tau = 1e-3
Te = 1e-4
R = exp(-Te/tau)
N = 100
```

```

{initialisation des tableaux}
for k =0:N-1
    xn(k) = 0
    hn(k) = (Te/tau)*R^k
end
{calcul et envoi du signal de sortie yn}
repeat
    x0 = AnalogInput
    {initialisation et calcul de la somme}
    yn = x0*hn(0)
    for k = 1:N-1
        do yn = yn + xn(k) * hn(k)
    end
    AnalogOutput (yn)
    {mise à jour du tableau xn(k)}
    for k = N-1:-1:1
        do xn(k) = xn(k-1)
    end
    xn(0) = x0
until stop

```

9.3.3. Une application : l'interpolation numérique

Une application intéressante du produit de convolution consiste en l'agrandissement (zoom) d'une suite de valeurs par interpolation numérique. Parmi le grand nombre d'interpolations possibles, on en présente trois : les interpolations constante, linéaire et parabolique. La première maintient la valeur considérée, la deuxième relie deux points successifs par un segment de droite et enfin la dernière relie ces deux points par des arcs de parabole. Un interpolateur d'ordre N remplace chaque valeur d'une suite $x[n]$ (sauf la dernière) par N nouvelles valeurs.

Du point de vue de la convolution, une fonction d'interpolation est un opérateur que l'on décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n]$. Son application à une suite $x[n]$ de valeurs numériques remplace chacune de celles-ci par, respectivement, une constante, deux segments de droite ou trois arcs de parabole (figure 9.12). Ces fonctions d'interpolation de longueur $2N$ doivent valoir 1 au centre et 0 aux extrémités. Elles sont décrites respectivement par les expressions suivantes :

$$h_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{si } N/2 < |n| \leq N \end{cases} \quad (9.28)$$

$$h_1[n] = \frac{N - |n|}{N} \quad \text{pour } |n| \leq N \quad (9.29)$$

$$h_2[n] = \begin{cases} \frac{2}{N^2} (n + N)^2 & \text{si } -N < n < -N/2 \\ 1 - \frac{2}{N^2} n^2 & \text{si } -N/2 \leq n \leq +N/2 \\ \frac{2}{N^2} (n - N)^2 & \text{si } +N/2 < n < +N \end{cases} \quad (9.30)$$

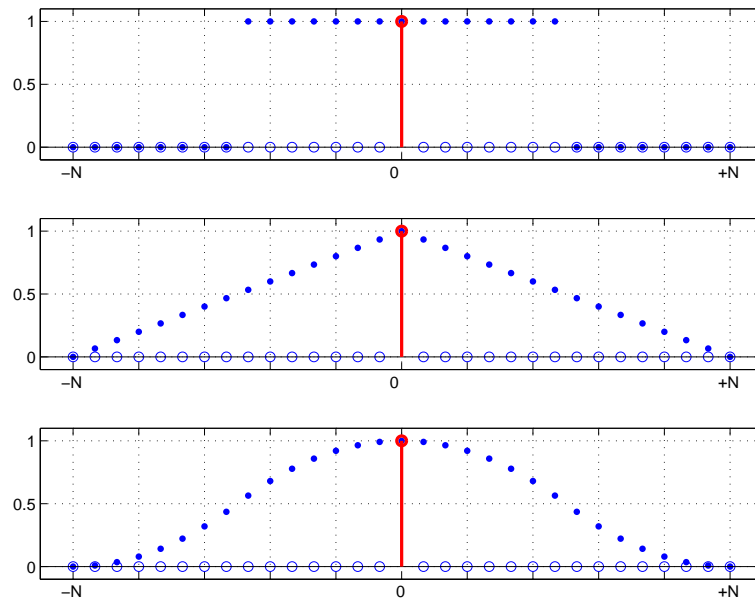


FIGURE 9.12.: Réponses impulsionnelles de trois interpolateurs

La figure 9.13 illustre l'effet des interpolateurs d'ordre $N = 15$ appliqués à trois impulsions d'amplitude 1, 4 et 2. On y voit très bien que chaque impulsion est remplacée par une fonction d'interpolation et que la somme de celles-ci conduit au résultat global représenté par les points interpolés. Il est important de noter que pour utiliser la convolution en tant qu'interpolateur, il faut au préalable insérer entre les valeurs à interpoler un nombre de zéros égal à $N - 1$. Ainsi, avant d'effectuer le produit de convolution pour obtenir la suite interpolée

$$y[n] = h[n] \otimes x_0[n] \quad (9.31)$$

on doit remplacer la suite $x[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{2}\}$ par une nouvelle suite valant

$$x_0[n] = \{\mathbf{0}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{4}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{2}\} \quad (9.32)$$

Puis, afin d'éliminer les effets de bords, on enlèvera du résultat de cette convolution les N valeurs extrêmes obtenues de part et d'autre de la suite originale $x_0[n]$.

La figure 9.14 montre les résultats des trois interpolations appliquées à une suite de valeurs oscillantes amorties. On notera que le choix d'une fonction d'interpolation n'est pas anodin car il peut conduire à une représentation erronée du signal analogique enregistré. La figure 9.15 illustre le résultat de ces trois mêmes interpolations appliquées à une image agrandie d'un facteur huit.

9.4. Systèmes décrits par des équations récursives

Dans la section précédente, nous avons analysé les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI). Ces systèmes étaient représentés par leur réponse impulsionnelle $h[n]$ et l'obtention de la réponse $y[n]$ à un signal d'entrée quelconque faisait

9.4. Systèmes décrits par des équations récursives

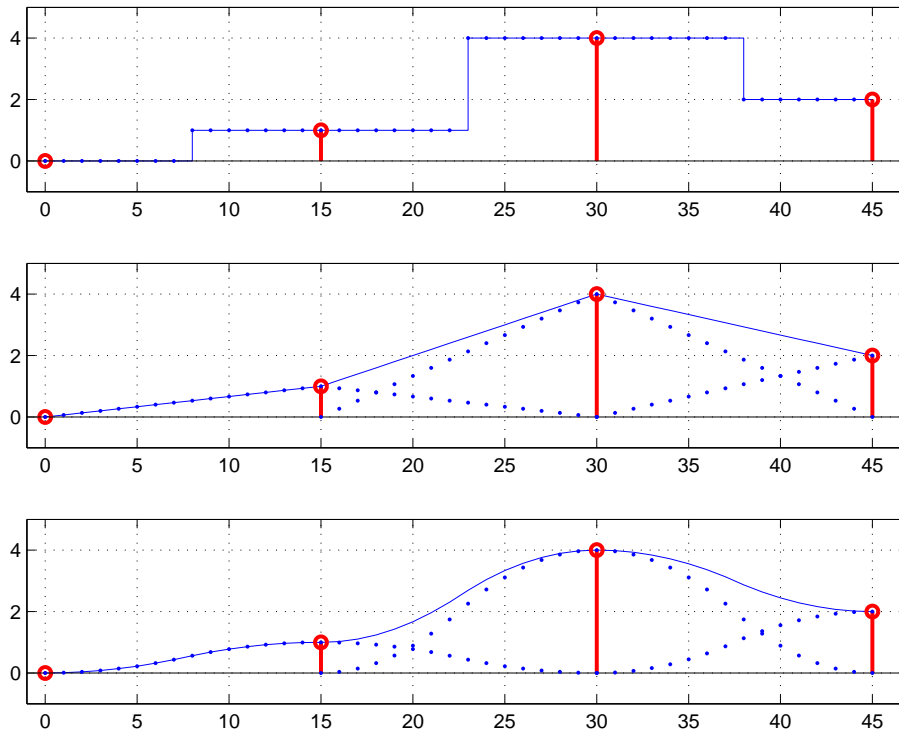


FIGURE 9.13.: Réponses individuelle et globale de trois interpolateurs d'ordre $N = 15$

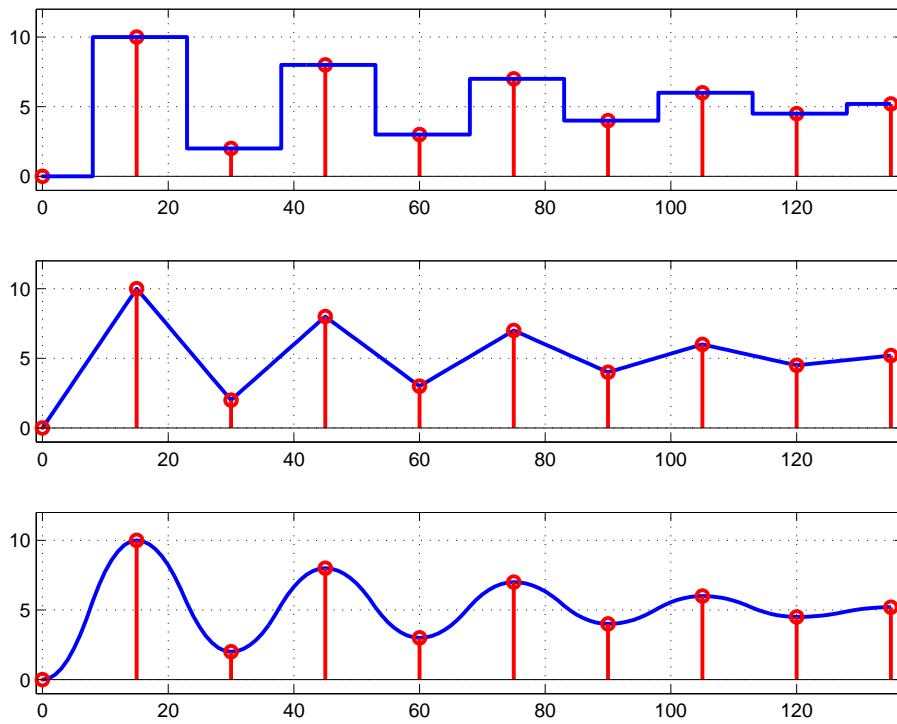


FIGURE 9.14.: Trois interpolations d'une même suite de valeurs

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

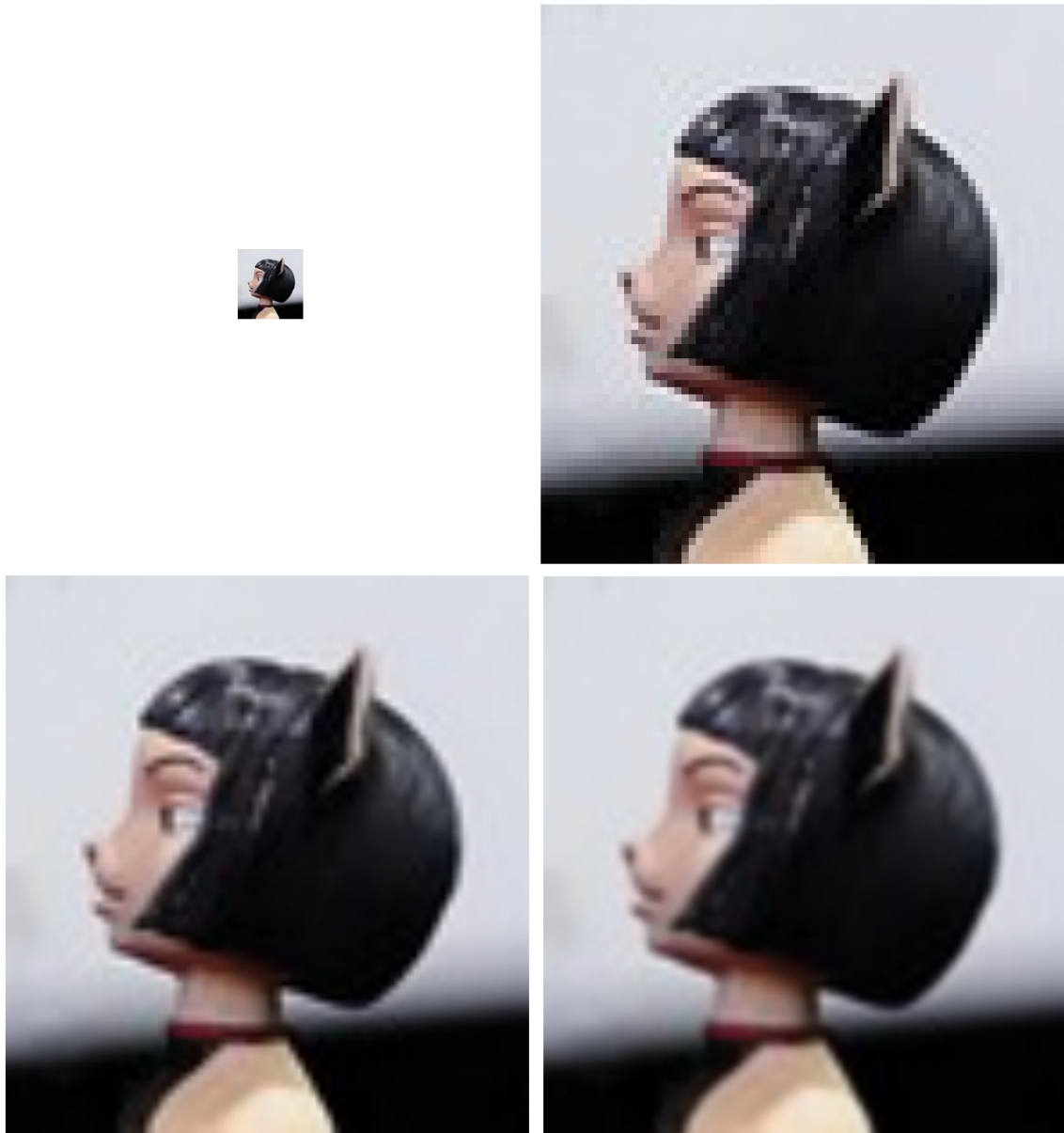


FIGURE 9.15.: Agrandissement d'une image par interpolation constante, linéaire ou parabolique

appel au produit de convolution. Dans le calcul de celui-ci n'intervient que le signal d'entrée $x[n]$ et $h[n]$ (équation non récursive). Cette manière de faire nécessite, pour chaque instant n , le calcul complet de $y[n]$ sans utiliser des résultats précédemment calculés :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n-k]$$

Dans les quelques exemples qui suivent, on montre qu'il est généralement assez facile de trouver une équation utilisant des résultats obtenus préalablement. Le système est alors décrit, de manière équivalente, par une équation récursive.

9.4.1. Quelques exemples

Accumulateur Un accumulateur causal est représenté par l'équation :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] \quad (9.33)$$

On voit immédiatement que ce résultat peut être récrit sous la forme :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^n x[k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] \end{aligned}$$

donc :

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (9.34)$$

Cette dernière équation n'est autre que la forme récursive de l'accumulateur.

Filtre passe-bas On a vu plus haut que la réponse d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pouvait être décrite par :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] \quad (9.35)$$

Ce résultat peut également s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] = \frac{T_e}{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} R^k x[n-k] \\ &= \frac{T_e}{\tau} \{ R^0 x[n] + R^1 x[n-1] + R^2 x[n-2] + \dots \} \\ &= \frac{T_e}{\tau} x[n] + R \frac{T_e}{\tau} \{ R^0 x[n-1] + R^1 x[n-2] + R^2 x[n-3] + \dots \} \end{aligned}$$

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Ce qui donne finalement la forme réursive suivante :

$$y[n] = \frac{T_e}{\tau} x[n] + R y[n - 1] \quad (9.36)$$

On voit ainsi que le calcul de la réponse $y[n]$, qui dans l'approche non réursive demande pour chaque instant n le calcul de N multiplications et additions, peut être remplacé par une équation réursive ne demandant qu'une multiplication et une addition.

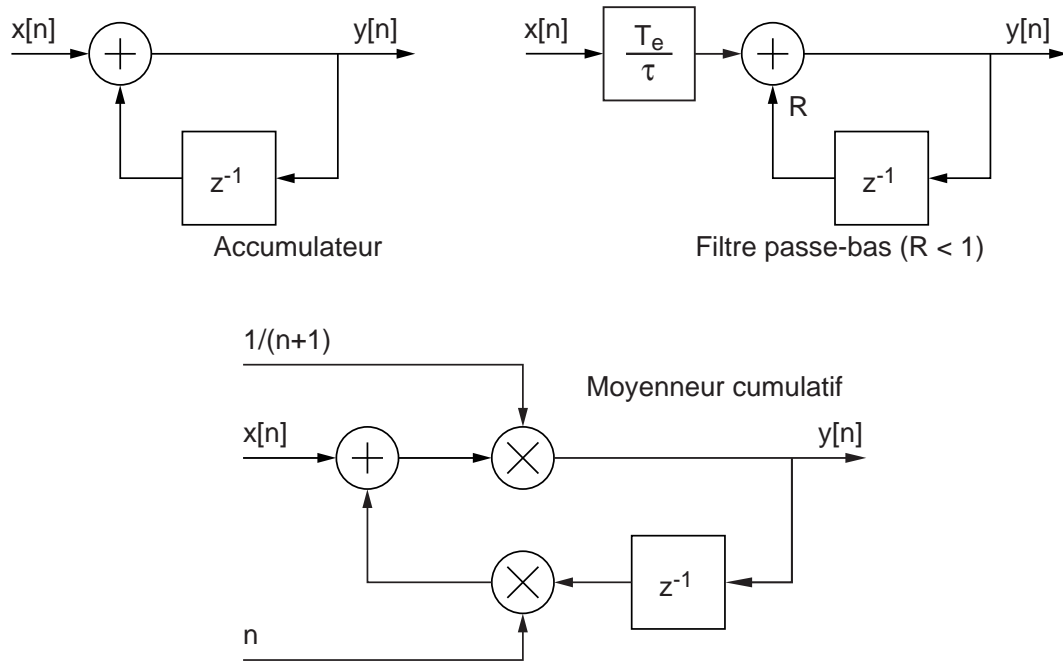


FIGURE 9.16.: Schémas fonctionnels : (a) d'un accumulateur, (b) d'un filtre passe-bas, (c) d'un moyenneur cumulatif

Moyenne cumulée Considérons le calcul d'une moyenne que l'on souhaite évaluer à l'apparition de chaque nouvel échantillon :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x[k] \quad (9.37)$$

En multipliant les 2 membres de l'équation par $n+1$, on obtient :

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$$

Ce qui peut également s'écrire sous la forme :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \left(x[n] + n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \right)$$

pour donner finalement

$$y[n] = \frac{1}{n+1} (x[n] + n y[n-1]) \quad (9.38)$$

Les schémas fonctionnels correspondant à chacun de ces 3 systèmes sont illustrés par la figure 9.16.

Conclusion Ces quelques exemples ont montré que bien des opérations linéaires peuvent être ramenées à des équations récursives et qu'alors le nombre d'opérations à effectuer est fortement réduit.

9.5. Exercices

SNB 1 Esquissez les signaux suivants

$$\begin{aligned} x_1[n] &= -\epsilon[n-2] & x_4[n] &= 0.9^n \epsilon[n] \\ x_2[n] &= +\epsilon[n+1] + \delta[n] & x_5[n] &= \sin(\pi n/6) \\ x_3[n] &= 2\epsilon[n+2] - \epsilon[3-n] & x_6[n] &= \sin(\pi n/8) \epsilon[n] \end{aligned}$$

SNB 2 Esquissez le signal $x[n] = \{\dots, 0, 0, -1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots\}$ puis faites de même avec les signaux suivants

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n-2] & y_4[n] &= x[n] \cdot \delta[n] \\ y_2[n] &= x[3-n] & y_5[n] &= x[n+1] \cdot \delta[n] \\ y_3[n] &= x[n+1] \cdot \epsilon[n] & y_6[n] &= x[3-n] \cdot \delta[n-2] \end{aligned}$$

SNB 3 Trouvez les expressions mathématiques décrivant les signaux de la figure SNB 3.

SNB 4 Considérant les fonctions oscillantes ci-dessous, donnez pour chacune d'entre-elles la pulsation normalisée Ω_0 , la période numérique N et le nombre de périodes analogiques par période numérique.

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos(n\pi/20) & x_4[n] &= \exp(jn\pi/4 - \pi/2) \\ x_2[n] &= \cos(n3\pi/8) & x_5[n] &= 3 \sin(5n + \pi/6) \\ x_3[n] &= \cos(n13\pi/8 - \pi/3) & x_6[n] &= \cos(n3\pi/10) - \sin(n\pi/10) + 3 \cos(n\pi/5) \end{aligned}$$

SNC 1 On considère un système temporellement invariant auquel on applique successivement les signaux d'entrée $x_1[n]$, $x_2[n]$ (figure SNC 1). A ces signaux distincts correspondent les suites $y_1[n]$, $y_2[n]$.

1. Quelle est la réponse impulsionnelle du système ?
2. Déterminez si le système est linéaire ou non.
3. Donnez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

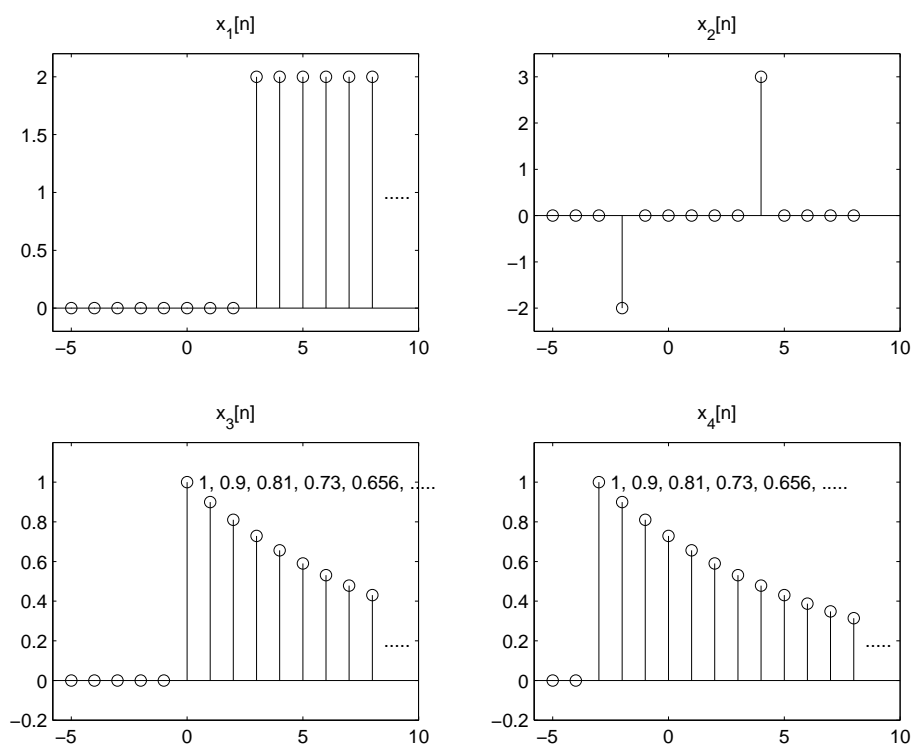


FIGURE 9.17.: Ex. SNB 3

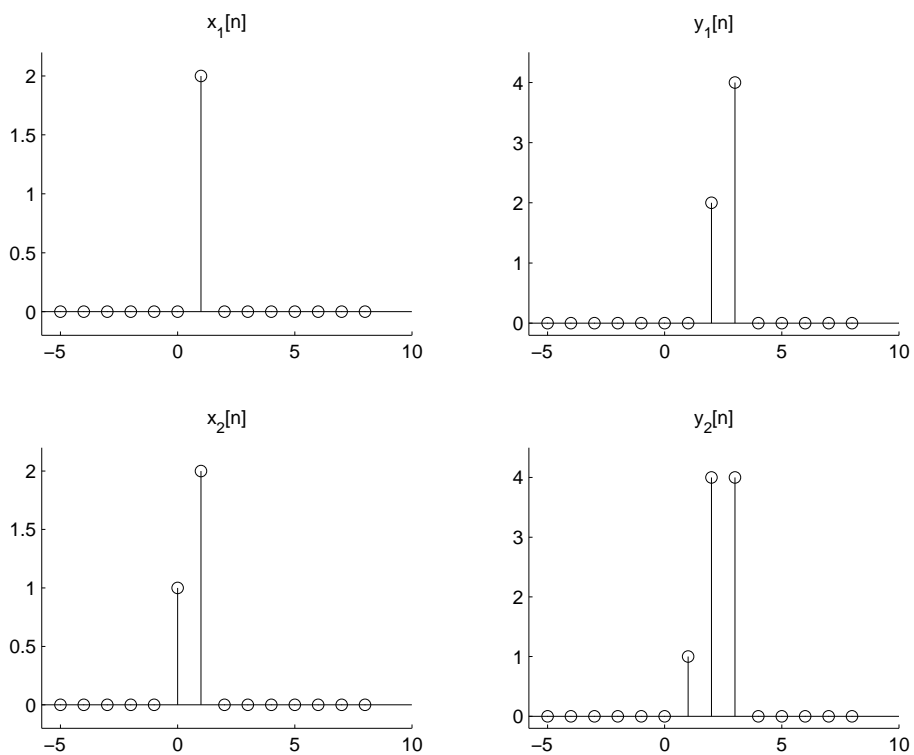


FIGURE 9.18.: Ex. SNC 1

SNC 2 On considère un système LTI causal décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = \{4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \dots\} \quad n \geq 0$$

et les signaux d'entrée suivants

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \delta[n - 1] & x_3[n] &= \epsilon[n] - \epsilon[n - 5] \\ x_2[n] &= +2\delta[n] - \delta[n - 1] & x_4[n] &= \epsilon[n + 5] \end{aligned}$$

Esquissez ces signaux $x_k[n]$ et les réponses respectives $y_k[n]$ après les avoir calculées avec le produit de convolution.

SNC 3 Étant donné la réponse impulsionnelle causale

$$h[n \geq 0] = \{0, 1, 1, 1, 1, -2, -2, 0, 0, \dots\}$$

d'un système LTI, dessinez cette réponse puis calculez et esquissez sa réponse à $x[n] = \epsilon[n]$. De quel filtre s'agit-il ?

SNC 4 Utilisez le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle d'un système causal et LTI décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n] = 0.8^n \epsilon[n]$.

SNC 5 On considère un système décrit par l'équation aux différences suivantes

$$y[n] = 2x[n - 1] + \frac{3}{4}y[n - 1] - \frac{1}{8}y[n - 2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel et calculez sa réponse impulsionnelle sachant que les CI sont nulles.

SNC 6 Trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système causal LTI qui a répondu avec le signal $y[n]$ au signal appliqué $x[n]$ (figure SNC 6).

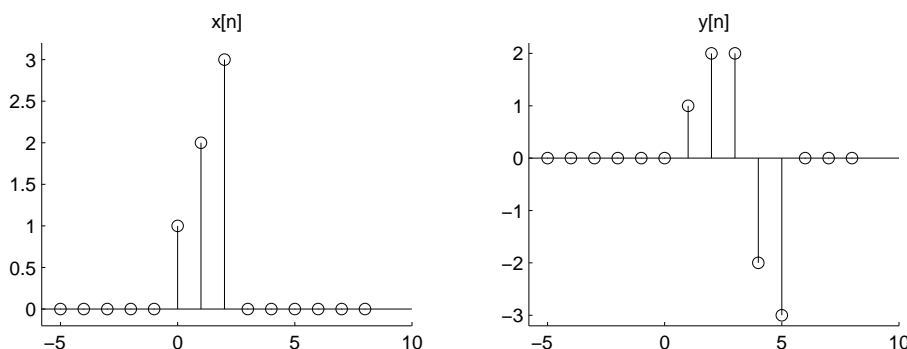


FIGURE 9.19.: Ex. SNC 6

Remarque : Ce calcul, qui porte le nom d'opération de déconvolution, se fait de manière récursive directement à partir de la définition du produit de convolution.

9. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

SNC 7 On souhaite appliquer une interpolation en cosinus d'ordre 4 à la séquence numérique $x[n] = \{1, 6, 3\}$. Pour ce faire,

1. calculez littéralement la réponse impulsionnelle $h[n]$ en cosinus telle que $h[0] = 1$ et $h[\pm N] = 0$;
2. calculez les valeurs numériques de $h[n]$;
3. créez la suite $x_0[n]$ et calculez la suite interpolée $y[n]$.

Rép. :

$$h[n] = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{avec} \quad -N \leq n \leq +N$$

$h[n]$	0	0.1465	0.5	0.8535	1	0.8535	0.5	0.1465	0
$x_0[n]$	1	0	0	0	6	0	0	0	3
$h_1[n]$	1	0.8535	0.5	0.1465	0				
$h_6[n]$	0	0.8787	3	5.1213	6	5.1213	3	0.8787	0
$h_3[n]$					0	0.4394	1.5	2.5606	3
$y[n]$	1	1.7322	3.5	5.2678	6	5.5607	4.5	3.4393	3

10. Réponses des systèmes numériques

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un système numérique peut être décrit par une équation aux différences. De manière générale, c'est celle-ci qui est implantée dans un processeur afin de réaliser en temps réel la fonction souhaitée. Afin que les calculs se fassent dans un temps très court, on utilise de préférence un processeur spécialisé pour le traitement de signaux (Digital Signal Processor = DSP) qui, en un cycle d'horloge ($t_{clock} \simeq 10 \text{ ns}$) va chercher deux variables, effectue leur produit et ajoute le résultat dans un registre.

Cependant, avant d'implanter dans un DSP un système ou un filtre numérique sous la forme d'un algorithme, il est nécessaire d'analyser et comprendre le comportement de celui-ci. Pour ce faire, on doit pouvoir au préalable :

- décrire le système considéré par sa réponse impulsionnelle ou par une équation aux différences ;
- représenter ce système avec une fonction de transfert ;
- prévoir la stabilité du système numérique ;
- calculer les réponses temporelle et fréquentielle du système.

10.1. Réponse temporelle des systèmes linéaires

10.1.1. Résolution d'une équation récursive

À titre introductif, considérons l'équation linéaire suivante :

$$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.2y[n-2] = x[n] \equiv 0.8^n$$

dont on recherchera la solution pour $n \geq 0$ en tenant compte des deux conditions initiales : $y[-1] = 0$, $y[0] = 0$.

La démarche à suivre pour résoudre cette équation aux différences est la même que celle utilisée pour résoudre les équations différentielles à coefficients constants. C'est-à-dire qu'il faut :

1. rechercher la solution générale $y_h[n]$ de l'équation homogène ;
2. rechercher une solution particulière $y_p[n]$ de l'équation non-homogène ;
3. en déduire la solution générale $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$;
4. calculer les coefficients indéterminés en tenant compte des conditions initiales.

10.1.2. Solution de l'équation homogène

On sait que la solution générale d'une équation différentielle à coefficients constants est une somme d'exponentielles de la forme e^{pt} . Il en va de même pour une équation aux différences à coefficients constants ; mais dans ce cas, l'exponentielle numérique sera de la forme λ^n . On recherchera donc une solution générale de l'équation homogène en posant :

$$y_h[n] = C \lambda^n$$

où λ est une constante, complexe ou non, et C une constante réelle.

En portant cette solution dans l'équation homogène, on obtient :

$$C \lambda^n - 0.9 C \lambda^{n-1} + 0.2 C \lambda^{n-2} = 0$$

En mettant en évidence le terme commun $C \lambda^{n-2}$, on obtient une équation quadratique en λ qui est l'équation caractéristique de l'équation aux différences :

$$\lambda^2 - 0.9 \lambda + 0.2 = 0$$

dont les racines sont :

$$\lambda_1 = +0.4 \quad \lambda_2 = +0.5$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ &= C_1 0.4^n + C_2 0.5^n \end{aligned}$$

10.1.3. Solution particulière

La solution particulière de l'équation aux différences est du même type que la fonction du second membre de l'équation ; dans notre cas, on posera :

$$y_p[n] = C_3 \lambda_3^n \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = 0.8$$

En portant cette solution dans l'équation aux différences, il vient :

$$C_3 \lambda_3^n (1 - 0.9 \lambda_3^{-1} + 0.2 \lambda_3^{-2}) = \lambda_3^n$$

Après simplification par λ_3^n , on en tire le coefficient C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{1 - 0.9 \cdot 0.8^{-1} + 0.2 \cdot 0.8^{-2}} = \frac{16}{3}$$

La solution particulière vaut donc :

$$y_p[n] = \frac{16}{3} 0.8^n$$

10.1.4. Solution générale

La solution générale

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

de l'équation aux différences complète s'écrit donc :

$$y[n] = C_1 0.4^n + C_2 0.5^n + \frac{16}{3} 0.8^n$$

Les coefficients C_1 et C_2 se calculent en tenant compte des conditions initiales. Celles-ci nous permettent d'écrire deux équations algébriques :

$$\begin{aligned} y[-1] &= 0 \\ &= C_1 0.4^{-1} + C_2 0.5^{-1} + \frac{16}{3} 0.8^{-1} \\ &= 2.5 C_1 + 2.0 C_2 + \frac{20}{3} \\ y[0] &= 0 \\ &= C_1 0.4^0 + C_2 0.5^0 + \frac{16}{3} 0.8^0 \\ &= C_1 + C_2 + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$C_1 = +\frac{24}{3} \quad C_2 = -\frac{40}{3}$$

La solution générale de l'équation aux différences pour $n \geq 0$ est donc :

$$y[n] = \frac{1}{3} (+24 \cdot 0.4^n - 40 \cdot 0.5^n + 16 \cdot 0.8^n)$$

10.1.5. Généralisation

On peut généraliser ce que nous venons de voir en considérant l'équation d'ordre N :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (10.1)$$

dont on cherchera la solution en tenant compte des N conditions initiales.

Solution de l'équation homogène

La solution d'une équation aux différences linéaire et à coefficients constants est du type :

$$y_h[n] = C \lambda^n \quad (10.2)$$

En portant cette solution dans l'équation aux différences, on obtient une équation caractéristique dont les racines déterminent la forme de la solution générale. Celle-ci dépend des trois cas suivants.

Racines réelles et distinctes

Chaque terme λ_i^n avec $i = 1, 2, \dots, M$ est une solution de l'équation aux différences homogène. La solution générale est une combinaison linéaire de tous ces termes :

$$y_h[n] = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_M \lambda_M^n \quad (10.3)$$

Les coefficients C_i sont des constantes fixées par les conditions initiales.

Racines complexes conjuguées

Soit $\lambda_{1,2} = a \pm jb$, deux racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, la solution $y_h[n]$ est une combinaison linéaire de chaque racine élevée à la puissance n :

$$y_h[n] = C_1 (a + jb)^n + C_2 (a - jb)^n$$

On peut également écrire les racines sous forme polaire :

$$a \pm jb = R e^{\pm j\Omega}$$

avec :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Omega = \text{atan} \left(\frac{b}{a} \right)$$

On a donc

$$(a \pm jb)^n = (R e^{\pm j\Omega})^n = R^n (\cos(n\Omega) \pm j \sin(n\Omega))$$

Comme les coefficients de l'équation aux différences sont réels, la solution l'est également. Cela signifie que les termes imaginaires se simplifieront et que l'on obtiendra finalement :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1 R^n \cos(n\Omega) + A_2 R^n \sin(n\Omega) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} R^n \cos \left(n\Omega + \text{atan} \left(\frac{-A_2}{A_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Le résultat général est alors le suivant :

$$y_h[n] = A R^n \cos(n\Omega + \alpha) \quad (10.4)$$

Les conditions initiales permettront de calculer les valeurs de A_1 et A_2 ou celles de A et α .

Racines multiples

Si la racine est de multiplicité m telle que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, on pose :

$$y_h[n] = (C_1 + C_2 n + \dots + C_m n^{m-1}) \lambda_1^n \quad (10.5)$$

Ici également, les coefficients C_1 à C_m seront fixés par les conditions initiales.

Solution particulière

La solution particulière $y_p[n]$ a la même forme que le second membre de l'équation aux différences $x[n]$. Comme exemple, on peut rappeler les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} x[n] = A &\Rightarrow y_p[n] = C \\ x[n] = A \lambda^n &\Rightarrow y_p[n] = C \lambda^n \\ x[n] = A \cos(n\Omega + \alpha) &\Rightarrow y_p[n] = C \cos(n\Omega + \varphi) \end{aligned}$$

10.2. Stabilité des systèmes numériques

Nous venons de voir que la dynamique de la réponse d'un système dépend directement des racines de son équation caractéristique. Comme la réponse du système est décrite par des exponentielles λ^n , il suffit que le module de la racine λ soit inférieur à l'unité pour que cette réponse tende vers zéro au fur et à mesure que n augmente.

Comme on le verra plus loin, les racines de l'équation caractéristique ne sont autres que les pôles de la fonction de transfert représentant le système. On parlera donc indifféremment de pôles du système ou de racines de l'équation caractéristique.

Conclusion Un système numérique est stable si toutes les racines de son équation caractéristique sont à l'intérieur du cercle de rayon unité (figure 10.1), alors qu'un système analogique n'est stable que si ses pôles sont à partie réelle négative.

10.3. Instants caractéristiques

On connaît l'importance des paramètres dynamiques d'un système pour évaluer son comportement temporel. Dans le cas des systèmes analogiques, on sait que, si les pôles $p_{1,2}$ sont complexes conjugués à partie réelle négative, la solution homogène $y_h(t)$ est une fonction sinusoïdale amortie telle que :

$$y_h(t) = C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right)$$

avec τ et T représentant la constante de temps et la période d'oscillation de l'évolution temporelle du signal. On montre aisément que ces deux temps caractéristiques valent respectivement :

$$\tau = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}\{p_{1,2}\}} \right| \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}\{p_{1,2}\}|}$$

Dans le cas des systèmes numériques, il est également intéressant d'évaluer des instants caractéristiques K_c et K_p correspondant à la constante de temps τ et à la

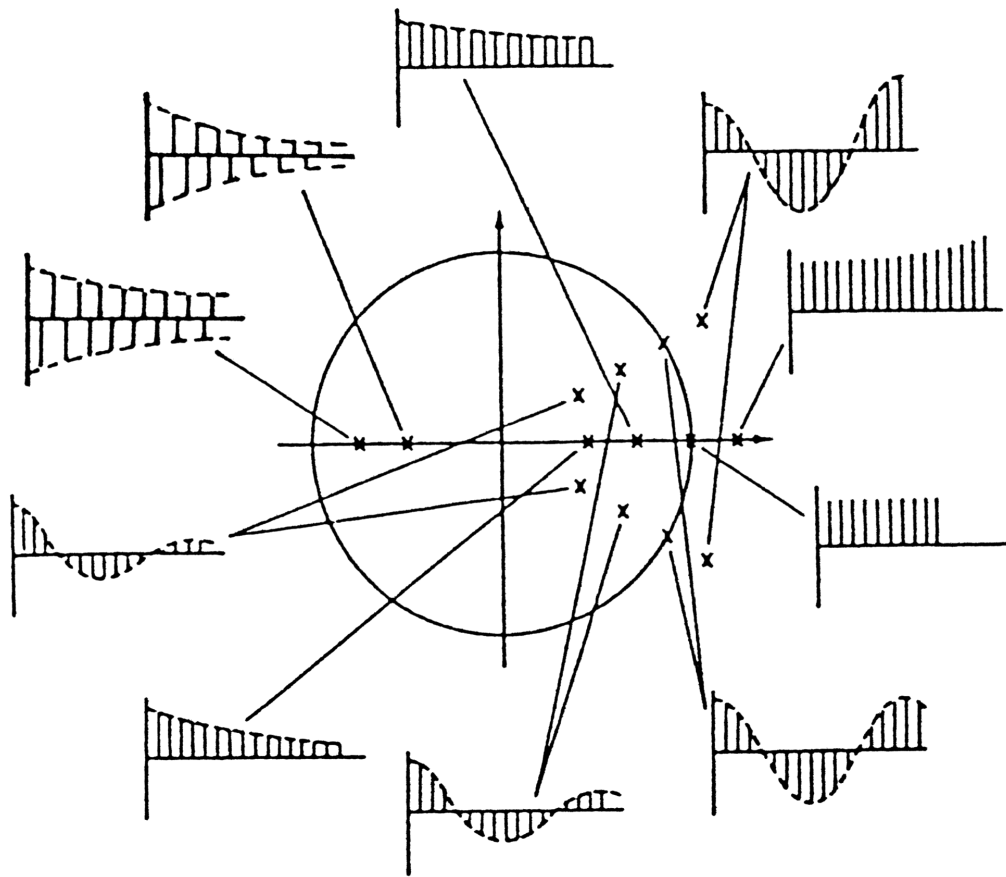


FIGURE 10.1.: Pôles et réponses impulsionnelles d'un système numérique

période d'oscillation T . Il est important de noter ici que K_c et K_p sont des valeurs sans unité, multiples de la période d'échantillonnage T_e du signal considéré.

Ces instants caractéristiques sont définis de la même manière que les paramètres continus τ et T :

1. L'instant K_c est celui pour lequel l'amplitude R^n a diminué ou augmenté d'une valeur égale à e . On a donc $R^{K_c} = e^{\pm 1}$. En prenant le logarithme naturel de cette égalité, on obtient :

$$K_c = \pm \frac{1}{\ln(R)} = \frac{1}{|\ln(R)|} \quad (10.6)$$

2. La période K_p d'une oscillation est telle que $K_p \Omega = 2\pi$. On en tire donc :

$$K_p = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (10.7)$$

Comme la durée du régime transitoire est égale à environ cinq fois la constante de temps, on a :

$$K_{tr} \simeq 5 K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \quad (10.8)$$

et le nombre d'oscillations visibles pendant cette durée vaudra :

$$N_{osc} = \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5 \Omega}{2\pi |\ln(R)|} \simeq \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \quad (10.9)$$

10.4. Transformation en z

La transformation en z fait pour les systèmes numériques ce que la transformation de Laplace fait pour les systèmes continus. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert $H(z)$ dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

10.4.1. Définition

La transformation en z s'applique à une suite de nombres $x[n]$ au travers de la définition suivante :

$$X(z) = Z \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (10.10)$$

On peut montrer que cette définition découle de la transformation de Laplace d'un signal analogique $x(t)$:

$$X(s) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

En effet, considérant que $x[n]$ est la représentation échantillonnée de $x(t)$, on peut remplacer l'intégrale par une somme. Il vient alors :

$$X(s) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} x(n T_e) e^{-sn T_e} T_e = T_e \sum_{n=0}^{+\infty} x(n T_e) (e^{s T_e})^{-n}$$

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

En définissant la variable z par

$$z \equiv e^{+sT_e} \quad (10.11)$$

et en attribuant à la période d'échantillonnage T_e la valeur unitaire, on obtient :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Ce résultat sert de définition à la transformation en z .

On notera que la définition de la variable z correspond à celle de l'opérateur de décalage avant égal à une période d'échantillonnage T_e et que l'opérateur de décalage arrière ou de retard est naturellement

$$z^{-1} \equiv e^{-sT_e} \quad (10.12)$$

10.4.2. Calcul de quelques transformées

Impulsion unité Elle est définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z , on obtient :

$$D(z) = Z \{ \delta[n] \} = \sum_{n=0}^0 1 z^{-n} = 1 \quad (10.13)$$

Saut unité Il est défini par :

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z , on obtient :

$$E(z) = Z \{ \epsilon[n] \} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$$

Cette somme est celle d'une suite géométrique $(z^{-1})^n$ qui est finie si $|z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1 \quad (10.14)$$

Exponentielle Celle-ci est définie par

$$y[n] = \alpha^n \epsilon[n]$$

Alors :

$$Y(z) = Z \{ \alpha^n \epsilon[n] \} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Cette équation représente la somme d'une suite géométrique de raison (αz^{-1}) qui est finie si $|\alpha z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \quad \text{si} \quad |\alpha z^{-1}| < 1 \quad (10.15)$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(n \Omega_0)$	$\frac{\sin \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \alpha \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \sin(n \Omega_0)$	$\frac{\alpha \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

TABLE 10.1.: Quelques transformées en z et de Laplace

10.4.3. Quelques propriétés de la transformation en z

La transformation en z possède des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace. Seules quelques unes sont rappelées ci-après sans démonstration.

1. linéarité :

$$Z \{ a x[n] + b y[n] \} = a X(z) + b Y(z) \quad (10.16)$$

2. décalage temporel :

$$Z \{ x[n + d] \} = z^{+d} X(z) \quad (10.17)$$

3. amortissement :

$$Z \{ \alpha^n x[n] \} = X \left(\frac{z}{\alpha} \right) \quad (10.18)$$

4. valeur initiale :

$$x[0] = X(z)|_{z \rightarrow \infty} \quad (10.19)$$

5. valeur finale (si le système est stable) :

$$x[\infty] = (z - 1) X(z)|_{z=1} \quad (10.20)$$

10.4.4. Équation aux différences et fonction de transfert

Nous avons vu qu'un système pouvait être décrit par une équation aux différences d'ordre N :

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (10.21)$$

On notera au passage que l'ordre M de la partie non-homogène de l'équation n'est pas nécessairement égal à celui de la partie homogène. Son schéma fonctionnel est représenté à la figure 10.2.

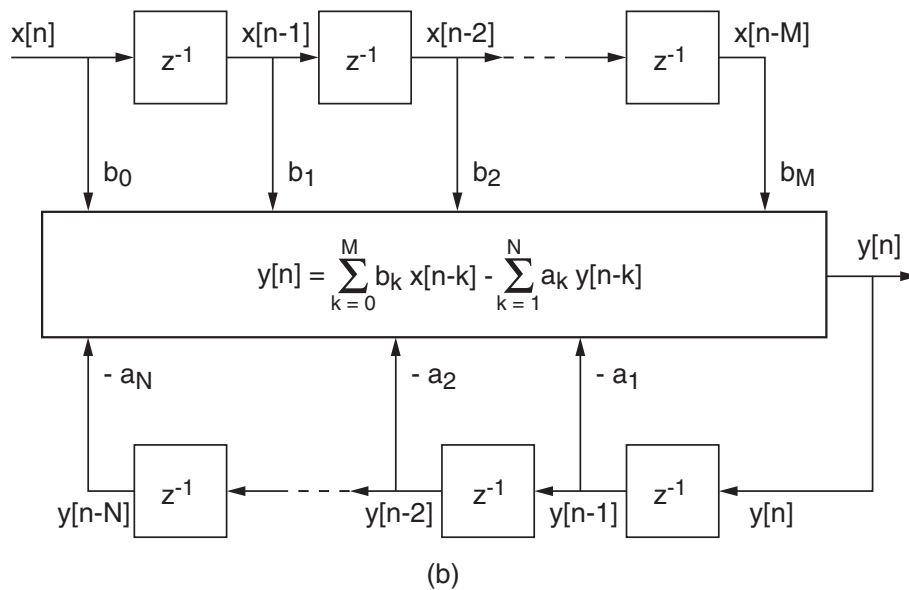


FIGURE 10.2.: Schéma fonctionnel d'une équation aux différences

Dans le cas particulier des systèmes d'ordre 2, on a donc

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (10.22)$$

Utilisant la propriété de linéarité, la transformation en z de l'équation aux différences se calcule aisément et donne :

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$$

En mettant en évidence $Y(z)$ et $X(z)$, il vient :

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

Comme le rapport des grandeurs de sortie $Y(z)$ et d'entrée $X(z)$ définit la fonction de transfert $H(z)$, on obtient :

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (10.23)$$

En multipliant numérateur et dénominateur par z^2 , cette fonction de transfert peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (10.24)$$

On remarque alors que le dénominateur de $H(z)$ n'est autre que l'équation caractéristique de l'équation aux différences représentant le système :

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (10.25)$$

La recherche des pôles de $H(z)$ est donc équivalente à la recherche des racines de l'équation caractéristique. On notera que la forme de $H(z)$ en z^{-1} est dite de *réalisation* (équ. 10.23) alors que celle en z est dite *analytique* (équ. 10.24) .

10.5. Réponse fréquentielle des systèmes LTI

10.5.1. Fonction de transfert et réponse fréquentielle

On a vu plus haut que la variable z correspond à l'opérateur d'avance

$$z = e^{sT_e} \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j\omega \quad (10.26)$$

Comme dans le cas d'une réponse fréquentielle on travaille en régime sinusoïdal permanent, la variable de Laplace vaut simplement $s = j\omega$ et la variable z devient alors

$$z = e^{j\omega T_e} = e^{j\Omega} \quad \text{avec} \quad \Omega \equiv \omega T_e = 2\pi f / f_e \quad (10.27)$$

La variable $\Omega = 2\pi f / f_e$ est la pulsation normalisée définie entre $+\pi$ et $-\pi$; elle représente les fréquences comprises entre $+f_e/2$ et $-f_e/2$. On voit donc que pour calculer une réponse fréquentielle, il suffit de remplacer la variable z par la valeur se situant sur le cercle de rayon unité et d'argument $\Omega = 2\pi f / f_e$.

Ainsi, de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (10.28)$$

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

on tire la réponse fréquentielle

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 e^{+j2\Omega} + b_1 e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1 e^{j\Omega} + a_2} \quad (10.29)$$

Dans le cas où la fonction de transfert est décrite avec l'opérateur de retard z^{-1}

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (10.30)$$

on a bien évidemment

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}} \quad (10.31)$$

Les réponses fréquentielles pour $f = 0$, $f = f_e/4$ et $f = f_e/2$ se calculent aisément car on a

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow z = +1 \\ f = \frac{f_e}{4} &\Leftrightarrow \Omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = +j \\ f = \frac{f_e}{2} &\Leftrightarrow \Omega = \pi \Leftrightarrow z = -1 \end{aligned}$$

Ce qui donne pour une cellule biquadratique

$$H(jf)|_{f=0} = H(z)|_{z=+1} = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \quad (10.32)$$

$$H(jf)|_{f=f_e/4} = H(z)|_{z=j} = \frac{b_0 - b_2 + j b_1}{1 - a_2 + j a_1} \quad (10.33)$$

$$H(jf)|_{f=f_e/2} = H(z)|_{z=-1} = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \quad (10.34)$$

10.5.2. Pôles, zéros et réponse fréquentielle

Toute fonction de transfert peut être décrite à l'aide des pôles et zéros qui sont les racines des dénominateur et numérateur :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (10.35)$$

Comme la variable z parcourt le cercle unité de 0 à $\pm\pi$ quand la fréquence varie de 0 à $\pm f_e/2$ (figure 10.3), on voit que la réponse fréquentielle s'affaiblit si la fréquence est proche des zéros car $(z - z_k)$ s'amenuise et qu'elle passe par un maximum lorsque la fréquence se situe aux environs des pôles car $(z - p_k)$ diminue.

La configuration pôles-zéros d'un filtre passe-bande ainsi que sa réponse fréquentielle sont représentées à la figure 10.3. Une bonne interprétation de la signification des pôles et zéros permet ainsi d'évaluer facilement une réponse fréquentielle.

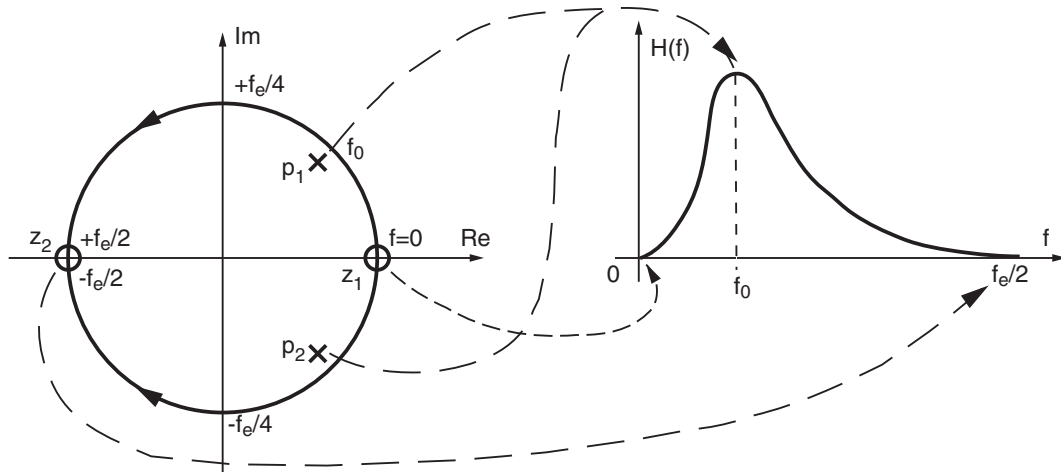


FIGURE 10.3.: Pôles, zéros et réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande

Évaluation d'une réponse fréquentielle

Considérons comme exemple un filtre passe-bande décrit par une fonction de transfert d'ordre 2

$$H(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

et caractérisé par les points suivants.

1. Il ne doit pas laisser passer la fréquence nulle qui se situe en $z = +1$ dans le plan complexe ; on doit donc avoir un zéro en cet endroit, d'où

$$z_1 = +1$$

2. Il doit bloquer les signaux de fréquence $f_e/2$ qui se situe en $z = -1$; on a donc

$$z_2 = -1$$

3. Il doit laisser passer la fréquence centrale f_0 qui correspond à deux pôles situés en

$$p_{1,2} = R e^{\pm j\Omega_0} \quad (10.36)$$

avec la pulsation normalisée $\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_e}$ et $R < 1$ pour que le filtre soit stable.

La fonction de transfert sera donc décrite par

$$\begin{aligned} H(z) &= A \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - R e^{+j\Omega_0})(z - R e^{-j\Omega_0})} \\ &= A \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2R \cos \Omega_0 z + R^2} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, par

$$H(z) = A \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2R \cos \Omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}} \quad (10.37)$$

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

La réponse fréquentielle vaut donc

$$H(j\Omega) = A \frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 - 2R \cos \Omega_0 e^{-j\Omega} + R^2 e^{-j2\Omega}} \quad (10.38)$$

Comme application numérique, considérons le cas particulier où

$$f_0 = f_e/8 \Leftrightarrow \Omega_0 = \pi/4, \quad R = 0.9, \quad A = 1 - R = 0.1$$

Pour un filtre passe-bande, on doit bien évidemment obtenir

$$H(f = 0) = 0, \quad H(f = f_e/2) = 0$$

De plus, avec $\Omega_0 = \pi/4$ et $2\Omega_0 = \pi/2$, il vient

$$\begin{aligned} H(j\Omega_0) &= A \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 - 2R \cos(\pi/4) e^{-j\pi/4} + R^2 e^{-j\pi/2}} \\ &= A \frac{1 + j}{1 - \sqrt{2}R \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - jR^2} \\ &= A \frac{1 + j}{1 - R(1 - j) - jR^2} = A \frac{1 + j}{1 - R + jR - jR^2} \end{aligned}$$

Comme $R = 0.9$ et $A = 1 - R$, on obtien finalement

$$H(jf_0) = (1 - R) \frac{1 + j}{(1 - R)(1 + jR)} = \frac{1 + j}{1 + j0.9} = 1.05 \angle + 0.053 [rad]$$

10.5.3. TFD et réponse fréquentielle

Sachant que les transformations de Fourier directe et inverse d'une suite de valeurs numériques sont définies par :

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad (10.39)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (10.40)$$

il est possible de calculer la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ en transformant de Fourier soit la réponse impulsionnelle $h[n]$, soit l'équation aux différences. Comme illustration, appliquons ces deux approches à un système d'ordre 1.

Système décrit par une réponse impulsionnelle

En transformant de Fourier la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système numérique d'ordre 1,

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad 0 < R < 1$$

on obtient la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ suivante

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A R^n e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A (R e^{-j\Omega})^n \end{aligned}$$

L'observation de ce résultat nous montre que l'on a affaire à une suite géométrique. Se souvenant que la somme d'une suite géométrique infinie de raison r vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (10.41)$$

on peut calculer aisément $H(j\Omega)$:

$$H(j\Omega) = A \frac{1}{1 - R e^{-j\Omega}} \quad \text{si } |R| < 1 \quad (10.42)$$

Système décrit par une équation aux différences

On a vu qu'un système numérique d'ordre 1 peut également être décrit par une équation réursive :

$$y[n] = A x[n] + R y[n - 1]$$

Les propriétés de linéarité et de décalage de la transformation de Fourier permettent d'écrire immédiatement

$$Y(j\Omega) = A X(j\Omega) + R e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

En regroupant les termes communs, puis en effectuant leur rapport, on obtient la fonction de transfert du système ou sa réponse fréquentielle :

$$H(j\Omega) \equiv \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{A}{1 - R e^{-j\Omega}}$$

Comme on pouvait s'y attendre, les deux expressions de la réponse fréquentielle sont identiques ; elles ne dépendent pas de la méthode de calcul utilisée.

Relation avec la transformation en z

Les résultats que nous venons de calculer peuvent également s'obtenir directement à partir des transformées en z des fonctions et signaux considérés en remplaçant l'opérateur d'avance z par son équivalent fréquentiel $e^{j\Omega}$. Ainsi, dans le cas de la réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad \leftrightarrow \quad H(z) = A \frac{z}{z - R}$$

on obtient

$$H(j\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = A \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - R} = A \frac{1}{1 - R e^{-j\Omega}}$$

10.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

Afin d'illustrer le calcul et le traçage de quelques réponses fréquentielles, considérons quelques exemples de systèmes numériques décrits soit par leur réponse impulsionnelle, soit par leur équation récursive.

10.6.1. Moyenneur non causal

Un moyenneur non causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = \frac{1}{5} \left(x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2] \right) \quad (10.43)$$

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.44)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 10.4.

Utilisant la transformation en z , on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$H(z) = \frac{1}{5} (z^{-2} + z^{-1} + z^0 + z^1 + z^2)$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5} (e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega} + e^{-j0} + e^{+j\Omega} + e^{+j2\Omega})$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5} \left(1 + 2 \cos(\Omega) + 2 \cos(2\Omega) \right) \quad (10.45)$$

On constate que la réponse fréquentielle ainsi obtenue est réelle; ceci n'est pas surprenant si on se souvient que la réponse impulsionnelle $h[n]$ considérée est paire. Le traçage de la réponse fréquentielle de ce moyenneur (figure 10.5) montre qu'il agit comme un filtre passe-bas et qu'il annule même la sortie pour certaines pulsations.

10.6.2. Moyenneur causal

Un moyenneur causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y[n] = \frac{1}{5} \left(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] \right) \quad (10.46)$$

10.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

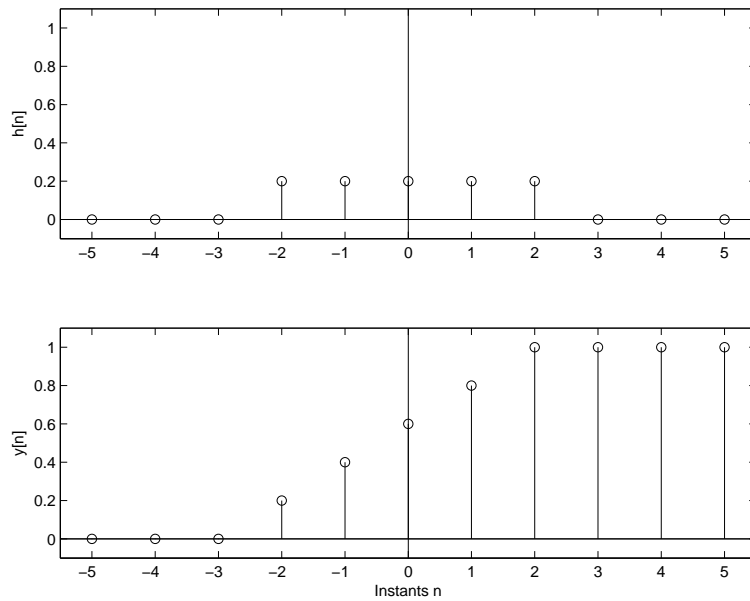


FIGURE 10.4.: Réponses impulsionnelle et indicelle d'un moyeneur non causal d'ordre 5

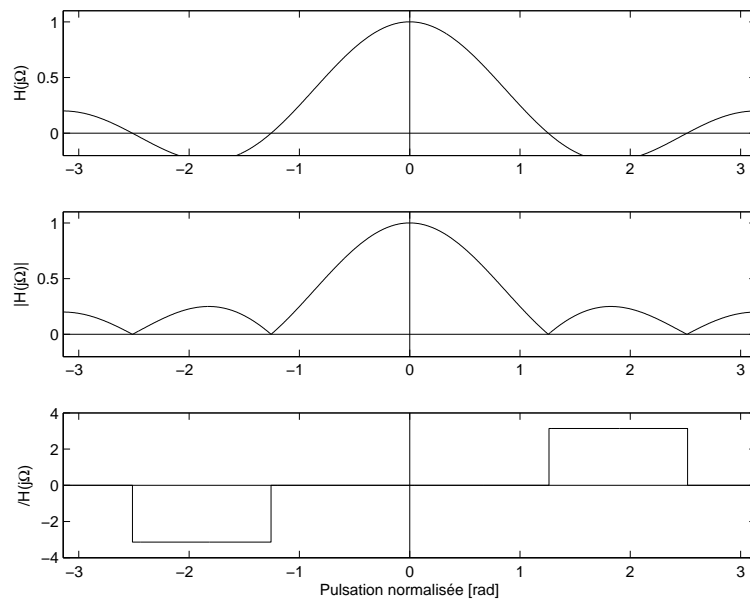


FIGURE 10.5.: Réponse fréquentielle d'un moyeneur non causal d'ordre 5

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.47)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 10.4 et on constate que, par rapport au moyenneur non causal, ces réponses temporelles sont simplement retardées de deux échantillons.

Utilisant la transformation en z , on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{5} (z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}) \\ &= \frac{z^{-2}}{5} (z^2 + z^1 + z^0 + z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned}$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5} (e^{+j2\Omega} + e^{+j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega})$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5} \left(1 + 2 \cos(\Omega) + 2 \cos(2\Omega) \right) \quad (10.48)$$

On constate ainsi que, à un phaseur près, la réponse fréquentielle obtenue est la même que précédemment ; ce qui n'est pas surprenant puisque le moyenneur causal n'est qu'une version translatée du moyenneur non causal. Les modules des deux réponses fréquentielles sont donc les mêmes ; seules les phases diffèrent (figure 10.7). On notera que la phase ainsi obtenue est linéaire par rapport à la fréquence ; ce qui n'est autre que l'effet de la translation temporelle.

10.6.3. Filtre passe-bas d'ordre 1

On a vu plus haut qu'un filtre passe-bas numérique d'ordre 1 était décrite par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad R < 1$$

ou par sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{A}{1 - R z^{-1}}$$

On en a déduit que sa réponse fréquentielle vaut :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R e^{-j\Omega}} \quad (10.49)$$

10.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

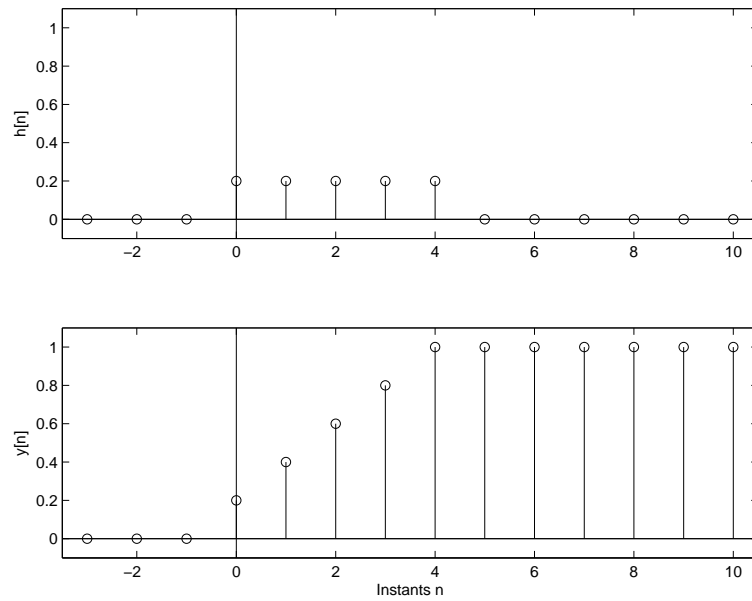


FIGURE 10.6.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un moyeneur causal d'ordre 5

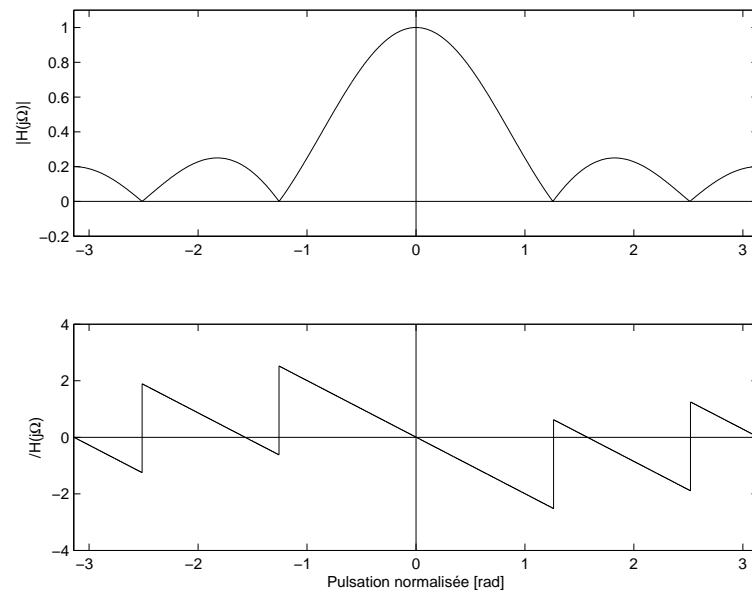


FIGURE 10.7.: Réponse fréquentielle d'un moyeneur causal d'ordre 5

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

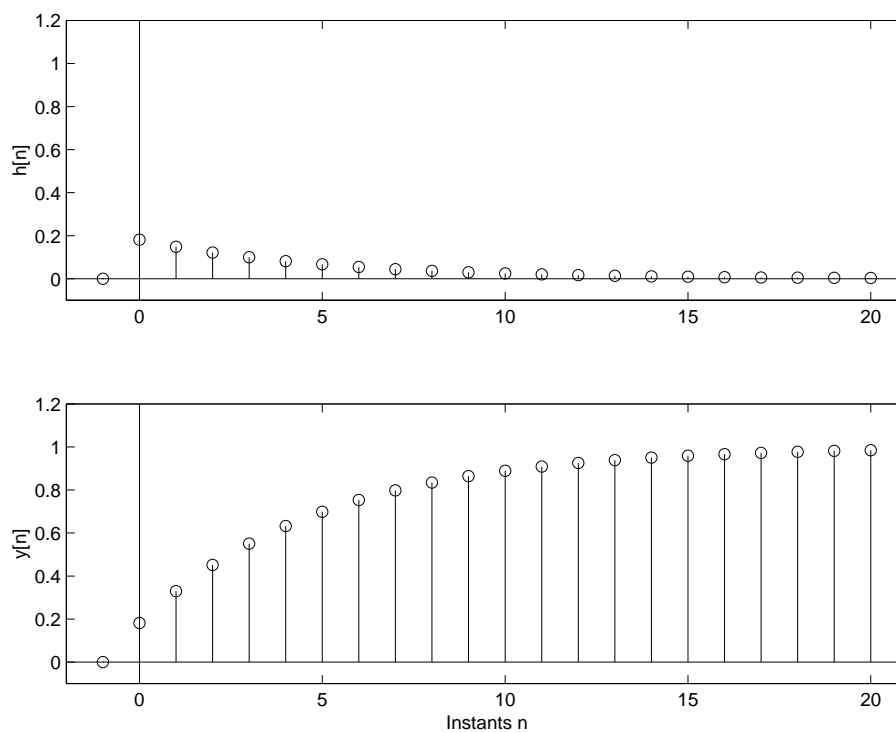


FIGURE 10.8.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

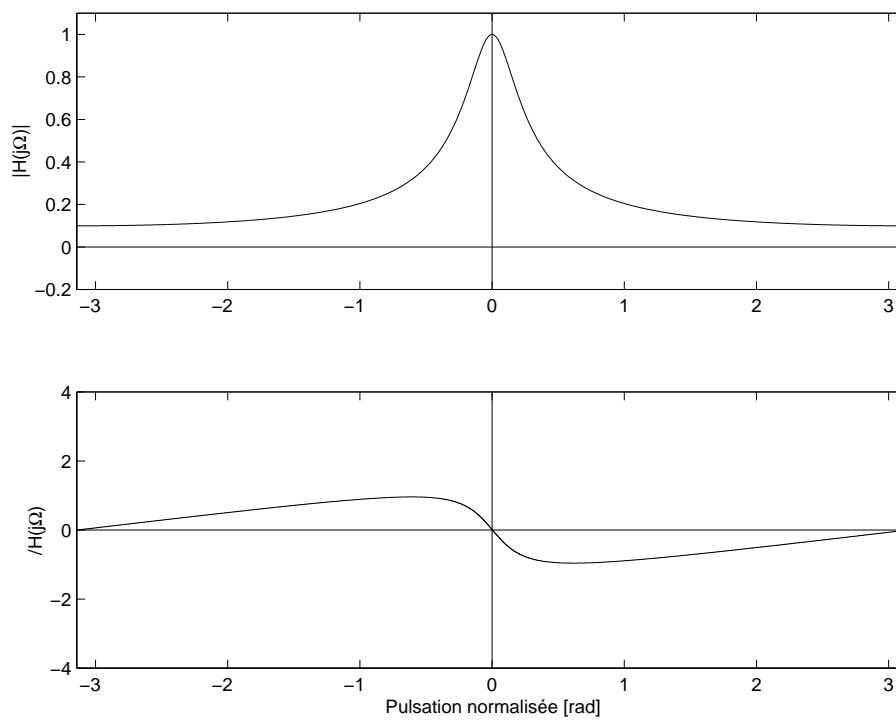


FIGURE 10.9.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

10.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = 1 - R \quad (10.50)$$

Cette fonction à valeur complexe peut encore être décrite par :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R \cos(\Omega) + jR \sin(\Omega)} \quad (10.51)$$

Ce qui permet de calculer le module et la phase de la réponse fréquentielle :

$$|H(j\Omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1 - R \cos(\Omega))^2 + (R \sin(\Omega))^2}} \quad (10.52)$$

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan\left(\frac{R \sin(\Omega)}{1 - R \cos(\Omega)}\right) \quad (10.53)$$

Les réponses temporelles et fréquentielles sont présentées dans les figures 10.8 et 10.9.

10.6.4. Filtre passe-bas d'ordre 2

Prenons, comme nouvel exemple, un filtre passe-bas numérique d'ordre deux avec résonance décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \sin(n \Omega_0) \varepsilon[n] \quad R < 1 \quad (10.54)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont représentées dans la figure 10.10.

La transformée en z de $h[n]$ (voir tableau 10.1) donne la fonction de transfert

$$H(z) = A \frac{R \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2R \cos \Omega_0 z + R^2} = A \frac{R \sin \Omega_0 z^{-1}}{1 - 2R \cos \Omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

dont on tire la réponses fréquentielle

$$H(j\Omega) = A \frac{R \sin(\Omega_0) e^{-j\Omega}}{1 - 2R \cos(\Omega_0) e^{-j\Omega} + R^2 e^{-j2\Omega}} \quad (10.55)$$

qui pour $\Omega = 0$ donne un gain

$$H(j0) = A \frac{R \sin(\Omega_0)}{1 - 2R \cos(\Omega_0) + R^2}$$

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = \frac{1 - 2R \cos(\Omega_0) + R^2}{R \sin(\Omega_0)} \quad (10.56)$$

Il est également possible de retrouver cette réponse fréquentielle à partir de la donnée des pôles du filtre. Cette approche, très simple, est laissée comme exercice.

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

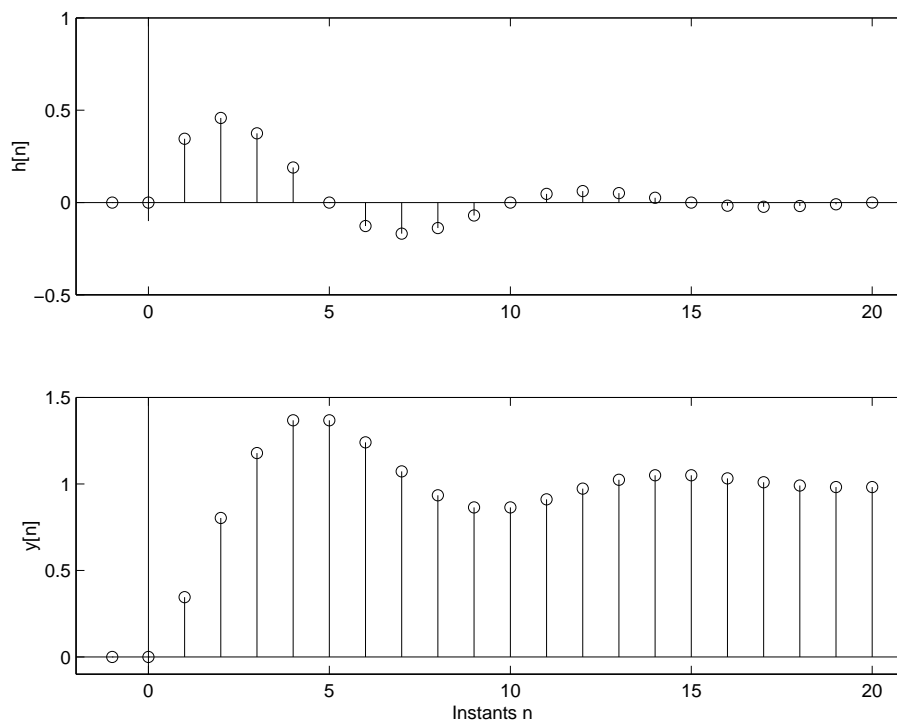


FIGURE 10.10.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

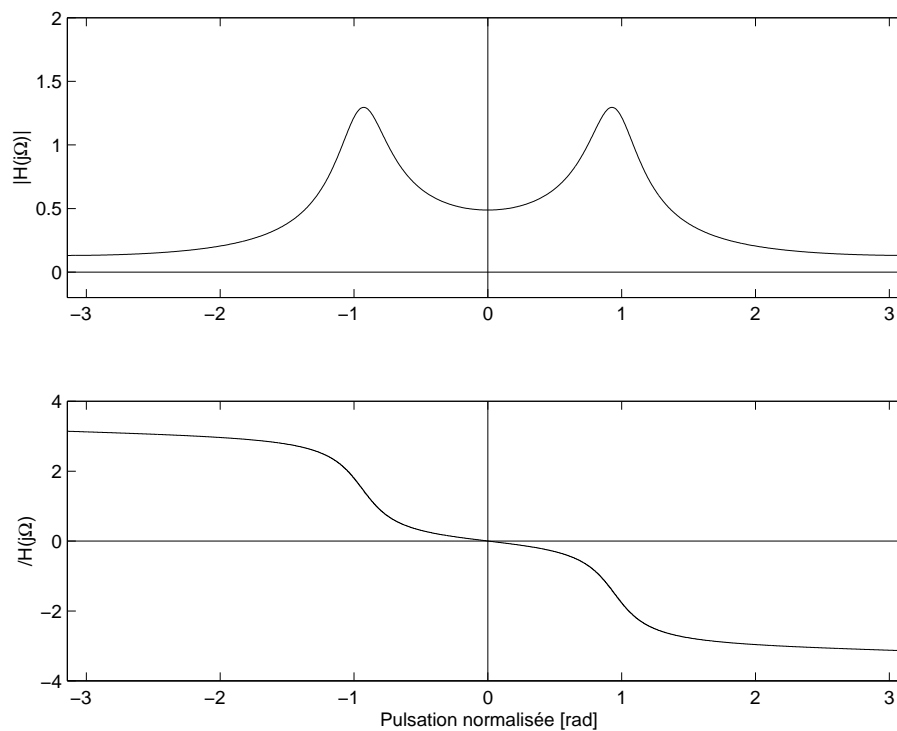


FIGURE 10.11.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

10.7. Analyse et réalisation d'un filtre

Dans cette section, on souhaite illustrer les différentes étapes à parcourir pour analyser et réaliser un filtre numérique. Pour cela, considérons un filtre décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0.21 \frac{z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

et étudions ses réponses temporelle et fréquentielle.

10.7.1. Calcul de la réponse temporelle du filtre

Nous avons vu que le comportement dynamique d'un filtre numérique est déterminé par les instants caractéristiques K_c et K_p et que leurs valeurs se calculent à partir des pôles de la fonction de transfert $H(z)$.

Pôles et réponse temporelle

En multipliant numérateur et dénominateur de $H(z)$ par z^2 , on obtient la forme canonique nécessaire pour l'analyse :

$$H(z) = 0.21 \frac{z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

On calcule aisément les pôles de cette fonction de transfert qui valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(1.6 \pm \sqrt{1.6^2 - 4 \cdot 0.81} \right) \\ &= 0.8 \pm j 0.412 \\ &= 0.9 e^{\pm j 0.476} \end{aligned}$$

Comme ces pôles sont complexes et de module inférieur à 1, on en déduit que la réponse transitoire, c'est-à-dire la solution homogène de l'équation aux différences, comportera une oscillation amortie du type :

$$y_h[n] = C R^n \cos(n\Omega + \alpha)$$

ce qui, en tenant compte des valeurs numériques, donne :

$$y_h[n] = C 0.9^n \cos(0.476 n + \alpha)$$

Instants caractéristiques

La réponse étant oscillante, il faut rechercher la constante de temps K_c et la période d'oscillation K_p :

$$K_c = \frac{1}{|\ln(0.9)|} = 9.5 \quad K_p = \frac{2\pi}{0.476} = 13.2$$

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

On aura donc une durée du régime transitoire valant

$$K_{tr} \simeq 5 K_c = 47.5 \quad \text{instants}$$

et un nombre d'oscillations visibles d'environ

$$N_{osc} \simeq \frac{K_{tr}}{K_p} \simeq 3.6 \quad \text{oscillations}$$

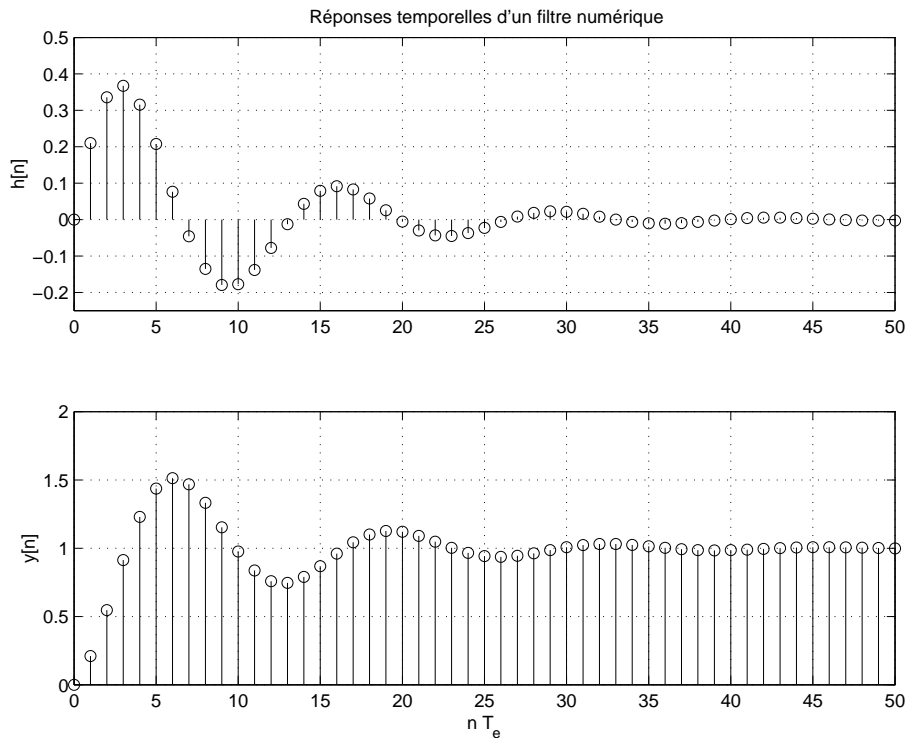


FIGURE 10.12.: Réponses impulsionnelle et indicielle du filtre

Évaluation de la réponse indicielle

À un saut unité dont l'image est

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

correspond la réponse indicielle suivante

$$Y(z) = X(z) H(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

Dans cette réponse, on retrouve naturellement les deux pôles ($p_{1,2} = 0.9 e^{\pm j 0.476}$) dus au filtre, plus un pôle ($p_3 = +1$) dû au saut unité appliqué à l'entrée. L'évolution

temporelle sera donc celle décrite précédemment, à laquelle on doit ajouter un terme constant A correspondant au pôle p_3 :

$$y[n] = A + C 0.9^n \cos(0.476 n + \alpha)$$

Ces informations peuvent être complétées par les valeurs initiale et finale que l'on calcule en utilisant le théorème des valeurs limites :

$$y[0] = Y(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

$$y[\infty] = (z - 1) Y(z)|_{z=1} = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = 1$$

La figure 10.12 illustre les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre. On remarquera que toutes les valeurs calculées ci-dessus sont confirmées par ces graphes.

10.7.2. Calcul de la réponse fréquentielle

Partant de la fonction de transfert du filtre

$$H(z) = \frac{0.21 z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

on obtient l'expression de la réponse fréquentielle en remplaçant la variable z par le phaseur $e^{+j\Omega}$; il vient alors :

$$H(j\Omega) = \frac{0.21 e^{-j\Omega}}{1 - 1.6 e^{-j\Omega} + 0.81 e^{-j2\Omega}} = \frac{0.21 e^{+j\Omega}}{e^{+j2\Omega} - 1.6 e^{+j\Omega} + 0.81}$$

Quelques valeurs particulières

On a vu plus haut que

$$\begin{aligned} H(jf)|_{f=0} &= H(z)|_{z=+1} \\ H(jf)|_{f=f_e/4} &= H(z)|_{z=+j} \\ H(jf)|_{f=f_e/2} &= H(z)|_{z=-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne dans notre cas

$$H(j0) = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = +1 = 1 \angle 0$$

$$H(jf_e/4) = \frac{+j 0.21}{-1 + 0.81 - j 1.6} = -0.129 + j 0.015 = 0.130 \angle - 3.02$$

$$H(jf_e/2) = \frac{-0.21}{1 + 1.6 + 0.81} = -0.06 = 0.06 \angle - \pi$$

Traçage de la réponse fréquentielle

Le calcul et le traçage de cette réponse fréquentielle se fait avantageusement avec l'aide de Matlab. Dans ce cas, il faut décrire la fonction de transfert avec l'opérateur d'avance z

$$H(z) = \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

Le calcul et traçage se fait ensuite avec les commandes suivantes :

```
% donnees:
num = [0, 0.21, 0];
den = [1, -1.6, 0.81];
% reponse frequenteielle
fe = 1; Npoints = 500;
[Hjf, ff] = freqz(num,den,Npoints,fe);
% tracage
figure;
subplot(2,1,1);
plot(ff, 20*log10(abs(Hjf))); grid on;
title('Réponse fréquentielle d'un filtre numérique');
ylabel('|H(jf)|');
axis([0,0.5,-30,+10]);
subplot(2,1,2);
plot(ff,angle(Hjf)*180/pi); grid on;
ylabel('/H(jf)');
xlabel('f / f_e');
```

La figure 10.13 présente le module et la phase de la réponse fréquentielle du filtre. On y retrouve bien les trois valeurs particulières

$$H(0) = 1 \angle 0$$

$$H(jf_e/4) = 0.130 \angle -3.02 = -17.7 \text{ dB} \angle -3.02$$

$$H(f_e/2) = 0.06 \angle -\pi = -24 \text{ dB} \angle -\pi$$

10.7.3. Comment réaliser ce filtre ?

Une fois le comportement du filtre analysé et vérifié, il reste à le réaliser. Pour cela, on plantera l'équation aux différences correspondant au filtre désiré dans un processeur numérique. Puis on devra bien entendu le relier au monde analogique à l'aide des convertisseurs AN et NA et des filtres d'antirepliement (FAR) et de lissage (FL) (figure 10.14).

L'équation aux différences du filtre est déduite directement de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.21 z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

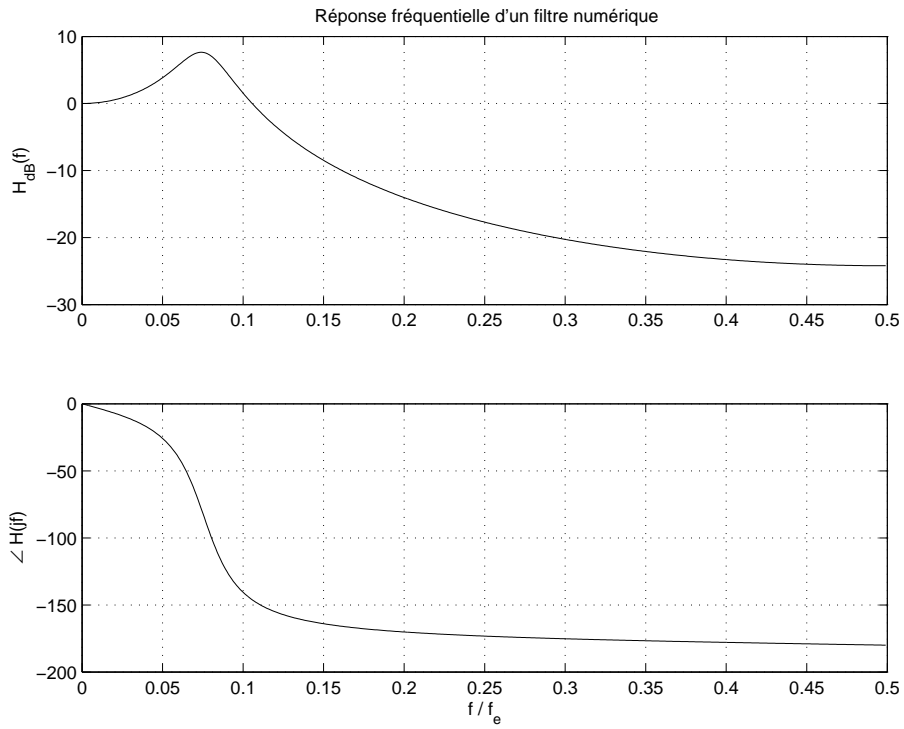


FIGURE 10.13.: Réponse fréquentielle du filtre

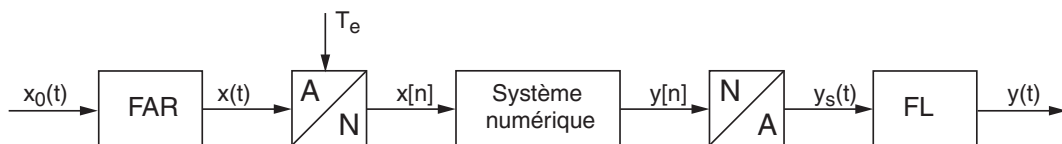


FIGURE 10.14.: Schéma bloc d'un filtre numérique

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

En effet, les produits croisés de cette équation donnent :

$$Y(z) - 1.6 z^{-1} Y(z) + 0.81 z^{-2} Y(z) = 0.21 z^{-1} X(z)$$

Ce qui, par transformation inverse, correspond à l'équation

$$y[n] - 1.6 y[n - 1] + 0.81 y[n - 2] = 0.21 x[n - 1]$$

Algorithmiquement, cette équation s'écrit plutôt sous la forme suivante

$$y[n] = 0.21 x[n - 1] + 1.6 y[n - 1] - 0.81 y[n - 2]$$

C'est cette équation aux différences qui sera implantée dans le processeur et exécutée à chaque nouvel instant d'échantillonnage T_e . Le code réalisant ce filtre pourrait s'écrire comme suit :

```
% initialisation des constantes
b0 = 0.0; b1 = +0.21; b2 = 0.0;
a1 = -1.6; a2 = +0.81;
% initialisation des variables
xn1 = 0.0; xn2 = 0.0; % valeurs anciennes de x[n]
yn1 = 0.0; yn2 = 0.0; % valeurs anciennes de y[n]

% operation de filtrage (xn0, yn0: valeurs actuelles)
repeat
  xn0 = AnalogInput;
  yn0 = b0*xn0 + b1*xn1 + b2*xn2 - a1*yn1 - a2*yn2;
  AnalogOutput(yn0);
  % mise a jour des 2 piles xn et yn
  yn2 = yn1; yn1 = yn0;
  xn2 = xn1; xn1 = xn0;
until stop;
```

10.8. Classification des systèmes numériques

Au travers des sections précédentes, nous avons vu différentes formes de représentation des systèmes numériques : équations aux différences, schémas fonctionnels et fonctions de transfert. Les divers exemples ont permis de montrer que la réponse d'un système peut se calculer en prenant en compte le signal d'entrée seulement ou les signaux d'entrée et de sortie simultanément.

De ces deux possibilités découle une classification des systèmes qu'il est important de connaître. Ces deux classes de représentations des systèmes linéaires sont souvent désignées avec des acronymes anglo-saxons qui seront utilisés par la suite.

10.8.1. Systèmes non récurrents (dits RIF, FIR ou MA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal non récurrent d'ordre N se calcule uniquement à partir du signal d'entrée $x[n]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1a.

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_N x[n-N] \quad (10.57)$$

On peut remarquer que sa réponse impulsionnelle correspond aux coefficients b_k ; elle est donc de longueur finie N . Ainsi le calcul de $y[n]$ revient-il à convoluer le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle $h[k] \equiv b_k$ du système linéaire. On peut également observer que ce système effectue une pondération des valeurs du signal d'entrée et que cela correspond à une moyenne glissante (moving average).

Ces systèmes sont donc désignés avec l'acronyme *RIF* (Réponse Impulsionnelle Finie) ou *FIR* (Finite Impulse Response) ou *MA* (Moving Average) et leur fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N} \quad (10.58)$$

De par leur structure, les systèmes FIR sont toujours stables, mais ils demandent passablement de temps de calcul car la longueur de la réponse impulsionnelle d'un tel système est généralement très élevée ($N > 100$).

10.8.2. Systèmes récurrents (dits RII, IIR ou ARMA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal récurrent d'ordre N se calcule à partir du signal d'entrée $x[n]$ et des valeurs précédentes de la sortie $y[n-k]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1b.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (10.59)$$

On peut remarquer que ces systèmes ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leur fonction de transfert

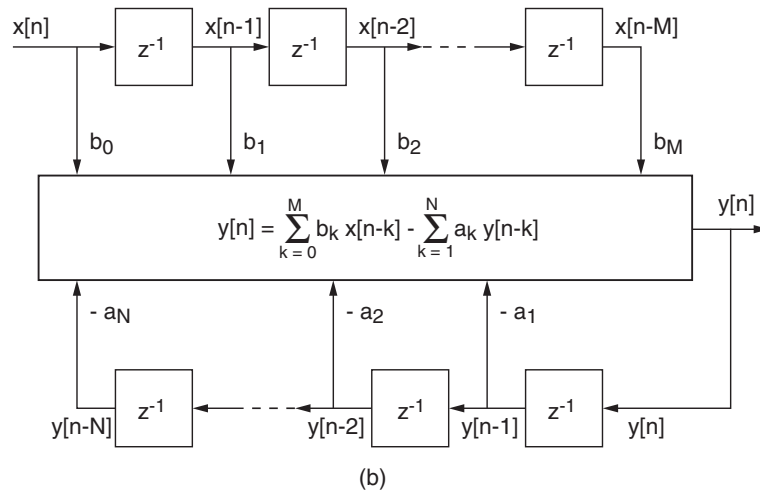
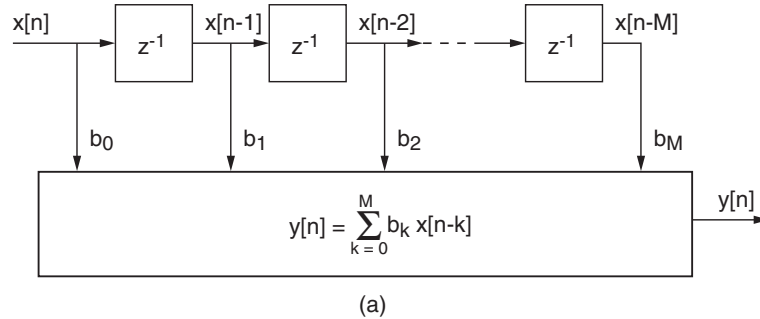
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (10.60)$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette fonction de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie *RII* ou *IIR* (Infinite Impulse Response) ou Auto Régressive (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (Moving Average MA). D'où l'appellation *ARMA* (Auto Régressive and Moving Average).

Généralement, l'ordre d'un système IIR est peu élevé ($N = 1 \dots 10$) et il est réalisé en plaçant en série des cellules biquadratiques (cellules IIR d'ordre 2). Il est donc très efficace en temps de calcul mais, de par sa structure récurrente, il peut devenir instable.

10.8.3. Caractéristiques des filtres FIR et IIR

Les qualités (indiquées en gras) et les défauts des filtres FIR et IIR sont présentés dans le tableau de la figure 12.1.



Caractéristiques	Filtres FIR ou MA	Filtres IIR ou ARMA
sélectivité	faible	élevée
ordre	élevé	faible
nombre d'opérations	élevé	faible
mémoire nécessaire	élevée	faible
temps de propagation constant (phase linéaire)	naturellement réalisable	impossible au sens strict
stabilité	absolue	limitée
nombre de bits nécessaires	raisonnable	élevé
précision des coefficients	raisonnable	élevée
cycles limites	aucun	présents
filtres adaptatifs	possibles	difficiles

FIGURE 10.15.: Schémas fonctionnels et caractéristiques des filtres FIR et IIR

10.9. Exercices

SNT 1 Considérant les systèmes numériques suivants

$$y_1[n] = x[n] + x[n-4] + x[n-8]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^6 x[n-k]$$

$$y_3[n] = n \sum_{k=0}^6 x[n-k]$$

$$y_4[n] = x[n] + y_4[n-1] - 0.5y_4[n-2] \quad \text{avec } y_4[-2] = y_4[-1] = 0$$

dessinez leur schéma fonctionnel ainsi que leurs réponses impulsionnelle et indicielle.

SNT 2 Considérant le schéma fonctionnel d'un filtre numérique (figure SNT 2),

1. Écrivez son équation aux différences et sa réponse impulsionnelle.
2. Dessinez les réponses impulsionnelle et indicielle.
3. Ce filtre est-il récursif? Quelle est son action?

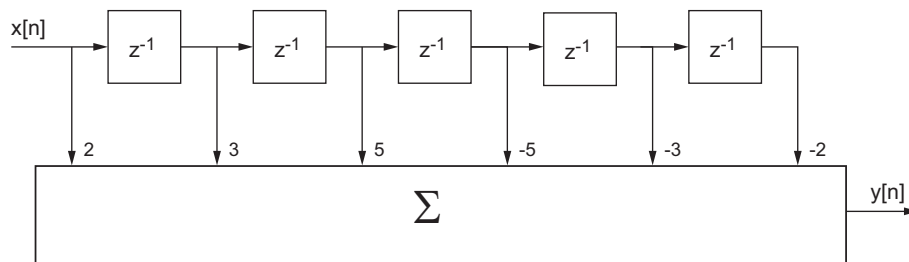


FIGURE 10.16.: Ex. SNT 2

SNT 3 Écrivez l'équation aux différences d'un moyennneur causal d'ordre 5 et dessinez sa réponse $y[n]$ au signal $x[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-10]$.

SNT 4 On souhaite réaliser l'équivalent numérique d'un filtre analogique passe-bas d'ordre 1. Pour cela :

1. Considérez l'équation différentielle du filtre analogique

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

et remplacez la dérivée par une différentielle finie pour obtenir l'équation aux différences du filtre numérique.

2. Utilisez vos résultats et calculez les coefficients du filtre numérique dont la fréquence de coupure se situe aux environs de 1kHz alors que le signal d'entrée est échantillonné à $f_e = 10$ kHz. Dessinez son schéma fonctionnel.

10. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

3. Calculez les premiers points de sa réponse indicielle et comparez à celle du filtre analogique.
4. Que valent en particulier $y[0]$ et $y[\infty]$? Comparez à $y(0)$ et $y(\infty)$. Justifiez les différences. Que se passe-t-il si on augmente la fréquence d'échantillonnage?

SNT 5 On considère deux filtres numériques décrits par

$$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

Que valent $y[0]$ et $y[\infty]$ si $x[n] = \epsilon[n]$? Quelle est la fonction de chaque filtre?

SNT 6 Considérant six systèmes numériques linéaires décrits par leurs équations aux différences :

1	$y[n] = x[n] + 0.8y[n-1]$
2	$y[n] = x[n] - 0.8y[n-1]$
3	$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1]$
4	$y[n] = x[n] - 1.2y[n-1]$
5	$y[n] = x[n] + 1y[n-1] - 0.8y[n-2]$
6	$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.32y[n-2]$

1. Calculez et dessinez leurs racines dans le plan complexe; où se situent-elles par rapport au cercle unité?
2. Calculez les instants caractéristiques K_c , K_p et N_{osc} pour chaque cas.
3. Donnez l'expression générale de leur réponse transitoire et esquissez leur réponse indicielle.

SNT 7 Calculez la réponse indicielle d'un système numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.6y[n-1] - 0.75y[n-2] \quad \text{avec} \quad y[0] = y[-1] = 0$$

En particulier, que valent $y[0]$, $y[\infty]$, K_{trans} et N_{osc} ?

SNTZ 1 Calculez la transformée en z de la suite suivante

$$y[n] = \{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \dots\}, \quad n \geq 0$$

SNTZ 2 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$.
2. Calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles.
3. Admettant $x[n] = \epsilon[n]$, esquissez $y[n]$ après avoir calculé $y[0]$ et $y[\infty]$.

SNTZ 3 Répondez aux questions de l'exercice précédent pour

$$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.75y[n-2]$$

SNTZ 4 Considérant la réponse indicielle d'un système décrit par

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1.6z + 0.81}$$

calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles ainsi que les valeurs $y[0]$ et $y[\infty]$. Esquissez $y[n]$.

SNTZ 5 Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est décrite par

$$h[n] = \exp\left(-\frac{nT_e}{\tau}\right) \sin(n2\pi f_0 T_e) \epsilon(n)$$

lorsque $T_e = 1$ msec, $\tau = 10$ msec, $f_0 = 100$ Hz?

Rép. :

$$h[n] = R^n \sin(n\Omega_0) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{0.53z}{z^2 - 1.46z + 0.82}$$

SNF 1 Considérant un moyennneur pondéré décrit par l'équation aux différences suivante qui accorde plus d'importance aux valeurs récentes

$$y[n] = \frac{1}{6} (3x[n] + 2x[n-1] + x[n-2])$$

1. Dessinez son schéma ainsi que ses réponses impulsionnelles et indicielle.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

SNF 2 Un filtre passe-bas d'ordre 1 est décrit par

$$y[n] = x[n-1] + 0.9y[n-1]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ lorsque $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

SNF 3 Considérant un filtre d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = R \sin(\Omega_0) x[n-1] + 2R \cos(\Omega_0) y[n-1] - R^2 y[n-2]$$

avec $R = 0.8$ et $\Omega_0 = \pi/4$.

1. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$. Quel type de filtre est ainsi réalisé ?

SNF 4 Un filtre numérique biquadratique est décrit par l'équation aux différences suivante

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Quelles conditions faut-il satisfaire pour que le filtre soit :
 - a) un filtre passe-bas de gain unité ?
 - b) un filtre passe-haut de gain unité ?

SNF 5 On applique un signal sinusoïdal permanent $x(t) = 5 \sin(2\pi \text{kHz} t)$ à un filtre numérique décrit par $y[n] = 0.1 x[n] + 0.9 y[n-1]$. Sachant que $f_e = 10 \text{kHz}$, que vaut le signal analogique $y(t)$ obtenu après conversion N-A ?

SNF 6 Considérant un moyenneur non causal centré d'ordre 5 :

1. Écrivez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ et écrivez-la à l'aide de fonctions en cosinus seulement.
3. Que valent $H(0)$ et $H(\pi)$? Y a-t-il des pulsations pour lesquelles $H(j\Omega)$ s'anule ?

SNF 7 Calculez puis esquissez les réponses indicielle $y[n]$ et fréquentielle $H(j\Omega)$ d'un filtre décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A \{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \dots\}, \quad n \geq 0, \quad A = 1$$

Que doit valoir A pour que le gain de ce filtre soit égal à 1 ?

SNF 8 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Recherchez les valeurs numériques de $H(j\Omega)$ lorsque $f = 0, f_e/4, f_e/2$.
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$.

SNF 9 Répétez l'exercice précédent pour un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

SNF 10 Considérant le schéma fonctionnel du filtre numérique de l'exercice SNT 2 pour lequel la réponse impulsionnelle vaut

$$h[n] = \{+2, +3, +5, -5, -3, -2, 0, 0, \dots\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Écrivez cette dernière avec un phaseur et une somme de sinus.
3. Écrivez le module et la phase de $H(j\Omega)$. Observez- alors que la phase est linéaire ; expliquez a posteriori pourquoi cette phase doit être linéaire.
4. Esquissez le module et la phase de $H(j\Omega)$ après avoir calculé les valeurs particulières pour $f = 0, f_e/4, f_e/2, 3f_e/4, f_e$.

Quatrième partie .

**Analyse et Synthèse des Filtres
Numériques**

11. Éléments de filtrage analogique

11.1. Introduction

Le filtrage est l'opération qui consiste à modifier les composantes spectrales d'un signal. Le filtre est un circuit qui réalise cette opération. Les intervalles de fréquence où les composants du signal sont transmises sont appelées bandes passantes; les intervalles où les signaux sont bloqués sont désignés sous le nom de bandes d'arrêt ou d'atténuation.

11.1.1. Filtre idéal

Un filtre idéal est caractérisé par :

1. une réponse fréquentielle dont le module vaut 1 dans les bandes passantes;
2. une réponse fréquentielle dont le module vaut 0 dans les bandes d'arrêt;
3. un temps de propagation t_p qui est le même pour toutes les composantes spectrales. Ce temps de propagation constant est équivalent à une réponse fréquentielle à phase linéaire.

Ce type de filtres, purement théorique et bien entendu impossible à réaliser pratiquement, est celui vers lequel on tend avec un filtre réel. Les réponses fréquentielles des 4 filtres idéaux de base sont représentés à la figure 11.1.

11.1.2. Formes canoniques

Les filtres réels sont généralement représentés par des fonctions de transfert $H(s)$ dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes en s . Ces polynômes sont ordonnés de manière croissante (forme de Bode) ou dans l'ordre décroissant (forme de Laplace). Dans chaque cas, le premier coefficient de ces polynômes doit être égal à un.

Afin de faciliter l'analyse, le tracé des réponses fréquentielles et la réalisation des filtres, ces polynômes sont généralement décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2. Ces facteurs simples font intervenir une pulsation caractéristique ω_0 et, pour ceux d'ordre 2, un facteur de qualité Q_0 ou, son inverse, le coefficient d'amortissement $\zeta = 1/(2Q_0)$.

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

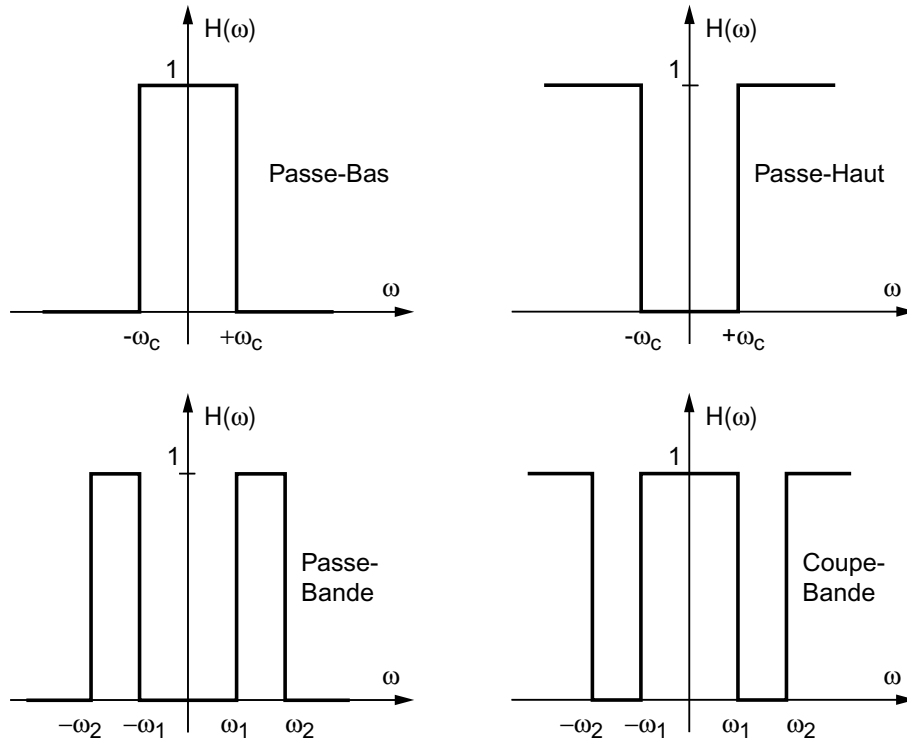


FIGURE 11.1.: Réponses fréquentielles des filtres idéaux

L'ensemble des possibilités de description des filtres se réduit donc aux facteurs simples suivants représentés sous la forme de Bode :

$$\frac{s}{\omega_1} \quad 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (11.1)$$

$$1 + \frac{s}{\omega_1} \quad 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

On y trouve :

- les pulsations caractéristiques ω_1 et ω_0 ;
- le facteur de qualité Q_0 ;
- le coefficient d'amortissement $\zeta = 1/(2Q_0)$.

Voici un exemple d'écriture de fonctions de transfert dans les formes de Bode et de Laplace :

$$H(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{(s + \omega_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

11.1.3. Formes normalisées

Il est d'usage de décrire ces fonctions de transfert à l'aide de polynômes normalisés dans lesquels les pulsations caractéristiques sont unitaires. Les polynômes normali-

sés d'ordre 1 s'écrivent alors sous la forme :

$$P_1(s) = s + 1 \quad (11.2)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_1(s) = \begin{cases} s + \omega_1 \\ 1 + \frac{s}{\omega_1} \end{cases} \quad (11.3)$$

Les polynômes normalisés d'ordre 2 s'écrivent sous la forme :

$$P_2(s) = s^2 + 2\zeta s + 1 \quad (11.4)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_2(s) = \begin{cases} s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \\ 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2} \end{cases} \quad (11.5)$$

11.1.4. Filtrés d'ordre 2

Les filtres fondamentaux sont du type passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. A ceux-ci, on peut en ajouter beaucoup d'autres tels que, par exemple, les filtres correcteurs d'amplitude et les filtres déphaseurs.

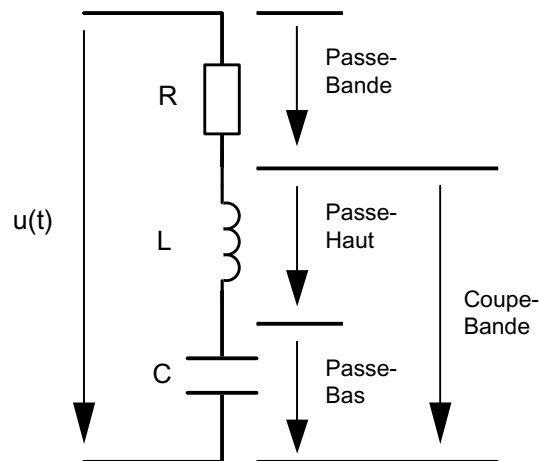


FIGURE 11.2.: Filtrés d'ordre 2 réalisé avec un circuit série RLC

La figure 11.2 montre comment le circuit RLC permet de réaliser les 4 filtres de base. Suivant l'endroit où l'on recueille la tension de sortie, on trouve en effet :

- le filtre passe-bas aux bornes de la capacité

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.6)$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

– le filtre passe-bande aux bornes de la résistance

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{2\zeta (s/\omega_0)}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.7)$$

– le filtre passe-haut aux bornes de l'inductance

$$H_{PH}(s) = \frac{(s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.8)$$

– le réjecteur de bande aux bornes de l'inductance et de la capacité

$$H_{R\Delta}(s) = \frac{1 + (s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.9)$$

Dans le cas du filtre passe-bande d'ordre 2, on n'oubliera pas les relations importantes suivantes :

$$\Delta\omega \equiv \omega_s - \omega_i = \frac{\omega_0}{Q_0}, \quad \omega_0^2 = \omega_s \cdot \omega_i \quad (11.10)$$

où ω_i , ω_s , $\Delta\omega$ sont, respectivement, les pulsations de coupure inférieure, supérieure et la bande passante du filtre.

11.2. Filtres optimums

11.2.1. Gabarit

Contrairement au filtre idéal, un filtre réel possède une bande de transition entre les bandes passantes et d'arrêt et les spécifications du filtre sont généralement données à l'aide d'un gabarit (figure 11.3). Celui-ci précise les bandes passantes, bandes de transition et bandes d'arrêt souhaitées.

A la donnée du gabarit, on peut ajouter des spécifications telles que

- l'amplitude de l'ondulation acceptée dans les bandes passantes et/ou d'arrêt
- l'uniformité du temps de propagation dans la bande passante (phase linéaire).

Il est important de relever ici que les gabarits ne sont pas toujours aussi simples que celui de la figure 11.3. Pour exemple, vous trouverez à la figure 11.4 le gabarit que doivent respecter les transmissions téléphoniques aux USA.

11.2.2. Approximations

Suivant le cahier des charges donné, la réalisation d'un filtre passe-bas conduit à des fonctions de transfert dont les dénominateurs sont des polynômes qui optimisent au mieux les contraintes demandées. Ces polynômes, appelés polynômes d'approximation, réalisent des filtres caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

- une bande passante plate au maximum pour les **filtres de Butterworth** ;
- un temps de propagation pratiquement uniforme (ou une phase linéaire) dans la bande passante pour les **filtres de Bessel** ;

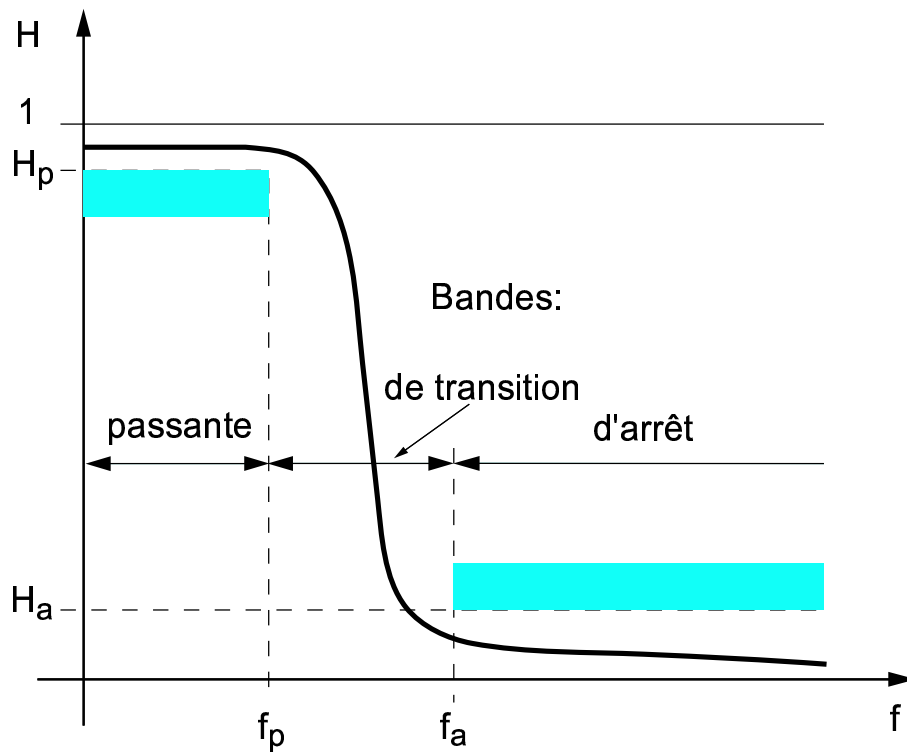


FIGURE 11.3.: Gabarit pour un filtre passe-bas

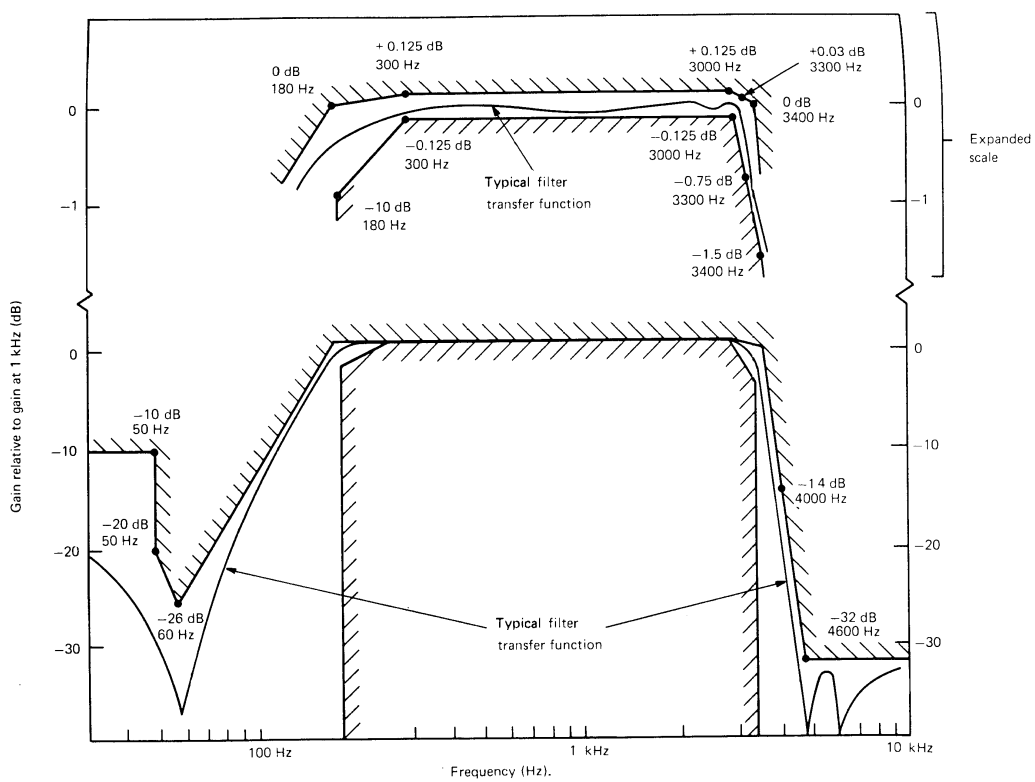


FIGURE 11.4.: Gabarit de transmission téléphonique (Copyright 1975, ATT Company)

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

- une bande de transition étroite obtenue au dépend d'une ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande passante pour les **filtres de Tchebycheff de type I**.

Les filtres ci-dessus sont des filtres dits tout pôles pour lesquels le numérateur est d'ordre 0. Leurs fonctions de transfert s'écrivent alors sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \quad (11.11)$$

D'autres approximations de filtres réels existent comme par exemple :

- les **filtres de Tchebycheff de type II** qui n'ont pas d'ondulations dans la bande passante mais en possèdent dans la bande d'arrêt ;
- les **filtres elliptiques** pour lesquels on accepte des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt.

Les fonctions de transfert de ces filtres sont alors décrites par un rapport de deux polynômes ;

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (11.12)$$

Suivant la nature du filtre les performances sont sensiblement différentes ; elles sont présentées dans le tableau 11.1.

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible

TABLE 11.1.: Caractéristiques selon le type de filtres [4]

11.2.3. Temps de propagation

On sait que le déphasage est une mesure du décalage temporel t_d entre deux signaux périodiques de même nature et que l'on a la relation suivante :

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t_d}{T}$$

De manière équivalente, cela s'écrit

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{T} t_d = \omega t_d \quad \Leftrightarrow \quad t_d = \frac{\varphi(\omega)}{\omega} = T \frac{\varphi(\omega)}{2\pi}$$

Lorsque l'on s'intéresse au *temps de propagation* t_p d'un filtre réel, celui-ci est négatif et on le définit comme suit

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (11.13)$$

Sa valeur est généralement donnée pour les basses fréquences

$$t_p = -\left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (11.14)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant, toutes les composantes spectrales d'un signal sont retardées du même temps t_p et le signal temporel est ainsi peu déformé.

Remarque Dans la littérature, le temps de propagation est souvent défini comme la dérivée de la phase par rapport à la pulsation

$$t_p = -\frac{d\varphi}{d\omega} \quad (11.15)$$

Il s'agit alors plus précisément du *temps de groupe* mesurant le temps de propagation de signaux non permanents tels que des impulsions de durée finie et de forme quelconque. Ce temps correspond au temps de transfert de l'information contenue dans le signal.

11.2.4. Quel filtre choisir ?

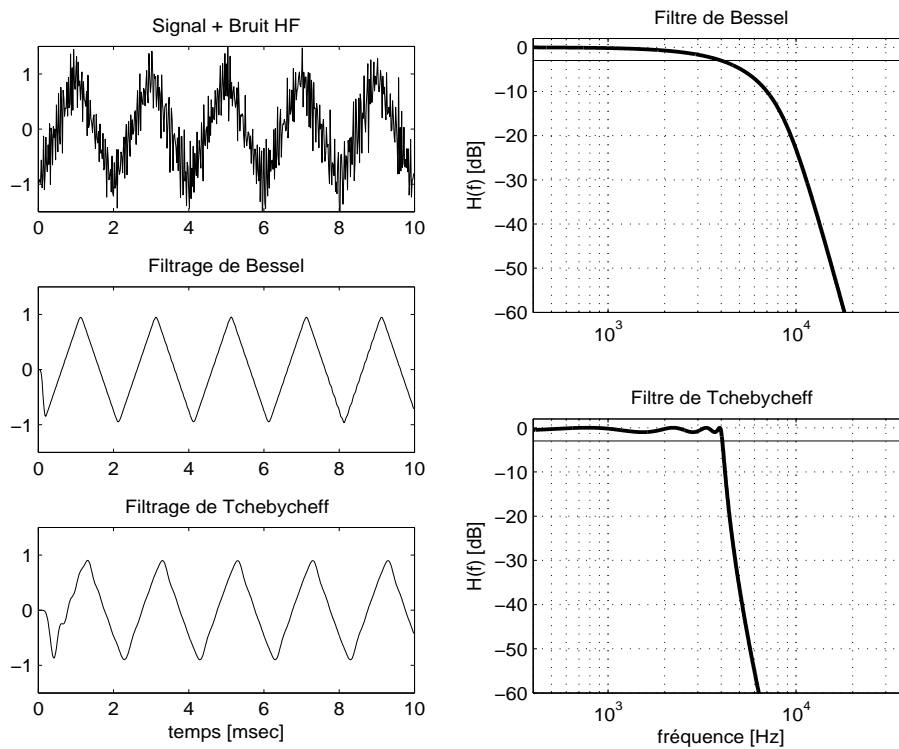
Afin de bien montrer l'effet des filtres sur la forme des signaux, la figure 11.5.a présente les résultats de deux filtrages extrêmes sur un même signal. Celui-ci est un signal triangulaire perturbé par un bruit hautes-fréquences que l'on traite avec un filtre passe-bas d'ordre 8 de Bessel ou de Tchebycheff. On peut alors relever les points suivants.

- **Visuellement**, on constate que dans les deux cas le bruit a pratiquement disparu. Cependant, le filtre de Bessel a conservé la forme du triangle alors que le filtre de Tchebycheff l'a sensiblement modifiée.
- **Auditivement**, malgré le comportement très différent des deux filtres, en particulier au niveau du temps de propagation, on ne distingue aucune différence entre les deux signaux filtrés.

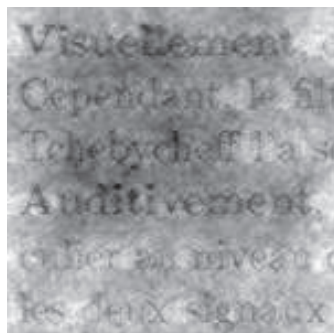
En conclusion, on retiendra que dans tous les cas où la forme du signal doit être respectée (analyse visuelle), on utilisera un filtre à phase linéaire (Bessel). Dans les cas où la bande de transition doit être la plus étroite possible et que la déformation des signaux n'est pas gênante (signaux audio), on choisira un filtre de Tchebycheff.

Afin de souligner encore l'importance de la phase, la figure 11.5.b montre le résultat obtenu en croisant les phases de deux images tout en conservant leurs amplitudes respectives. On y voit à l'évidence que l'information portée par la phase est prépondérante sur celle de l'amplitude.

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE



Amplitude ↓



Phase ↙ ↘

Visuellement, c
Cependant, le filt
Tchebycheff l'a se
Auditivement,
culier au niveau c
les deux signaux

Amplitude ↓

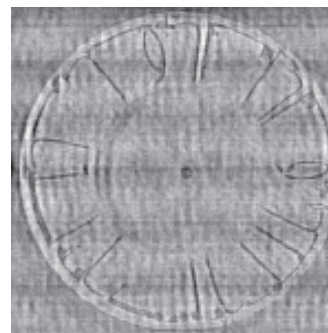


FIGURE 11.5.: a) Filtres de Bessel et de Tchebycheff appliqués à un signal triangulaire
b) Deux images reconstituées après avoir gardé leurs spectres d'amplitude respectifs et croisé leurs spectres de phase

11.2.5. Illustration des réponses fréquentielles et temporelles

Pour cette illustration, on considère quatre filtres d'ordre 5 et de nature différente. Les figures 11.6 à 11.9 illustrent le comportement temporel et fréquentiel des filtres de Butterworth, Bessel et Tchebycheff I en utilisant des échelles logarithmiques (diagrammes de Bode).

Dans un but de comparaison, on y a ajouté un filtre passe-bas composé de 5 cellules identiques d'ordre 1. Afin que les comparaisons se fassent sur une base commune, tous les filtres ont la même pulsation de coupure, à savoir, $\omega_c = 1$ [rad/sec].

La figure 11.10 permet de comparer les réponses de l'ensemble des filtres. La figure 11.11 utilise des axes linéaires afin de mettre en évidence le comportement de la phase et celui du temps de propagation des 4 filtres.

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

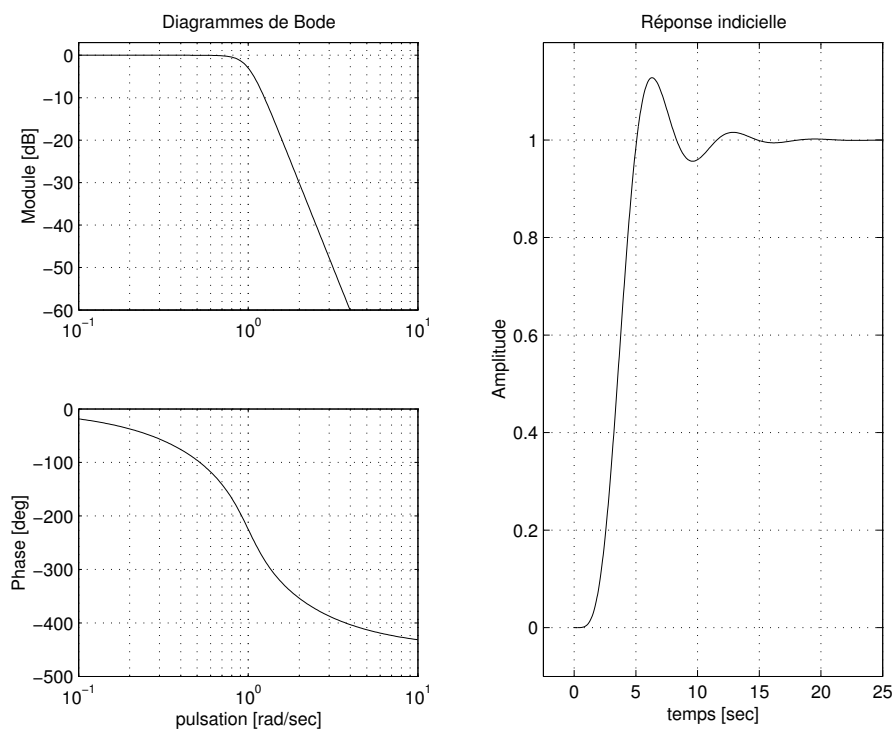


FIGURE 11.6.: Filtre de Butterworth ($n=5$)

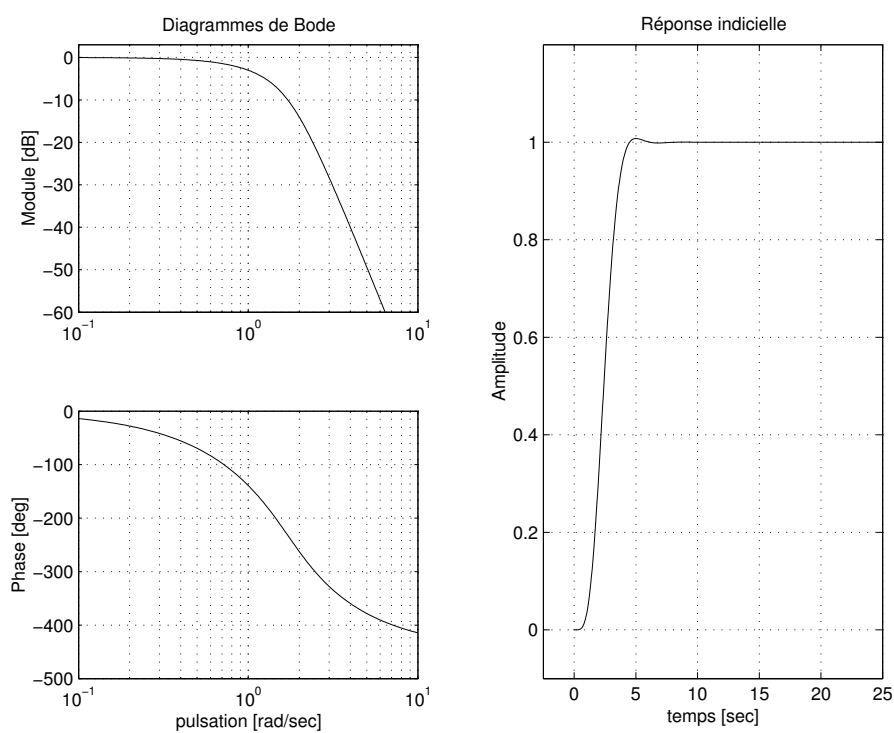


FIGURE 11.7.: Filtre de Bessel ($n=5$)

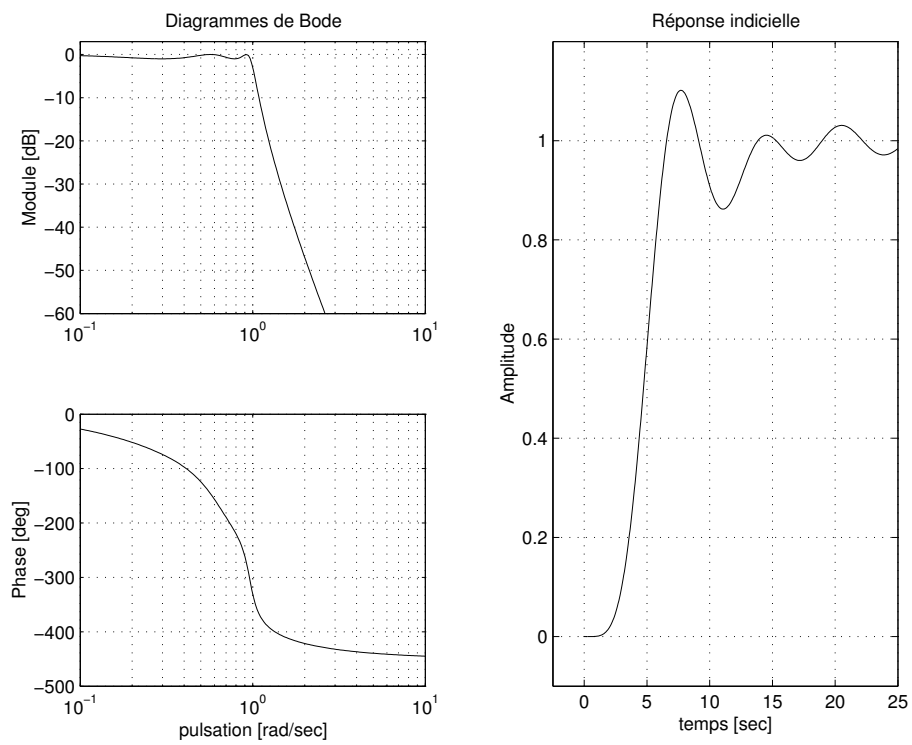


FIGURE 11.8.: Filtre de Tchebycheff ($n=5$)

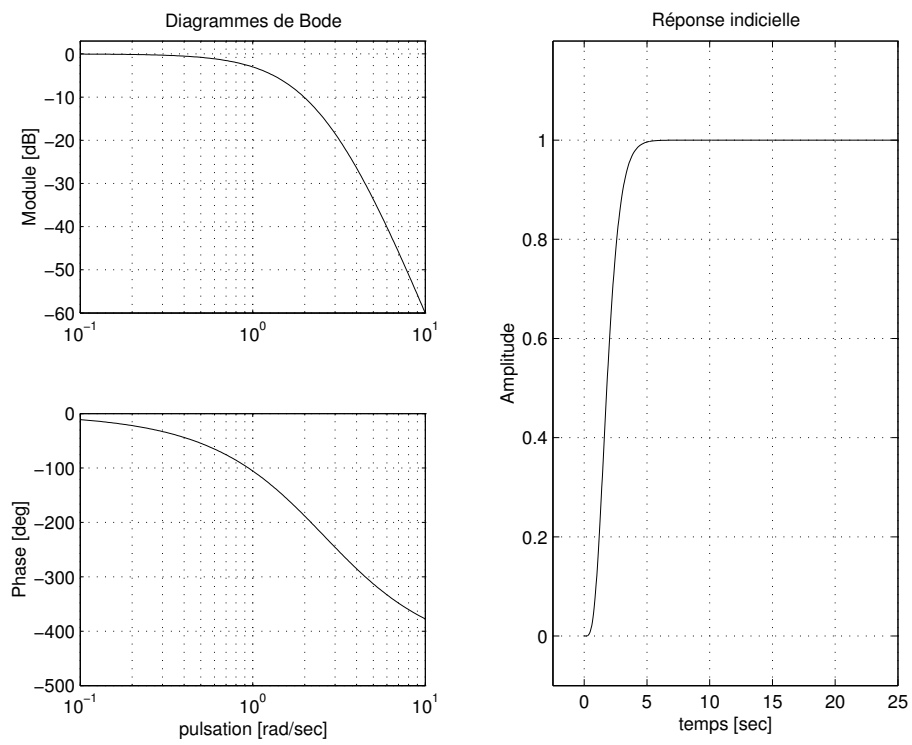


FIGURE 11.9.: Filtre composé de 5 cellules d'ordre 1

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

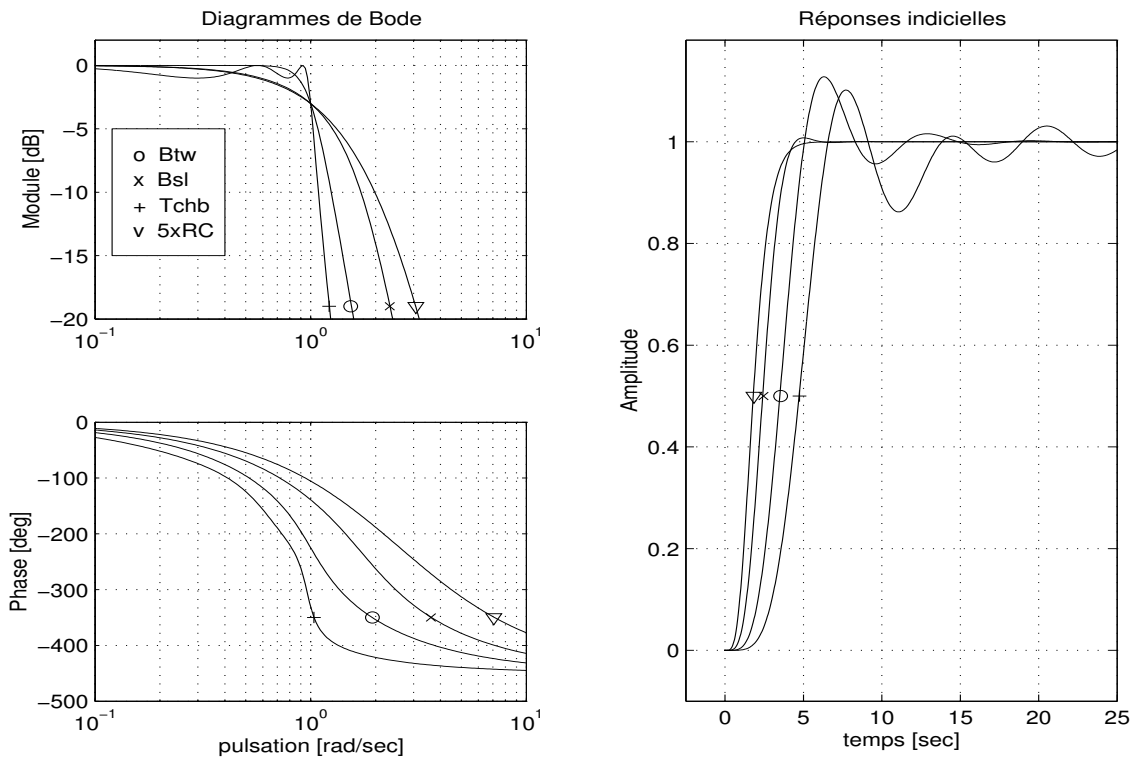


FIGURE 11.10.: Comparaison des réponses fréquentielles et indicielles

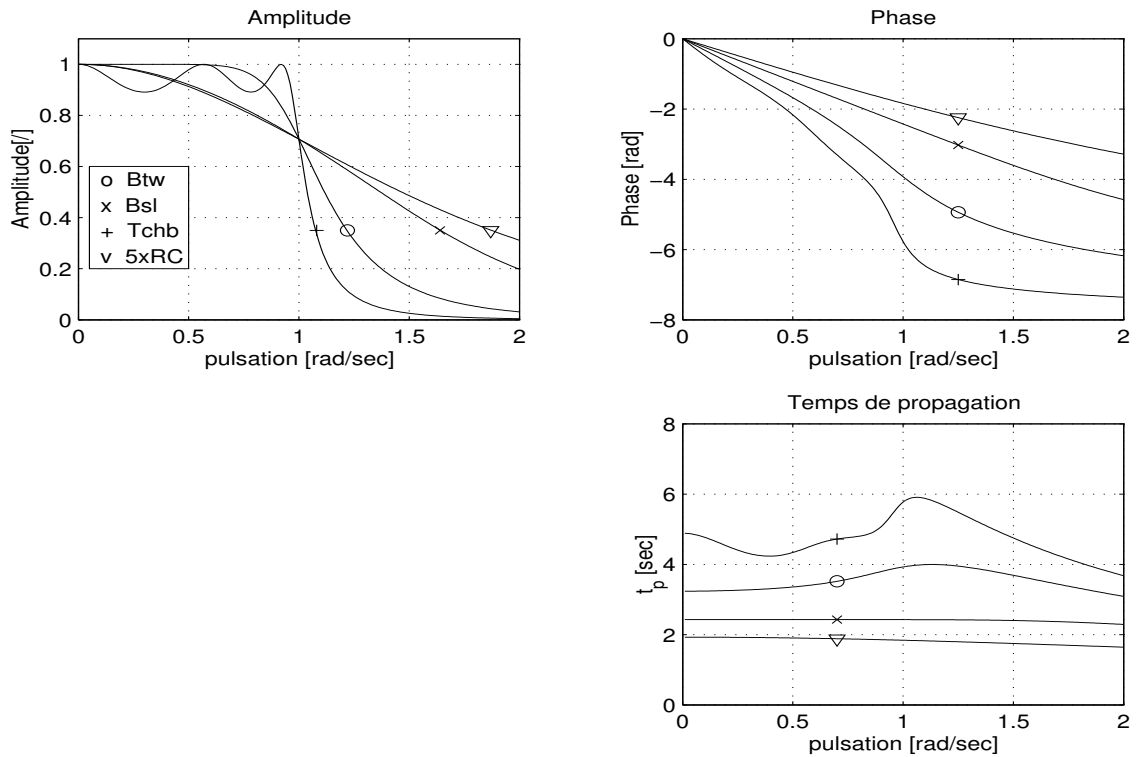


FIGURE 11.11.: Diagrammes linéaires et temps de propagation

11.3. Filtrés de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont caractérisés par une réponse en amplitude extrêmement plate dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (11.16)$$

On notera que cette réponse est normalisée par rapport à la pulsation de coupure ω_c pour laquelle le filtre possède une atténuation de $\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$.

En écrivant la fonction de transfert avec la variable de Laplace et en choisissant $\omega_c = 1$, on obtient une description équivalente :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (11.17)$$

On voit ainsi que le dénominateur de cette description est un polynôme d'ordre $2n$

$$D(s) = 1 + (-s^2)^n = 0 \quad (11.18)$$

dont les racines sont uniformément réparties sur un cercle de rayon unité. L'angle entre chaque racine vaut π/n et, suivant que l'ordre est pair ou impair, on aura les situations illustrées par la figure 11.12.

On notera que les pôles à parties réelles positives sont instables. Ils sont dus à $H(-s)$, la partie non réalisable de la fonction de transfert utilisée pour décrire le module de la réponse fréquentielle. Les pôles restant représentent la fonction de transfert $H(s)$ du filtre que l'on désire réaliser.

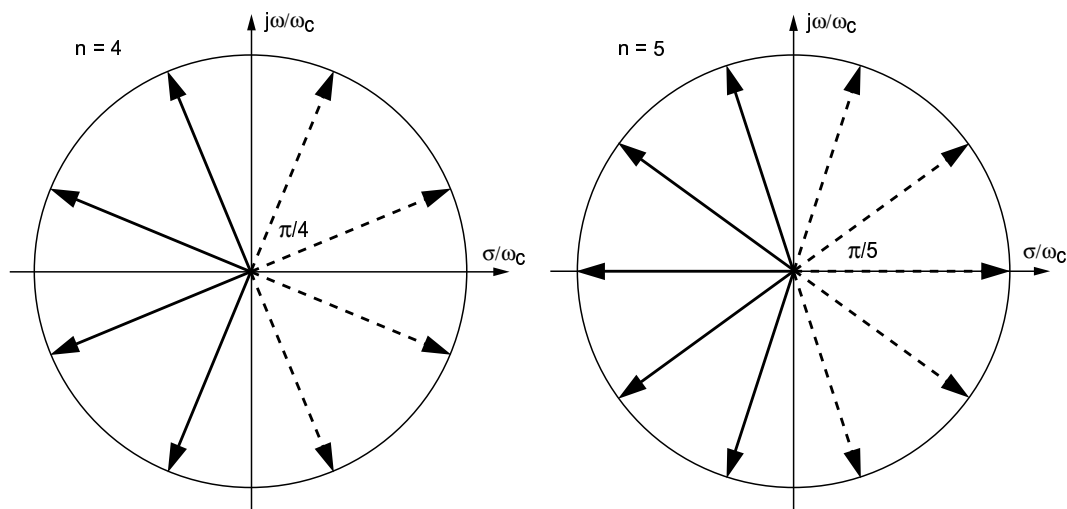


FIGURE 11.12.: Position des pôles pour un filtre de Butterworth

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

Comme on l'a dit plus haut, les filtres passe-bas étudiés ici sont des filtres tout pôles décrits de manière générale par :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (11.19)$$

Pour calculer le polynôme $A(s)$, il suffit de connaître les coordonnées de chacun des pôles correspondant aux trinômes constitutifs du polynôme. En effet, si l'on a $p_{1,2} = -a \pm jb$, il vient :

$$A(s) = \begin{cases} (s + a + jb)(s + a - jb) \\ s^2 + 2as + a^2 + b^2 \\ s^2 + 2as + 1 \end{cases} \quad (11.20)$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ car les racines normalisées par rapport à ω_c se situent sur un cercle de rayon unité.

Dans le cas d'un polynôme d'ordre 5, ce dernier sera décomposé en 3 polynômes de base provenant du pôle réel et des 2 paires de pôles complexes :

Pôles	Polynômes
$p_1 = -1$	$P_1(s) = 1 + s$
$p_{2,3} = -0.809 \pm j0.588$	$P_2(s) = 1 + 1.618s + s^2$
$p_{4,5} = -0.309 \pm j0.951$	$P_3(s) = 1 + 0.618s + s^2$

On notera que pour chaque cellule d'ordre 2, le facteur de qualité correspondant Q_{0k} est donné par l'inverse du deuxième coefficient. Ainsi, pour le polynôme d'ordre 5, on aura $Q_{02} = 1/1.618$ et $Q_{03} = 1/0.618$.

11.3.1. Tableau des polynômes de Butterworth

Connaissant la position des pôles d'un polynôme d'ordre n quelconque, il est aisé d'en calculer les trinômes constitutifs. Ceux-ci sont donnés dans le tableau 11.2.

11.3.2. Ordre et pulsation caractéristique d'un filtre

Dans l'analyse des filtres, il est fréquent d'exprimer la réponse fréquentielle à l'aide de l'atténuation $A(j\omega)$ définie comme l'inverse de $H(j\omega)$:

$$A(j\omega) \equiv \frac{1}{H(j\omega)} \quad (11.21)$$

n	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.414s + s^2)$
3	$(1 + s)(1 + 1.000s + s^2)$
4	$(1 + 1.848s + s^2)(1 + 0.765s + s^2)$
5	$(1 + s)(1 + 1.618s + s^2)(1 + 0.618s + s^2)$
6	$(1 + 1.932s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.518s + s^2)$
7	$(1 + s)(1 + 1.802s + s^2)(1 + 1.247s + s^2)(1 + 0.445s + s^2)$
8	$(1 + 1.962s + s^2)(1 + 1.663s + s^2)(1 + 1.111s + s^2)(1 + 0.390s + s^2)$
9	$(1 + s)(1 + 1.879s + s^2)(1 + 1.532s + s^2)(1 + 1.000s + s^2)(1 + 0.347s + s^2)$
10	$(1 + 1.975s + s^2)(1 + 1.782s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.908s + s^2)(1 + 0.313s + s^2)$

TABLE 11.2.: Quelques polynômes de Butterworth

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

L'atténuation d'un filtre de Butterworth est alors décrite par

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.22)$$

Comme la connaissance des 2 paramètres n et ω_c suffit à caractériser la réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth, la donnée d'un gabarit passe-bas à l'aide de 2 coordonnées suffit pour déterminer complètement le filtre (figure 11.13).

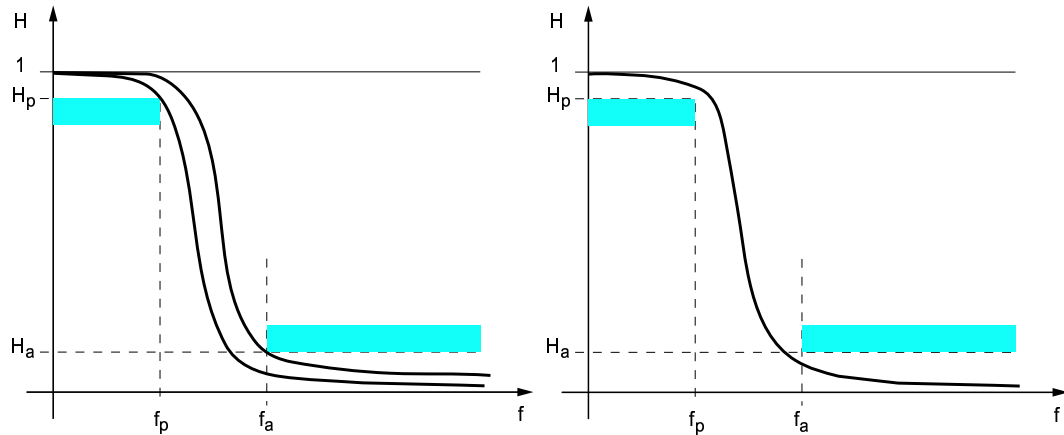


FIGURE 11.13.: Gabarit et réalisation d'un filtre de Butterworth

En effet, sachant que les atténuations aux points P (fin de la bande passante) et A (début de la bande d'arrêt) s'écrivent :

$$|A(j\omega_p)|^2 \equiv A_p^2 = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.23)$$

$$|A(j\omega_a)|^2 \equiv A_a^2 = 1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.24)$$

On résout aisément ce système de 2 équations à 2 inconnues en effectuant le rapport des deux équations après avoir passé la valeur 1 dans le membre de gauche. Prenant le logarithme des deux membres de l'équation, on obtient finalement :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log [(A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1)]}{\log (\omega_p / \omega_a)} \quad (11.25)$$

Une fois l'ordre connu, on peut calculer la pulsation de coupure à partir d'une des deux équations d'atténuation. Ce qui donne

$$\omega_c = \frac{\omega_m}{(A^2(\omega_m) - 1)^{1/(2n)}} \quad (11.26)$$

avec

$$\omega_m = \omega_p \text{ ou } \omega_a$$

Comme la valeur trouvée pour l'ordre n du filtre n'est généralement pas un entier, on l'arrondit à une valeur entière supérieure. On peut ainsi calculer deux valeurs différentes pour ω_c : l'une avec la pulsation ω_p et l'autre avec la pulsation ω_a .

En choisissant l'une ou l'autre de ces deux pulsations caractéristiques, la courbe de réponse fréquentielle touchera l'une ou l'autre partie du gabarit (figure 11.13a) ; ce qui n'est pas satisfaisant. Par contre, en prenant pour ω_c la moyenne géométrique des deux valeurs ainsi trouvées, on permettra à la courbe de réponse fréquentielle de ne pas toucher le gabarit (figure 11.13b).

11.3.3. Synthèse d'un filtre de Butterworth

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité ne comportant pas d'oscillations dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned} H_p &= -1 \text{ dB} & f_p &= 1 \text{ kHz} \\ H_a &= -40 \text{ dB} & f_a &= 3 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Pour ce faire on demande de :

1. trouver l'ordre n et la fréquence de coupure f_c du filtre ;
2. calculer les facteurs de qualité et le polynôme de réalisation ;
3. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

Solution :

1. On a :

$$A_p = 1/H_p = +1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad A_p^2 - 1 = 0.2589$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \Rightarrow \quad A_a^2 - 1 \simeq 10^4$$

d'où l'on tire :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log [(A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1)]}{\log (\omega_p / \omega_a)} = \frac{1}{2} \frac{\log (0.2589 / 10^4)}{\log (1/3)} = 4.80 \simeq 5$$

$$f_{c,p} = \frac{f_p}{(A_p^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{1 \text{ kHz}}{0.2589^{1/10}} = 1.145 \text{ kHz}$$

$$f_{c,a} = \frac{f_a}{(A_a^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{3 \text{ kHz}}{10^{4/10}} = 1.194 \text{ kHz}$$

On peut ainsi calculer la fréquence de coupure

$$f_c = \sqrt{f_{c,p} \cdot f_{c,a}} = 1.17 \text{ kHz}$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

2. D'après le tableau 11.2, le polynôme normalisé d'ordre 5 vaut :

$$P_{5,n}(s) = (1 + s) (1 + 1.618s + s^2) (1 + 0.618s + s^2)$$

On en déduit immédiatement les facteurs de qualité en prenant l'inverse des coefficients d'ordre 1 des deux trinômes :

$$Q_{02} = \frac{1}{1.618} = 0.618 = -4.18 \text{ dB}$$

$$Q_{03} = \frac{1}{0.618} = 1.618 = +4.18 \text{ dB}$$

En remplaçant la variable s par $s/(2\pi f_c) = 1.36 \cdot 10^{-4} s$, on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_5(s) = (1 + 1.36 \cdot 10^{-4} s) \cdot (1 + 2.20 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2) \cdot (1 + 0.84 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2)$$

3. Partant du polynôme $P_5(s)$, on en déduit $H(s) = 1/P_5(s)$ et on peut calculer puis tracer les réponses fréquentielles de chaque cellule (figure 11.14). La somme (en dB) de ces 3 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d'ordre 5 (figure 11.15). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont également présentées dans la figure 11.16.

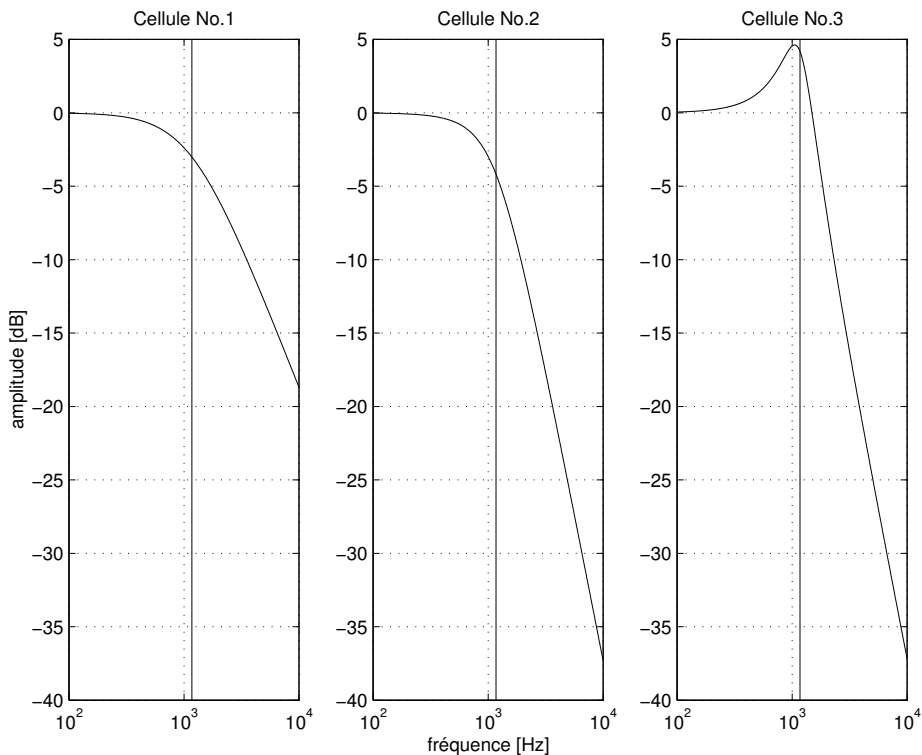


FIGURE 11.14.: Réponses fréquentielles de chaque cellule

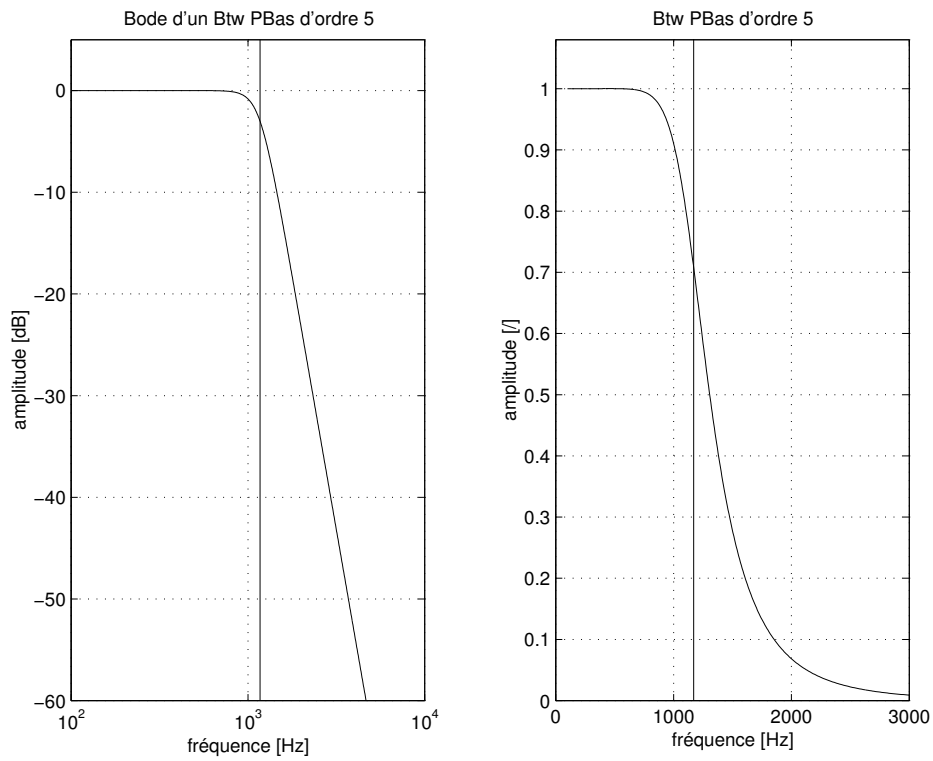


FIGURE 11.15.: Réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

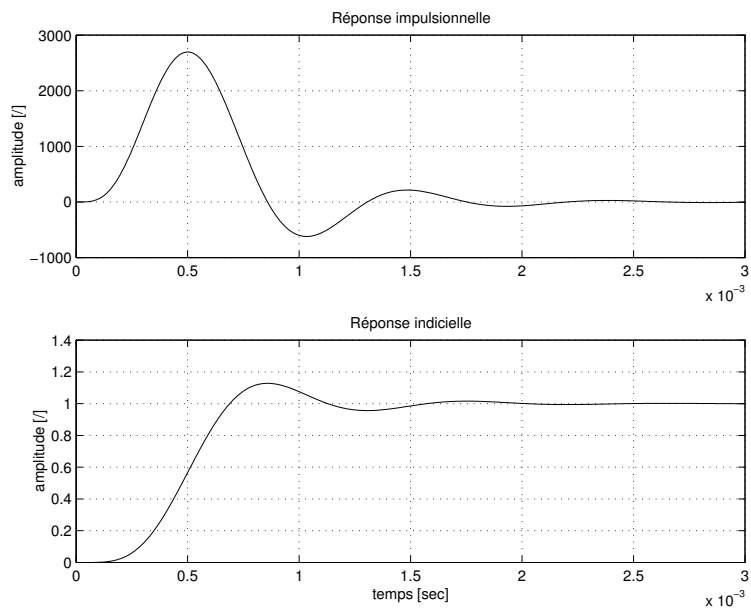


FIGURE 11.16.: Réponses temporelles d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

11.4. Filtrés de Tchebycheff

Lorsque les spécifications du gabarit permettent une ondulation dans la bande passante du filtre, on utilise fréquemment un filtre de Tchebycheff de type I dont la réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_r)} \quad (11.27)$$

avec ω_r délimitant la bande dans laquelle on accepte une ondulation r , généralement exprimée en dB. On voit donc que pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation n'est plus la pulsation de coupure mais la pulsation d'ondulation ω_r .

La fonction C_n décrivant la réponse fréquentielle du filtre est oscillante dans la bande passante et croissante dans la bande d'arrêt. Elle est décrite par :

$$C_n(\omega/\omega_r) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{acosh}(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r > 1 \end{cases} \quad (11.28)$$

L'amplitude ϵ de la fonction C_n est liée à l'ondulation r acceptée dans la bande passante au travers de la relation suivante :

$$1 + \epsilon^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^2 = 10^{r_{dB}/10} - 1 \quad (11.29)$$

11.4.1. Caractéristique des filtres de Tchebycheff

La réponse fréquentielle des filtres de Tchebycheff est illustrée par la figure 11.17 pour laquelle on a pris $r = 1 \text{ dB}$. On constate que le nombre d'extrémums présents dans la bande d'ondulation est égal à l'ordre du filtre et que les ondulations se situent au-dessus ou au-dessous de 1 suivant que le filtre est d'ordre pair ou impair.

On se souviendra que la pulsation de la bande d'ondulation ω_r sert de pulsation de normalisation et qu'elle est reliée à la pulsation de coupure ω_c par la relation :

$$\omega_c = \omega_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \quad (11.30)$$

11.4.2. Calcul de l'ordre d'un filtre de Tchebycheff

Comme la donnée de la largeur de la bande d'ondulation fixe la pulsation de normalisation ω_r , il suffit de connaître un point de la bande d'arrêt et l'amplitude ϵ de l'ondulation admise pour déterminer l'ordre n du filtre [1] :

$$n \geq \frac{\log\left(\sqrt{A_a^2 - 1} + \sqrt{A_a^2 - 1 - \epsilon^2}\right) - \log(\epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a/\omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a/\omega_r\right)^2 - 1}\right)} \quad (11.31)$$

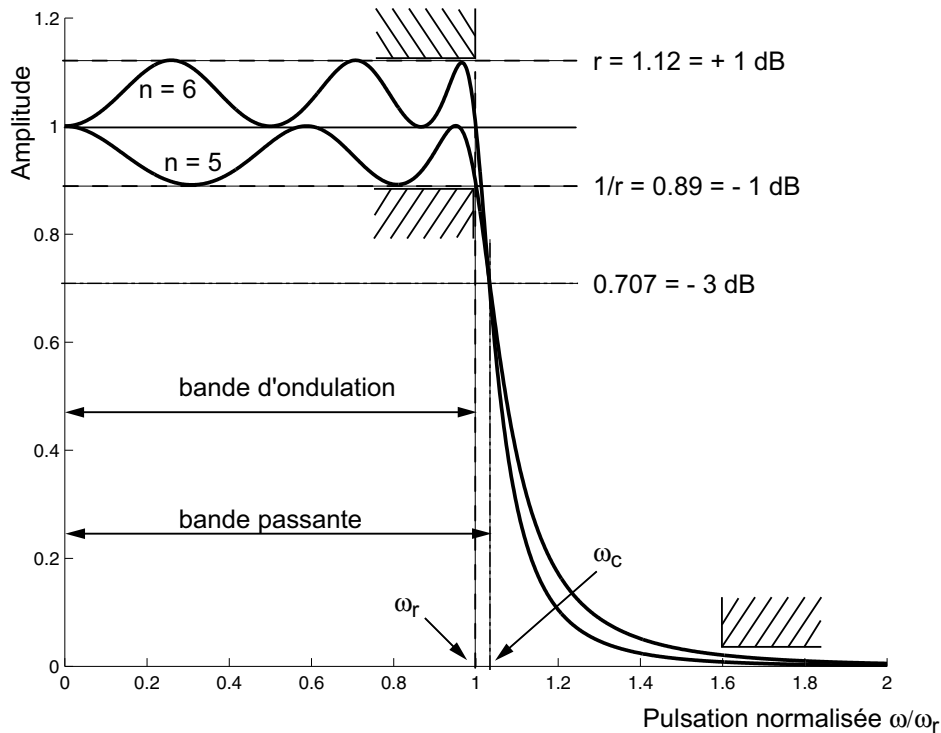


FIGURE 11.17.: Réponse fréquentielle des filtres Tchebycheff

Dans la situation fréquente où l'atténuation A_a est plus grande que 10, cette expression peut être simplifiée pour donner :

$$n \geq \frac{\log(2 A_a / \epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a / \omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_r\right)^2 - 1}\right)} \quad (11.32)$$

11.4.3. Tableau des polynômes de Tchebycheff

On peut montrer que les racines des polynômes réalisant la réponse fréquentielle décrite par l'équation (11.27) se situent sur une ellipse dont le petit diamètre dépend de l'ondulation r . A partir de cette ellipse, on peut calculer les polynômes de Tchebycheff dont quelques uns sont données dans le tableau 11.3 pour $r = 0.5$ et 1.0 dB .

11.4.4. Synthèse d'un filtre de Tchebycheff

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité pour lequel on accepte une ondulation de $\pm 1 \text{ dB}$ dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$H(f_r) = H_r = |r| = 1 \text{ dB} \quad f_r = 1 \text{ kHz}$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

n	$P(s)$ pour $r = 0.5 \text{ dB} = 1.059$ ou $\epsilon = 0.3493$
1	$(1 + 0.349s)$
2	$(1 + 0.940s + 0.659s^2)$
3	$(1 + 1.596s)(1 + 0.548s + 0.875s^2)$
4	$(1 + 2.376s + 2.806s^2)(1 + 0.330s + 0.940s^2)$
5	$(1 + 2.760s)(1 + 1.230s + 2.097s^2)(1 + 0.216s + 0.965s^2)$
6	$(1 + 3.692s + 6.370s^2)(1 + 0.719s + 1.695s^2)(1 + 0.152s + 0.977s^2)$
7	$(1 + 3.904s)(1 + 1.818s + 3.939s^2)(1 + 0.472s + 1.477s^2)(1 + 0.112s + 0.984s^2)$
8	$(1 + 4.981s + 11.36s^2)(1 + 1.037s + 2.788s^2)(1 + 0.335s + 1.349s^2)(1 + 0.086s + 0.988s^2)$
n	$P(s)$ pour $r = 1.0 \text{ dB} = 1.122$ ou $\epsilon = 0.5089$
1	$(1 + 0.509s)$
2	$(1 + 0.996s + 0.907s^2)$
3	$(1 + 2.024s)(1 + 0.497s + 1.006s^2)$
4	$(1 + 2.411s + 3.579s^2)(1 + 0.283s + 1.014s^2)$
5	$(1 + 3.454s)(1 + 1.091s + 2.329s^2)(1 + 0.181s + 1.012s^2)$
6	$(1 + 3.722s + 8.019s^2)(1 + 0.609s + 1.793s^2)(1 + 0.126s + 1.009s^2)$
7	$(1 + 4.868s)(1 + 1.606s + 4.339s^2)(1 + 0.392s + 1.530s^2)(1 + 0.092s + 1.007s^2)$
8	$(1 + 5.010s + 14.23s^2)(1 + 0.876s + 2.934s^2)(1 + 0.276s + 1.382s^2)(1 + 0.070s + 1.006s^2)$

TABLE 11.3.: Quelques polynômes de Tchebycheff

$$H(f_a) = H_a = -40 \text{ dB} \quad f_a = 3 \text{ kHz}$$

Pour ce faire on demande de :

1. calculer l'ordre n du filtre et sa fréquence de coupure f_c ;
2. calculer les fréquence caractéristique et facteur de qualité de chaque cellule ;
3. calculer le polynôme de réalisation ;
4. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

Solution :

1. On a :

$$A_p[\text{dB}] = -H_r[\text{dB}] = |r| = 1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \sqrt{r^2 - 1} = 0.5089$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \text{et} \quad u_a = f_a/f_r = 3$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(2 A_a/\epsilon)}{\log\left((\omega_a/\omega_r) + \sqrt{(\omega_a/\omega_r)^2 - 1}\right)} \\ &\geq \frac{\log(200/0.5089)}{\log(3 + \sqrt{3^2 - 1})} = 3.39 \simeq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_c &= f_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \\ &= 1 \text{ kHz} \cdot \cosh\left(\frac{1}{4} \operatorname{acosh}(1/0.5089)\right) = 1053 \text{ Hz} \end{aligned}$$

2. Du tableau 11.3, on tire le polynôme normalisé pour une ondulation de 1 dB

$$P_{4,n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

On en déduit immédiatement les 2 facteurs de qualité

$$Q_{01} = \frac{\sqrt{3.579}}{2.411} = 0.785 = -2 \text{ dB} \quad Q_{02} = \frac{\sqrt{1.014}}{0.283} = 3.56 = +11 \text{ dB}$$

et les 2 fréquences caractéristiques

$$f_{01} = \frac{f_r}{\sqrt{3.579}} = 528 \text{ Hz} \quad f_{02} = \frac{f_r}{\sqrt{1.014}} = 993 \text{ Hz}$$

3. Effectuant le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{2\pi f_r} = 1.59 \cdot 10^{-4} s$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

sur le polynôme normalisé

$$P_{4n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_4(s) = (1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)$$

À ce polynôme correspond la fonction de transfert suivante :

$$H_4(s) = \frac{1}{(1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)}$$

dont les pulsations caractéristiques, facteurs d'amortissement et de qualité valent :

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{9.066 \cdot 10^{-8}}} = 3321 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{2.568 \cdot 10^{-8}}} = 6240 \text{ rad/sec}$$

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = 528 \text{ Hz}$$

$$f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = 993 \text{ Hz}$$

$$\zeta_1 = \frac{3.84 \cdot 10^{-4} \omega_{01}}{2} = 0.637$$

$$\zeta_2 = \frac{0.45 \cdot 10^{-4} \omega_{02}}{2} = 0.1405$$

$$Q_{01} = \frac{1}{2\zeta_1} = 0.785 = -2 \text{ dB}$$

$$Q_{02} = \frac{1}{2\zeta_2} = 3.56 = 11 \text{ dB}$$

Les réponses fréquentielles des deux cellules sont tracées à la figure 11.18. La somme (en dB) de ces 2 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Tchebycheff d'ordre 4 (figure 11.19). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont présentées dans la figure 11.20.

11.5. Filtrés de Bessel

Comme on vient de le voir, les filtres de Butterworth et Tchebycheff conduisent à des réponses indicielles ayant un fort dépassement malgré le fait que les amplitudes des composantes spectrales soient pratiquement maintenues à leurs valeurs dans la bande passante. Ce phénomène provient du fait que le déphasage de chacune de ces composantes n'est pas proportionnel à sa fréquence.

Avec les filtres de Bessel (dits également de Thomson), on obtient des réponses indicielles presque sans dépassement grâce au temps de propagation qui, dans la bande passante, est pratiquement indépendant de la fréquence. Cela se paye naturellement par une réponse fréquentielle en amplitude moins abrupte dans la bande de transition que les filtres précédents (le filtre idéal n'existe pas encore!).

Un temps de propagation constant (indépendant de la fréquence) signifie que toutes les composantes spectrales d'un signal sont transmises avec le même décalage temporel. L'intégrité de la forme du signal est ainsi respectée sauf pour les composantes spectrales que l'on désire supprimer par filtrage.

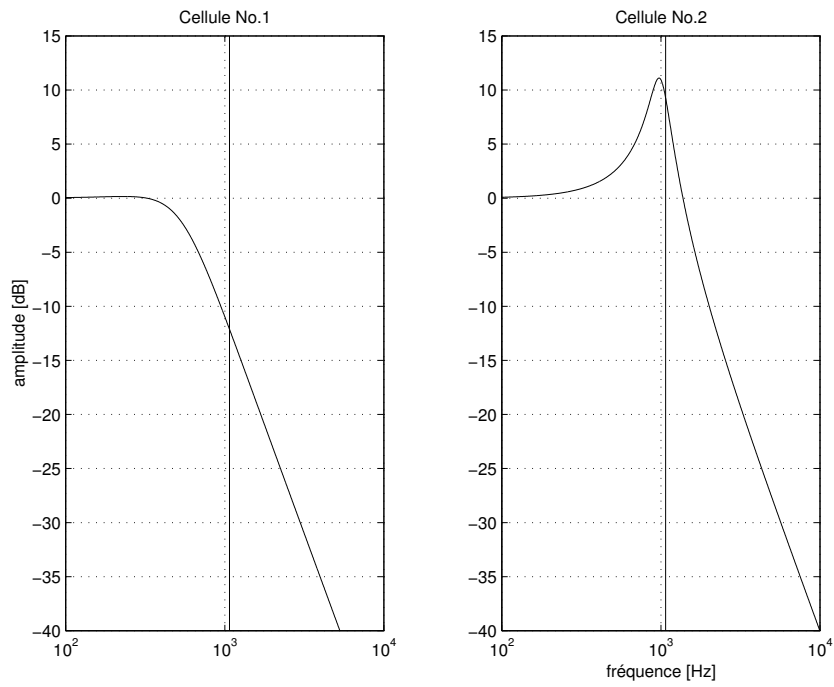


FIGURE 11.18.: Réponses fréquentielles des 2 cellules

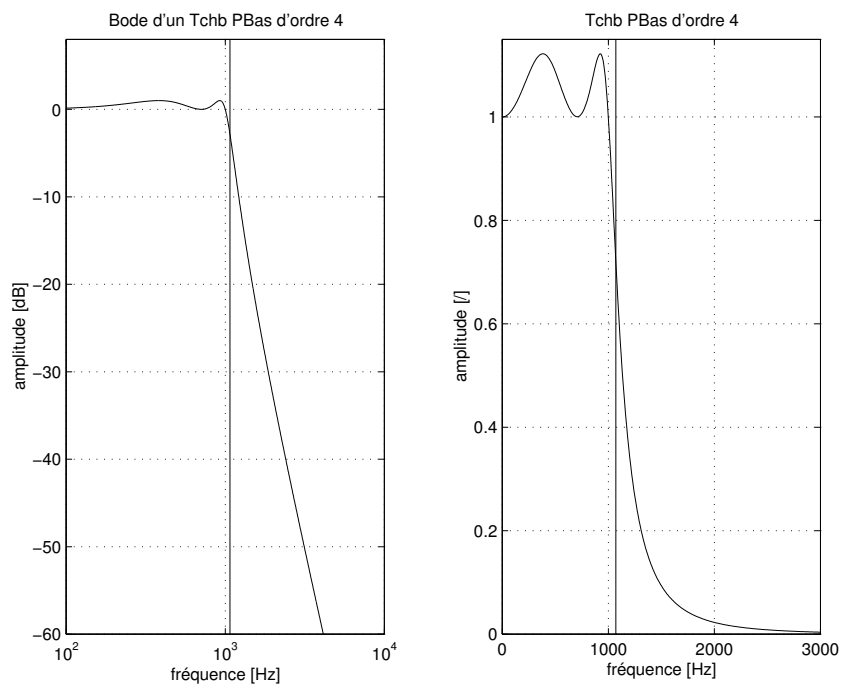


FIGURE 11.19.: Réponse fréquentielle d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

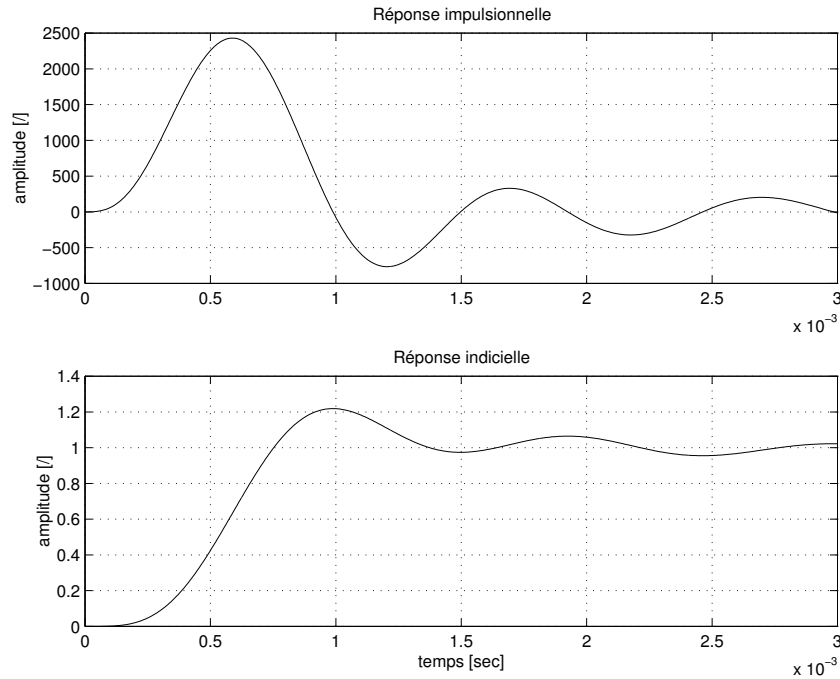


FIGURE 11.20.: Réponses temporelles d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

11.5.1. Temps de propagation des filtres passe-bas

On a vu au paragraphe 11.2.3 que le temps de propagation t_p est défini comme suit

$$t_p = - \left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (11.33)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant (indépendant de la fréquence du signal), on dit que l'on a affaire à des filtres à phase linéaire car, dans ce cas, on a bien évidemment

$$\varphi(\omega) = -\omega t_p \quad (11.34)$$

C'est la propriété essentielle des filtres de Bessel.

Considérant des filtres passe-bas, on montre aisément que la phase des cellules d'ordre 1 ou 2

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \quad (11.35)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + (1/Q_0) j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2} \quad (11.36)$$

valent respectivement

$$\varphi_1(\omega) = -\text{atan}(\omega/\omega_1) \quad (11.37)$$

$$\varphi_2(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\right) \quad (11.38)$$

Ce qui donne les temps de propagation suivants

$$t_{p,1}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_1(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}(\omega/\omega_1)}{\omega}$$

$$t_{p,2}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_2(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right)}{\omega}$$

La valeur du temps de propagation étant donnée pour les basses-fréquences ($\omega \rightarrow 0$), on obtient alors

$$t_{p,1} = \frac{1}{\omega_1}, \quad t_{p,2} = \frac{1}{Q_0 \omega_0} \tag{11.39}$$

Comme un filtre d'ordre quelconque est constitué de la mise en série de cellules d'ordre 1 et 2, les temps de propagation s'ajoutent pour donner

$$t_p = \sum_k \frac{1}{Q_{0,k} \omega_{0,k}} \tag{11.40}$$

avec $Q_{0,k} = 1$ pour les cellules d'ordre 1.

n	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.3614s + 0.6178s^2)$
3	$(1 + 0.7562s)(1 + 0.9998s + 0.4773s^2)$
4	$(1 + 1.3389s + 0.4883s^2)(1 + 0.7738s + 0.3885s^2)$
5	$(1 + 0.6660s)(1 + 1.1408s + 0.4133s^2)(1 + 0.6219s + 0.3249s^2)$
6	$(1 + 1.2224s + 0.3891s^2)(1 + 0.9691s + 0.3509s^2)(1 + 0.5133s + 0.2759s^2)$
7	$(1 + 0.5938s)(1 + 1.0946s + 0.3396s^2)(1 + 0.8305s + 0.3012s^2)(1 + 0.4333s + 0.2382s^2)$
8	$(1 + 1.112s + 0.3166s^2)(1 + 0.976s + 0.2984s^2)(1 + 0.721s + 0.2625s^2)(1 + 0.373s + 0.209s^2)$

TABLE 11.4.: Quelques polynômes de Bessel-Thomson

11.5.2. Fonctions de transfert

Les fonctions de transfert conduisant à un temps de propagation constant dans la bande passante possèdent un dénominateur décrit par des polynômes de Bessel

$$P(s) = \frac{1}{H(s)} = 1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n \tag{11.41}$$

dont les coefficients se calculent de manière itérative

$$b_k = \frac{2(n - k + 1)}{k(2n - k + 1)} b_{k-1} \quad \text{avec} \quad b_1 = 1 \tag{11.42}$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

Le tableau 11.4 donne quelques polynômes de Bessel décomposés en produits de binômes et trinômes normalisés par rapport à la pulsation de coupure du filtre. Le tableau a été construit en recherchant numériquement les racines des polynômes originaux et les pulsations de coupure correspondantes.

11.5.3. Synthèse d'un filtre de Bessel

D'un point de vue analytique, il n'existe malheureusement pas d'approche simple pour trouver les pôles de $H(s)$. On ne peut donc pas déterminer analytiquement la valeur de la pulsation de coupure et trouver l'ordre du filtre à partir d'un gabarit. On se contente alors d'une approche itérative conduisant à vérifier si un filtre donné (ordre et pulsation de coupure) entre bien dans le gabarit requis.

Cependant, sachant qu'un filtre de Butterworth n'est pas trop éloigné d'un filtre de Bessel, on peut partir de la réalisation d'un filtre de Butterworth et espérer satisfaire le cahier des charges donné en augmentant légèrement l'ordre du filtre et/ou en modifiant sa pulsation de coupure. C'est ce qui est illustré ci-après.

Donnée Considérons comme exemple la réalisation d'un filtre de Bessel devant satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}H_p &= -1 \text{ dB} & f_p &= 1 \text{ kHz} \\H_a &= -40 \text{ dB} & f_a &= 10 \text{ kHz}\end{aligned}$$

Pour ce faire on demande de :

1. trouver l'ordre n et la fréquence de coupure f_c du filtre ;
2. calculer le polynôme de réalisation et en déduire les pulsations caractéristiques et facteurs de qualité ;
3. calculer le temps de propagation ;
4. tracer les réponses fréquentielle et indicielle et vérifier les valeurs particulières correspondant au gabarit.

Solution

1. Considérant la synthèse d'un filtre de Butterworth, on a :

$$A_p = 1/H_p = +1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad A_p^2 - 1 = 0.2589$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \Rightarrow \quad A_a^2 - 1 \simeq 10^4$$

d'où l'on tire :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log [(A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1)]}{\log (\omega_p / \omega_a)} = \frac{1}{2} \frac{\log (0.2589 / 10^4)}{\log (1 / 10)} = 2.29 \simeq 3$$

Comme dans le domaine fréquentiel le filtre de Bessel est moins performant que celui de Butterworth, on augmente l'ordre du filtre en prenant $n = 4$. Ce qui donne

$$f_{c,p} = \frac{f_p}{(A_p^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{1 \text{ kHz}}{0.2589^{1/8}} = 1.25 \text{ kHz}$$

$$f_{c,a} = \frac{f_a}{(A_a^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{10 \text{ kHz}}{(10^4)^{1/8}} = 2.15 \text{ kHz}$$

On peut ainsi calculer la fréquence de coupure

$$f_c = \sqrt{f_{c,p} \cdot f_{c,a}} = 1.64 \text{ kHz}$$

et choisir une valeur moins singulière

$$f_c = 2 \text{ kHz} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 4'000 \pi \text{ rad/sec}$$

2. D'après le tableau 11.4, le polynôme normalisé d'ordre 4 vaut :

$$P_{4,n}(s) = (1 + 1.3389s + 0.4883s^2) (1 + 0.7738s + 0.3885s^2)$$

En remplaçant s par $s/\omega_c = s/(4'000 \pi)$, on obtient le polynôme de réalisation

$$P_4(s) = (1 + 1.0655 \cdot 10^{-4} s + 3.09 \cdot 10^{-9} s^2) (1 + 6.158 \cdot 10^{-5} s + 2.460 \cdot 10^{-9} s^2)$$

Se souvenant de la forme canonique des cellules d'ordre 2

$$1 + \frac{1}{Q_0 \omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2$$

on en déduit immédiatement les pulsations caractéristiques

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{3.09 \cdot 10^{-9}}} = 17'990 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{2.460 \cdot 10^{-9}}} = 10'160 \text{ rad/sec}$$

et les facteurs de qualité

$$Q_{01} = \frac{1}{1.0655 \cdot 10^{-4} \omega_{01}} = 0.522$$

$$Q_{02} = \frac{1}{1.0655 \cdot 10^{-4} \omega_{02}} = 0.806$$

3. Connaissant ces valeurs, on peut calculer le temps de propagation du filtre

$$t_p = \sum_k \frac{1}{Q_{0,k} \omega_{0,k}} = \frac{1}{0.522 \cdot 17'990} + \frac{1}{0.806 \cdot 10'160} = 168 \mu\text{sec}$$

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

4. Partant du polynôme $P_4(s)$, on obtient la fonction de transfert du filtre de Bessel

$$H(s) = \frac{1}{P_4(s)} = \frac{1}{(1 + 1.0655 \cdot 10^{-4} s + 3.09 \cdot 10^{-9} s^2)(1 + 6.158 \cdot 10^{-5} s + 2.460 \cdot 10^{-9} s^2)}$$

qui permet de calculer et tracer ses réponses fréquentielle et indicielle (figure 11.21). Le calcul des valeurs particulières

$$H(f_p) = |H(s)|_{s=f_p} = 0.922 = -0.705 \text{ dB}$$

$$H(f_a) = |H(s)|_{s=f_a} = 8.03 \cdot 10^{-3} = -41.9 \text{ dB}$$

$$H(f_c) = |H(s)|_{s=f_c} = 0.707 = -3 \text{ dB}$$

montre que le filtre ainsi obtenu se situe à l'intérieur du gabarit défini dans la donnée.

11.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

Lors de l'utilisation des filtres, on souhaite souvent avoir simultanément une bande passante étroite et un régime transitoire rapide. Or, cela est inconciliable. Pour le voir, considérons un filtre passe-bande dont la fonction de transfert est décrite par sa pulsation caractéristique ω_0 et son facteur de qualité Q_0 :

$$H(s) = \frac{(1/Q_0)(s/\omega_0)}{1 + (1/Q_0)(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.43)$$

Sachant que le facteur de qualité et la largeur de bande sont reliés entre eux par

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (11.44)$$

la fonction de transfert du filtre passe-bande peut également s'écrire sous la forme

$$H(s) = \frac{\Delta\omega s}{s^2 + \Delta\omega s + \omega_0^2} \quad (11.45)$$

Les pôles de cette fonction de transfert valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{\Delta\omega}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q_0^2}\right) \end{aligned}$$

Si le filtre passe-bande est sélectif, le facteur de qualité est élevé et l'expression des pôles se simplifient pour donner :

$$p_{1,2} \simeq -\frac{\Delta\omega}{2} \pm j\omega_0 \quad (11.46)$$

11.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

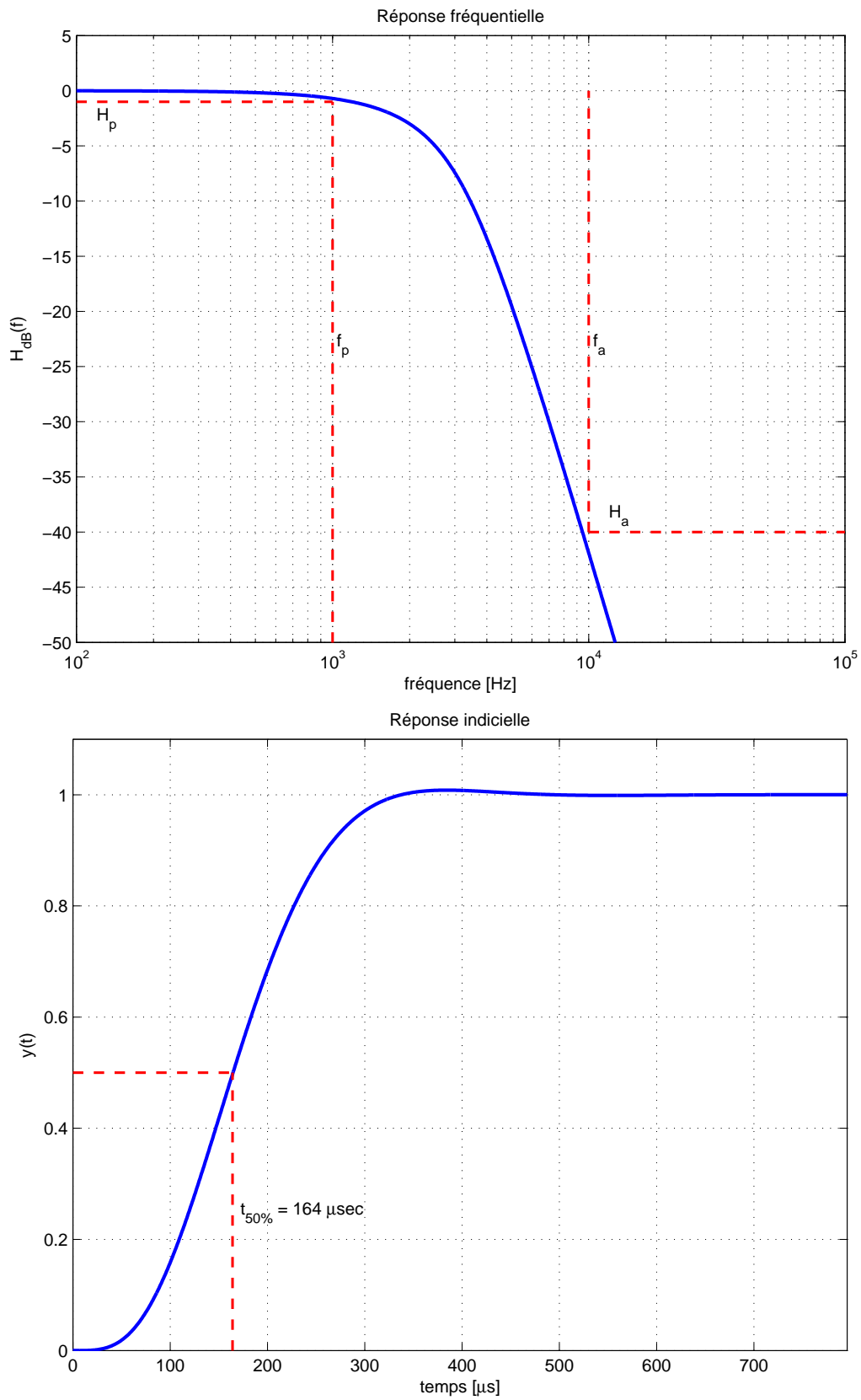


FIGURE 11.21.: Réponses fréquentielle et indicielle d'un filtre de Bessel d'ordre 4

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

La réponse transitoire du filtre est alors décrite par :

$$y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A \exp\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (11.47)$$

Ceci est une réponse oscillante amortie dont la constante de temps vaut

$$\tau = \frac{2}{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi\Delta f} \quad (11.48)$$

Considérant que la durée du régime transitoire vaut environ 3 constantes de temps, on en tire la relation importante suivante :

$$\Delta t \simeq 3\tau = \frac{3}{\pi\Delta f} \simeq \frac{1}{\Delta f} \quad (11.49)$$

Cette relation montre que l'on ne peut pas avoir simultanément une grande sélectivité (Δf petit) et un régime transitoire court (Δt petit). Une conclusion similaire est vérifiée pour les filtres autres que passe-bande pour lesquels on ne peut pas avoir simultanément une bande de transition étroite et un temps d'établissement rapide.

11.7. Réalisations des filtres analogiques

11.7.1. Filtres normalisés

Comme on l'a déjà dit, les filtres sont représentés par des fonctions de transfert dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes $P(s)$ décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2 :

$$P_1(s) = 1 + s/\omega_1 \quad (11.50)$$

$$P_2(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (11.51)$$

Aussi, pour caractériser un filtre d'ordre quelconque, suffit-il de donner les pulsations caractéristiques et les facteurs de qualité de chaque cellule. C'est ce qui est fait pour les filtres passe-bas dans le tableau 11.5.

On notera que pour les filtres de Butterworth et Bessel, la pulsation de normalisation est la pulsation de coupure ω_c (3 dB d'atténuation). Alors que, pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation est celle correspondant à la bande dans laquelle on accepte une ondulation. L'amplitude r de l'ondulation admise s'exprime généralement en dB et les valeurs les plus souvent proposées sont 0.5 dB (5.9% d'ondulation) et 1.0 dB (12.2% d'ondulation).

11.7. Réalisations des filtres analogiques

Ordre	Cellules	Btw ⁽¹⁾	Bessel		Tchb. 0.5 dB		Tchb. 1 dB	
		Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_c}$	Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_{0.5dB}}$	Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_{1dB}}$	Q_k
1	1		1.000		2.8628		1.9652	
2	1	0.7071	1.2723	0.5774	1.2313	0.8637	1.0500	0.9565
3	1		1.3225		0.6265		0.4942	
	2	1.0000	1.4474	0.6910	1.0689	1.7062	0.9971	2.0177
4	1	0.5412	1.4310	0.5219	0.5970	0.7051	0.5286	0.7845
	2	1.3066	1.6043	0.8055	1.0313	2.9406	0.9932	3.5590
5	1		1.5015		0.3623		0.2895	
	2	0.6180	1.5555	0.5635	0.6905	1.1778	0.6552	1.3988
	3	1.6180	1.7545	0.9165	1.0177	4.5450	0.9941	5.5564
6	1	0.5176	1.6030	0.5103	0.3962	0.6836	0.3531	0.7609
	2	0.7071	1.6882	0.6112	0.7681	1.8104	0.7468	2.1980
	3	1.9319	1.9037	1.0233	1.0114	6.5128	0.9954	8.0037
7	1		1.6840		0.2562		0.2054	
	2	0.5550	1.7160	0.5324	0.5039	1.0916	0.4801	1.2969
	3	0.8019	1.8221	0.6608	0.8227	2.5755	0.8084	3.1559
	4	2.2470	2.0491	1.1263	1.0080	8.8418	0.9963	10.8987
8	1	0.5098	1.7772	0.5060	0.2967	0.6766	0.2651	0.7530
	2	0.6013	1.8308	0.5596	0.5989	1.6107	0.5828	1.9565
	3	0.8999	1.9518	0.7109	0.8610	3.4657	0.8506	4.2661
	4	2.5629	2.1872	1.2257	1.0059	11.5308	0.9971	14.2405
9	1		1.8570		0.1984		0.1593	
	2	0.5321	1.8788	0.5197	0.3954	1.0664	0.3773	1.2600
	3	0.6527	1.9483	0.5895	0.6727	2.2131	0.6622	2.7129
	4	1.000	2.0808	0.7606	0.8885	4.4780	0.8806	5.5266
	5	2.8794	2.3228	1.3219	1.0046	14.5793	0.9976	18.0286
10	1	0.5062	1.9412	0.5039	0.2372	0.6734	0.2121	0.7495
	2	0.5612	1.9790	0.5376	0.4878	1.5347	0.4761	1.8645
	3	0.7071	2.0606	0.6205	0.7293	2.8913	0.7215	3.5605
	4	1.1013	2.2021	0.8098	0.9087	5.6114	0.9025	6.9367
	5	3.1962	2.4487	1.4153	1.0037	17.9871	0.9980	22.2630

⁽¹⁾Pour toutes les cellules des filtres de Butterworth, on a $\omega_k/\omega_c = 1$

TABLE 11.5.: Pulsations et facteurs de qualité des filtres normalisés

11.7.2. Transformations d'un filtre normalisé

L'étude des filtres est basée sur la connaissance approfondie des filtres passe-bas. C'est donc à partir des caractéristiques des filtres passe-bas que l'on construit celles des filtres de type passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande.

On vérifie aisément que le passage d'une cellule passe-bas d'ordre 1 à une cellule de nature différente se fait par les changements de variable donnés dans le tableau 11.6.

Filtre désiré	Caractéristiques	Variable
passe-bas	ω_k	s/ω_k
passe-haut	ω_k	ω_k/s
passe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{s/\omega_0 + \omega_0/s}{B_0}$
coupe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{B_0}{s/\omega_0 + \omega_0/s}$

TABLE 11.6.: Transformations d'un filtre normalisé

La transformation passe-bas vers passe-haut est aisée alors que les deux autres sont fastidieuses et source d'erreurs. Aussi, dans le cas de filtres passe-bande et coupe-bande, vaut-il mieux utiliser un outil tel que Matlab qui permet d'obtenir directement les polynômes de réalisation.

Il est important de noter que, partant d'un passe-bas d'ordre n , le filtre équivalent passe-bande ou coupe-bande sera d'ordre $2n$. La démarche permettant de passer d'un filtre à un autre est présentée en détail dans [3].

11.7.3. Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Comme tout filtre peut être réalisé à partir de cellules d'ordre 1 ou 2 décrites par leur facteur de qualité et pulsation caractéristique, on voit qu'il suffit de connaître les circuits de base d'ordre 1 ou 2 pour réaliser n'importe quel filtre d'ordre n .

Ces circuits utilisent un amplificateur suiveur (à gain unité) et une réaction positive. Ils permettent ainsi de réaliser des filtres à gain fixe de type passe-bas, passe-haut et passe-bande. Leurs schémas sont présentés dans la figure 11.22.

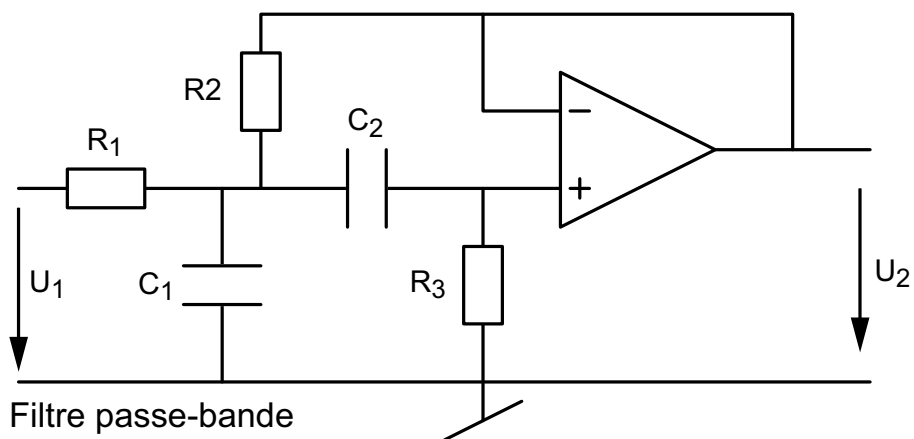
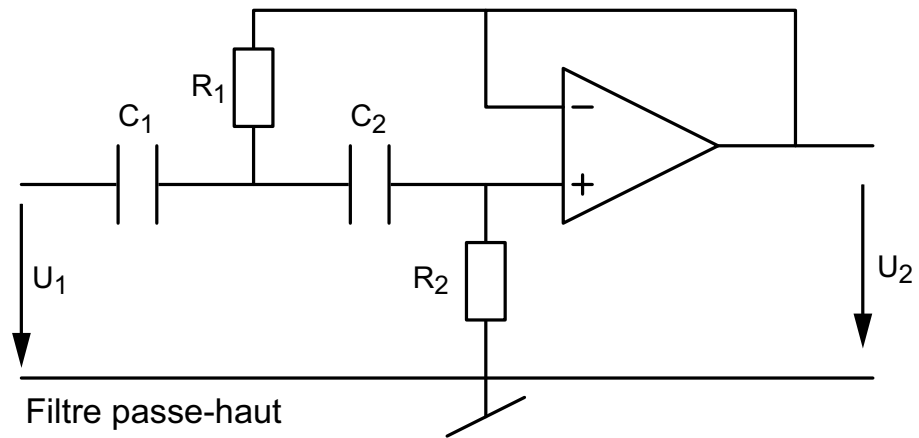
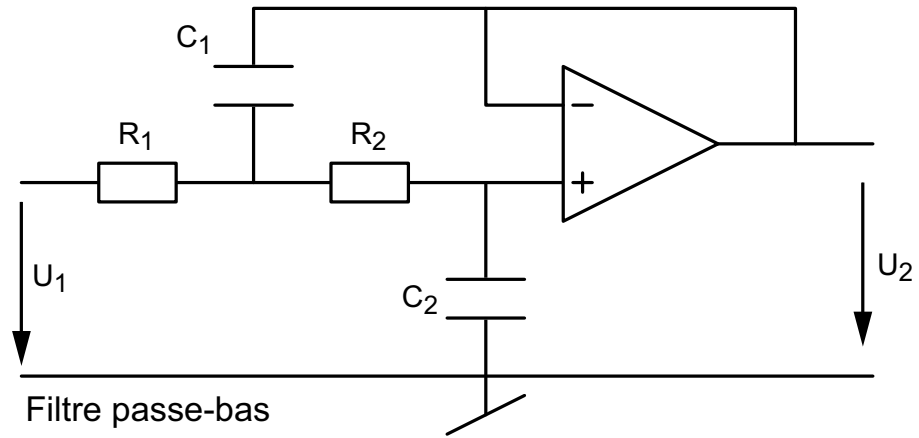


FIGURE 11.22.: Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Filtres passe-bas et passe-haut

Les fonctions de transfert des filtres passe-bas et passe-haut sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + C_2(R_1 + R_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (11.52)$$

$$H_{PH}(s) = \frac{C_1C_2R_1R_2s^2}{1 + R_1(C_1 + C_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (11.53)$$

Par identification des termes de la forme canonique avec ceux des fonctions de transfert, on montre aisément les résultats suivants :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2} \quad (11.54)$$

$$Q_{0,PB} = \sqrt{\frac{C_1R_1R_2}{C_2(R_1 + R_2)^2}} \quad (11.55)$$

$$Q_{0,PH} = \sqrt{\frac{R_2C_1C_2}{R_1(C_1 + C_2)^2}} \quad (11.56)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Afin que le facteur de qualité puisse être supérieur à 0.5, on prendra :

1. pour le filtre passe-bas :

$$R_1 = R_2 = R \quad (11.57)$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (11.58)$$

$$C_2 = \frac{1}{2Q_0\omega_0R} \quad C_1 = 4Q_0^2C_2 \quad (11.59)$$

2. pour le filtre passe-haut :

$$C_1 = C_2 = C \quad (11.60)$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (11.61)$$

$$R_1 = \frac{1}{2Q_0\omega_0C} \quad R_2 = 4Q_0^2R_1 \quad (11.62)$$

Filtre passe-bande

La fonction de transfert du filtre passe-bande de la figure 11.22 est décrite par :

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{C_2 R_3 s}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1(C_1 + C_2) + R_3 C_2) s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} C_1 C_2 R_1 R_3 s^2} \quad (11.63)$$

En choisissant $C_1 = C_2 = C$ et $R_1 = R_3 = R$, on obtient

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R + R_2} \frac{C R s}{1 + 3 \frac{R_2}{R + R_2} C R s + \frac{R_2}{R + R_2} C^2 R^2 s^2} \quad (11.64)$$

En identifiant les termes de $H_{P\Delta}(s)$ avec ceux de la forme canonique

$$H_{P\Delta}(s) = A_0 \frac{\frac{1}{Q_0 \omega_0} s}{1 + \frac{1}{Q_0 \omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

on montre aisément les résultats suivants :

$$A_0 \equiv H_{P\Delta}(j\omega_0) = \frac{1}{3} \quad (11.65)$$

$$\omega_0^2 = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) \frac{1}{C^2 R^2} \quad (11.66)$$

$$Q_0 = \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \quad (11.67)$$

Après avoir librement choisi la valeur de R_2 , on voit que les équations ci-dessus nous permettent de calculer la valeur des éléments nécessaires à la réalisation d'un filtre passe-bande :

$$R = R_2 (9 Q_0^2 - 1) \quad (11.68)$$

$$C = \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \frac{1}{\omega_0 R} = \frac{3 Q_0}{\omega_0 R} \quad (11.69)$$

On notera qu'à la pulsation caractéristique du filtre, le gain vaut $1/3$ et que, si nécessaire, il faudra corriger le gain global.

Remarque

Les circuits à gain fixe offrent un moyen simple de réaliser des filtres d'ordre 2. Cependant, si l'on observe les équations donnant la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q_0 , on voit que l'on ne peut pas varier l'un sans changer l'autre. De plus, le choix des valeurs normalisées pour les composants R ou C n'est pas possible. On préfère donc parfois, lorsqu'il s'agit de filtres passe-bas ou passe-haut, utiliser les circuits à gain variable.

11.7.4. Circuits de Sallen et Key à gain variable

Leurs schémas sont présentés dans la figure 11.23. On voit qu'ils ont la même structure que les circuits précédents sauf que l'amplificateur suiveur est remplacé par un amplificateur gain variable valant

$$K = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

On montre aisément que les fonctions de transfert de ces filtres sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = K \frac{1}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.70)$$

$$H_{PH}(s) = K \frac{(sRC)^2}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.71)$$

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{K}{3 - K} \frac{(3 - K) sRC}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.72)$$

L'identification des coefficients des dénominateurs avec ceux de la forme canonique

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (11.73)$$

permet de voir que l'on a les relations suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (11.74)$$

$$\frac{1}{Q_0} = 3 - K = 2 - \frac{R_4}{R_3} \quad (11.75)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Si, par exemple, on se donne C et R_3 , on a alors

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (11.76)$$

$$R_4 = R_3 \left(2 - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (11.77)$$

Remarque On notera que le gain en tension des cellules passe-bas et passe-haut vaut

$$A_{U, PB} = A_{U, PH} = K = 3 - \frac{1}{Q_0} \simeq 3 \quad (11.78)$$

alors que celui du filtre passe-bande

$$A_{U, P\Delta} = \frac{K}{3 - K} = 3 Q_0 - 1 \simeq 3 Q_0 \quad (11.79)$$

est proportionnel au facteur de qualité; il peut ainsi atteindre des valeurs très importantes. On préfère alors, pour ce type de filtre, utiliser la cellule à gain fixe.

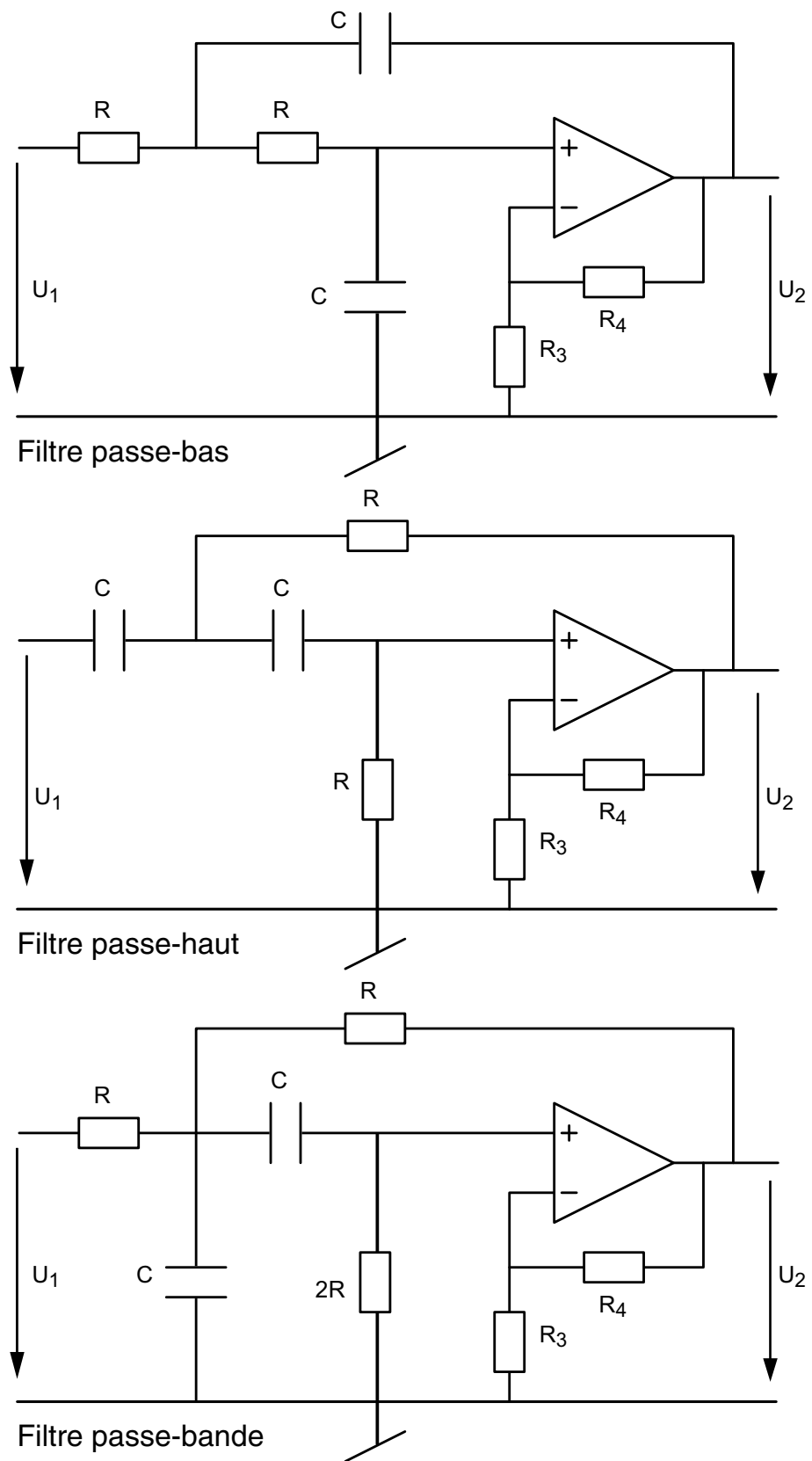


FIGURE 11.23.: Cellules à gain variable

11.7.5. Exemple : réalisation d'un filtre passe-bande

Donnée

On souhaite réaliser un filtre passe-bande d'ordre $n = 6$ pour lequel on accepte une ondulation $r = 1$ dB entre les pulsations $\omega_1 = 500$ [rad/sec] et $\omega_2 = 2000$ [rad/sec].

Solution

Ce filtre sera réalisé par 3 cellules d'ordre 2 provenant chacune de la transformation d'une cellule passe-bas d'ordre 1 en une cellule passe-bande. Cette transformation se fait par le changement de variable suivant (tableau 11.6) :

$$s \rightarrow \frac{s/\omega_{0k} + \omega_{0k}/s}{B_k} \quad (11.80)$$

avec

$$\omega_{0k} = \sqrt{\omega_i \omega_s} \quad B_k = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{0k}} \quad (11.81)$$

On comprend bien que le calcul de cette transformation à partir du tableau des polynômes normalisés n'est pas aisée et qu'il vaut mieux utiliser un programme permettant d'obtenir directement les paramètres de chaque cellule. Le logiciel Matlab se prête particulièrement bien à cela.

Le contenu du fichier permettant de calculer le filtre désiré est donné dans la section 11.7.5. On y trouve en particulier la fonction `zpk` (zero-pole-gain) de Matlab qui affiche les résultats dans la forme de Laplace :

$$\frac{1658160052.054 \ s^3}{(s^2 + 151.6s + 2.57e005)(s^2 + 741.3s + 1e006)(s^2 + 589.7s + 3.891e006)}$$

Dans la forme de Bode, la fonction de transfert du filtre passe-bande à gain unité s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}} + \left(\frac{s}{\omega_{01}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}} + \left(\frac{s}{\omega_{02}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}} + \left(\frac{s}{\omega_{03}}\right)^2\right)}$$

Les paramètres de chaque cellule se calculent aisément avec la fonction `damp` qui fournit les pulsations caractéristiques et facteur d'amortissement de chaque cellule (voir fichier Matlab). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= 507 \text{ [rad/sec]} & Q_{01} &= 3.35 \\ \omega_{02} &= 1000 \text{ [rad/sec]} & Q_{02} &= 1.35 \\ \omega_{03} &= 1972 \text{ [rad/sec]} & Q_{03} &= 3.35 \end{aligned}$$

À partir de ces paramètres et du choix du schéma de réalisation, on calcule aisément les valeurs des composants. Adoptant le schéma de Sallen et Key à gain fixe

(figure 11.22), et, après avoir choisi $R_2 = 1$ [k Ω], on peut calculer les valeurs des résistances et capacités de chaque cellule passe-bande (équ. (11.68) et (11.69)) :

$$R = R_2 (9 Q_0^2 - 1) = \begin{cases} 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 15.4 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \end{cases}$$

$$C = \frac{3 Q_0}{\omega_0 R} = \begin{cases} 198 \text{ [nF]} \\ 263 \text{ [nF]} \\ 51 \text{ [nF]} \end{cases}$$

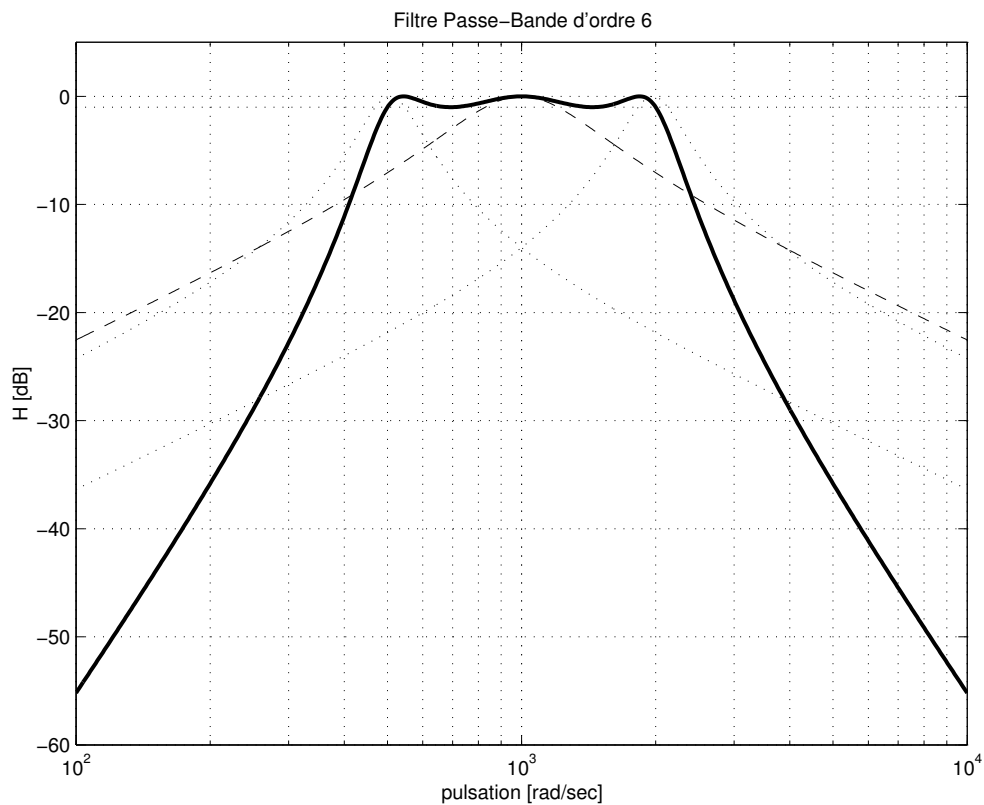


FIGURE 11.24.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande de Tchebycheff

Fichier Matlab

```
% calcul d'un filtre passe-bande
% fmy / novembre 2003
close all; clear all; format compact; format short g;

% initialisation
wdeb = 100; wfin = 10e3;
w = logspace(log10(wdeb),log10(wfin),500); % 500 points repartis logar.
wdf = [wdeb wfin];

% calcul du filtre passe-bande Tchb
w1 = 500; w2 = 2000; r = 1; n = 6;
```

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

```

[num den] = cheby1 (n/2, r, [w1 w2], 's');

% fonction de transfert du filtre
Gw = tf (num, den);

% calcul des facteurs de qualité et pulsation caractéristiques
zpk(Gw) % affichage de G(jw)
[wk zk] = damp(Gw); % pulsation caract. et coeff. d'amortissement
Qk = 1./(2*zk); % calcul des facteurs de qualite
Qk_wk = [Qk, wk]
Q0 = Qk(1:2:n);
w0 = wk(1:2:n);
Q0_w0 = [Q0, w0] % Q0 et w0 de chaque cellule

% affichage des resultats
% Zero/pole/gain:
%
% 1658160052.054 s^-3
% -----
% (s^2 + 151.6s + 2.57e005) (s^2 + 741.3s + 1e006) (s^2 + 589.7s + 3.891e006)
%
% Qk_wk =
% 3.3449 506.98
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4
% 3.3449 1972.4
% Q0_w0 =
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4

% fonctions de transfert à gain unité
G1 = tf([1/Q0(1)/w0(1) 0], [1/w0(1)^2 1/Q0(1)/w0(1) 1]);
G2 = tf([1/Q0(2)/w0(2) 0], [1/w0(2)^2 1/Q0(2)/w0(2) 1]);
G3 = tf([1/Q0(3)/w0(3) 0], [1/w0(3)^2 1/Q0(3)/w0(3) 1]);
Gw = G1 * G2 * G3;

% calcul des reponses frequenielles de chaque cellule
[ampl1 phi1] = bode(G1,w);
[ampl2 phi2] = bode(G2,w);
[ampl3 phi3] = bode(G3,w);
[ampl phi] = bode(Gw,w);

% transformation de l'objet ampl en un vecteur
ampl1 = ampl1(:); ampl2 = ampl2(:);
ampl3 = ampl3(:); ampl = ampl(:);

% normalisation pour avoir un gain unité du filtre global
ampl = ampl/max(ampl);

% tracage
figure;
h = semilogx(w,20*log10(ampl)); % tracage de G(jw)
set(h,'LineWidth',2); % ligne plus epaisse
hold on; % maintien de la figure courante

```

```

semilogx(wdf,-[r, r],':'); % ligne en -r [dB]
semilogx(w,20*log10(ampl1),':'); % tracage de G1(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl2),'--'); % tracage de G2(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl3),':'); % tracage de G3(jw)
axis([wdeb, wfin,-60, 5]); grid; % definition des axes
title('Filtre Passe-Bande d''ordre 6'); % titre du graphe
xlabel('pulsation [rad/sec]'); % information pour l'abscisse
ylabel('H [dB]'); grid on; % information pour l'ordonnee
hold off; % liberation de la figure courante
print pbande_tch6.eps -deps % sauvegarde dans un fichier .eps

% calcul des composants avec ampli à gain unité
% R1 = R3 = R et C1 = C2 = C, R2 libre
R2 = 1000
R = R2*(9*Q0.^2 - 1);
C = 3*Q0./R./w0;
Rk_Ck = [R, C]

% affichage des valeurs des composants
% R2 =
% 1000
% Rk_Ck =
% 99696 1.9853e-007
% 15380 2.6315e-007
% 99696 5.103e-008

```

11.8. Exercices

FA 1 On souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas de Butterworth satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned}
 0 \text{ dB} &\geq H_p(3 \text{ kHz}) \geq -0.2 \text{ dB} \\
 H_a(10 \text{ kHz}) &\leq -40 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

Pour ce faire :

1. calculez l'ordre du filtre et la fréquence de coupure du filtre ;
2. que valent le facteur de qualité et la fréquence de coupure de chaque cellule ;
3. calculez la fonction de transfert $H(s)$ du filtre ;
4. pour chaque cellule, esquissez $H_{dB}(f)$ puis, justifiez l'allure de H_{tot} ;
5. pourquoi recommande-t-on de placer les cellules dans l'ordre croissant des facteurs de qualité ?

FA 2 Réalisez le filtre que vous venez de calculer. Pour ce faire :

1. choisissez le schéma de réalisation du filtre permettant d'utiliser des valeurs normalisées pour les capacités ;
2. calculez les éléments constitutifs du filtre ;
3. que faites-vous pour obtenir un gain global unité ?

11. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

FA 3 Vérifiez que pour les filtres de Butterworth le produit des facteurs de qualité vaut 1 si l'ordre est impair et $1/\sqrt{2}$ si l'ordre est pair. Comment justifiez-vous ce résultat ?

FA 4 Calculez le temps de propagation d'un filtre de Bessel d'ordre 5 dont la fréquence de coupure vaut $f_c = 1$ [kHz]. Réponse : $t_p = 386 \mu\text{s}$

FA 5 On veut réaliser un filtre passe-bas de Tchebicheff satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned}H_r(1 \text{ kHz}) &= 0.5 \text{ dB} \\H_a(2 \text{ kHz}) &\leq -50 \text{ dB}\end{aligned}$$

1. calculez l'ordre du filtre et sa fréquence de coupure ;
2. calculez le facteur de qualité et la fréquence caractéristique de chaque cellule ;
3. l'ondulation de la réponse fréquentielle du filtre sera-t-elle au-dessus ou au-dessous du niveau 0 dB ?
4. pour chaque cellule, esquissez $H_{dB}(f)$; justifiez l'allure de H_{tot} .

FA 6 On vous remet le schéma d'un filtre passe-bas constitué de trois cellules de Sallen et Key à gain unité dans lequel toutes les résistances valent $10 \text{ k}\Omega$ alors que les capacités des 3 cellules valent respectivement

$$\begin{aligned}C_{11} &= 0.41 \mu\text{F} & C_{12} &= 0.38 \mu\text{F} \\C_{21} &= 0.56 \mu\text{F} & C_{22} &= 0.28 \mu\text{F} \\C_{31} &= 1.54 \mu\text{F} & C_{32} &= 0.10 \mu\text{F}\end{aligned}$$

Trouvez le type de filtre ainsi réalisé et sa fréquence de coupure.

FA 7

1. Considérant un filtre passe-bas d'ordre 2

$$H_b(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta = 0.1 \\ \omega_0 = 10^3 \text{ [rad/sec]} \end{cases}$$

- calculez son équivalent passe-haut ;
2. tracez les diagrammes de Bode asymptotiques des deux filtres ;
3. répétez les points 1) et 2) pour un filtre passe-bande ;
4. vérifiez vos résultats avec Matlab.

FA 8 Partant d'un polynôme normalisé d'ordre 1, utilisez les transformations correspondantes pour trouver les fonctions de transfert

1. d'un filtre passe-haut de pulsation $\omega_c = 10^3$ [rad/sec];
2. d'un filtre passe-bande tel que $Q_0 = 1$ et $\omega_0 = 10^3$ [rad/sec]; que vaudra la largeur de bande d'un tel filtre?
3. d'un filtre réjecteur de bande tel que $Q_0 = 10$ et $\omega_0 = 10^3$ [rad/sec]; que vaudront la largeur de bande d'un tel filtre et l'atténuation obtenue pour $\omega = \omega_0$?

Bibliographie

- [1] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Maxwell MacMillan, 1992
- [2] M.E. van Valkenburg, *Analog Filter Design*, Saunders College Publishing, 1982
- [3] B.P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press, 1998
- [4] P. Bildstein, *Filtres actifs*, Editions Radio, 1976.

12. Synthèse des filtres récurrents

12.1. Classification des systèmes numériques

Les systèmes numériques linéaires sont généralement décrits par une équation aux différences qui peut être récurrente ou non. Dans l'étude des filtres numériques linéaires, on distingue donc deux approches : la synthèse des filtres non récurrents et celle des filtres récurrents.

12.1.1. Systèmes non récurrents (dits RIF, FIR ou MA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal non récurrent d'ordre N se calcule uniquement à partir du signal d'entrée $x[n]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1a.

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_N x[n-N] \quad (12.1)$$

On peut remarquer que sa réponse impulsionnelle correspond aux coefficients b_k ; elle est donc de longueur finie N . Ainsi le calcul de $y[n]$ revient-il à convoluer le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle $h[k] \equiv b_k$ du système linéaire. On peut également observer que ce système effectue une pondération des valeurs du signal d'entrée et que cela correspond à une moyenne glissante (moving average).

Ces systèmes sont donc désignés avec l'acronyme *RIF* (Réponse Impulsionnelle Finie) ou *FIR* (Finite Impulse Response) ou *MA* (Moving Average) et leur fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N} \quad (12.2)$$

De par leur structure, les systèmes FIR sont toujours stables, mais ils demandent passablement de temps de calcul car la longueur de la réponse impulsionnelle d'un tel système est généralement très élevée ($N > 100$).

12.1.2. Systèmes récurrents (dits RII, IIR ou ARMA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal récurrent d'ordre N se calcule à partir du signal d'entrée $x[n]$ et des valeurs précédentes de la sortie $y[n-k]$. Son équation aux

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1b.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (12.3)$$

On peut remarquer que ces systèmes ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leur fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (12.4)$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette fonction de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie *RII* ou *IIR* (Infinite Impulse Response) ou Auto Régressive (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (Moving Average MA). D'où l'appellation *ARMA* (Auto Régressive and Moving Average).

Généralement, l'ordre d'un système IIR est peu élevé ($N = 1 \dots 10$) et il est réalisé en plaçant en série des cellules biquadratiques (cellules IIR d'ordre 2). Il est donc très efficace en temps de calcul mais, de par sa structure récursive, il peut devenir instable.

12.1.3. Caractéristiques des filtres FIR et IIR

Les qualités (indiquées en gras) et les défauts des filtres FIR et IIR sont présentés dans le tableau de la figure 12.1.

12.2. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

Avant de considérer la synthèse d'un filtre numérique, rappelons que celui-ci est décrit par sa fonction de transfert en z qui peut s'écrire sous deux formes équivalentes

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (12.5)$$

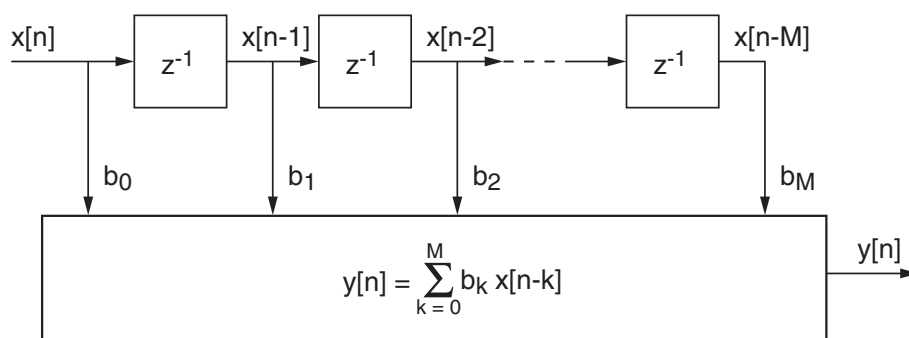
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (12.6)$$

La première forme sert essentiellement à l'analyse des performances du filtre (recherche des pôles et zéros), alors que de la deuxième on tire immédiatement l'équation aux différences qui servira à réaliser le filtre :

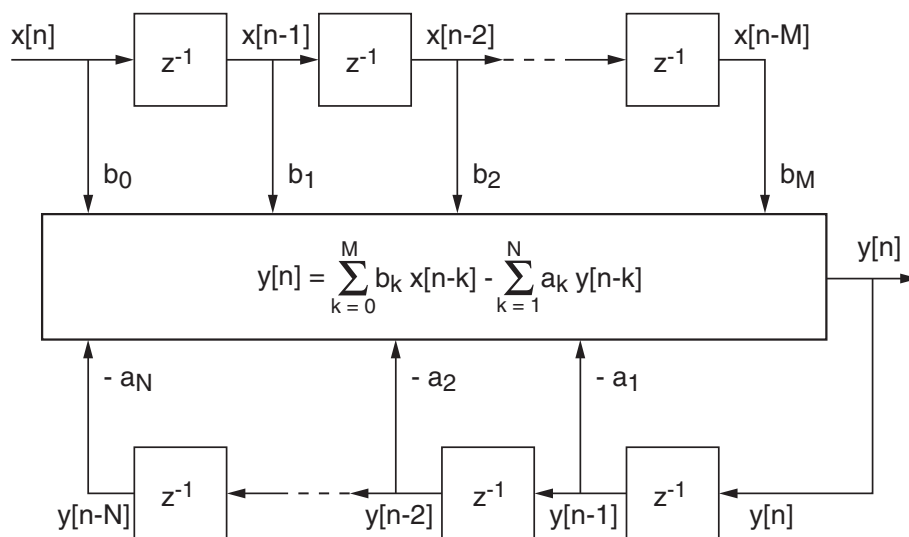
$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots \\ &\quad - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots \end{aligned}$$

Si l'on souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre, il suffit de remplacer l'opérateur de retard z^{-1} par sa transformée de Fourier

$$z^{-1} \Leftrightarrow \exp(-j\omega T_e) \equiv \exp(-j\Omega) \quad (12.7)$$



(a)



(b)

Caractéristiques	Filtres FIR ou MA	Filtres IIR ou ARMA
sélectivité	faible	élevée
ordre	élevé	faible
nombre d'opérations	élevé	faible
mémoire nécessaire	élevée	faible
temps de propagation constant (phase linéaire)	naturel	impossible au sens strict
stabilité	absolue	limitée
nombre de bits nécessaires	raisonnable	élevé
précision des coefficients	raisonnable	élevée
cycles limites	aucun	présents mais éliminables
filtres adaptatifs	possibles	difficiles

FIGURE 12.1.: Schémas fonctionnels et caractéristiques des filtres FIR et IIR

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

où Ω est la pulsation numérique ou normalisée qui se mesure en [rad/échantillon]. On obtient alors

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 \exp(-j\Omega) + \dots + b_n \exp(-jn\Omega)}{1 + a_1 \exp(-j\Omega) + \dots + a_n \exp(-jn\Omega)} \quad (12.8)$$

Comme l'exponentielle imaginaire est périodique, la réponse fréquentielle d'un filtre numérique est également périodique de période f_e et sa représentation se fait dans le domaine de fréquences allant de 0 à $f_e/2$ (ou f_e). Si l'on considère la pulsation numérique Ω , la représentation se fait alors de 0 à π (ou 2π).

On notera que les valeurs particulières de $H(0)$ (composante DC) ou $H(\pi)$ (fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2$) se calculent aisément et qu'elles valent :

$$H(j0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

$$H(j\pi) = \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots + b_n}{1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n}$$

Exemple Considérons un filtre passe-bas résonant d'ordre 2 décrit par

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.81z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - 1.7z + 0.81}$$

On en tire immédiatement deux valeurs particulières de la réponse fréquentielle : la composante DC ($z = 1$) et celle à la fréquence de Nyquist $f_e/2$ ($z = -1$) :

$$H(j0) = \frac{1}{1 - 1.7 + 0.81} = +9.091$$

$$H(j\pi) = \frac{-1}{1 + 1.7 + 0.81} = -0.285$$

En remplaçant l'opérateur de retard z^{-1} par son équivalent fréquentiel $\exp(-j\Omega)$, on peut calculer la réponse fréquentielle du filtre $H(j\Omega)$ qui s'écrit

$$H(j\Omega) = \frac{\exp(-j\Omega)}{1 - 1.7 \exp(-j\Omega) + 0.81 \exp(-j2\Omega)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + j 1.7 \sin(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega) - j 0.81 \sin(2\Omega)}$$

De cette fonction complexe, on tire facilement le module et l'argument de $H(j\Omega)$:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega))^2 + (1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega))^2}}$$

$$\angle H(j\Omega) = -\Omega - \arctan \left(\frac{1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega)} \right)$$

La figure 12.2 présente les réponses temporelles (impulsionnelle et indicielle) et fréquentielles (module et argument) de ce filtre.

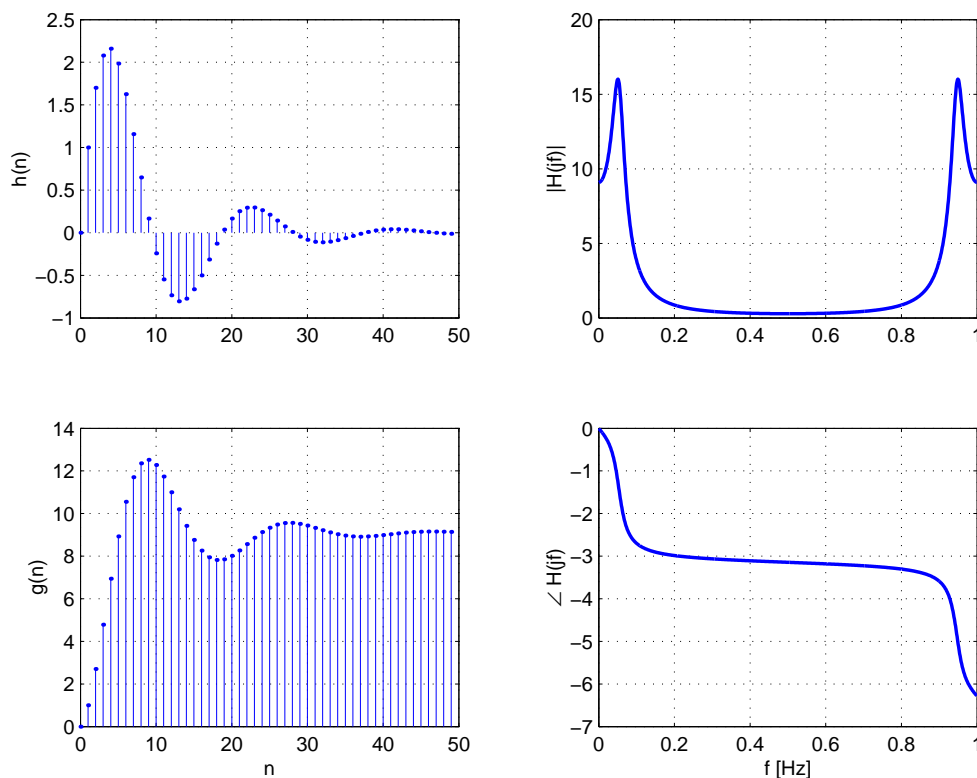


FIGURE 12.2.: Réponses temporelles et fréquentielles d'un filtre numérique passe-bas

12.3. Le problème de l'approximation

La synthèse des filtres numériques consiste à rechercher les coefficients a_k et b_k de la fonction de transfert $H(z)$ de manière à ce que la réponse harmonique du filtre satisfasse au cahier des charges fixé au préalable. Cette synthèse peut être basée sur les connaissances que l'on a de la réponse des filtres analogiques ou sur des méthodes spécifiques aux filtres numériques. Dans ce qui suit, on se contentera, partant des filtres analogiques, de rechercher des filtres numériques au comportement similaire.

Sachant que le comportement fréquentiel des filtres analogiques est complètement déterminé par la donnée de la fonction de transfert $H(s)$,

$$H(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \cdots + d_ns^n}{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \cdots + c_ns^n} \quad (12.9)$$

on cherche à obtenir le même type de réponse fréquentielle avec des filtres numériques décrits par

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_nz^{-n}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n}} \quad (12.10)$$

Comme les correspondances que l'on établira entre s et z conduisent toutes à des approximations des réponses temporelle et fréquentielle analogiques, on peut imaginer un grand nombre de transformations possibles. Parmi celles-ci, il en est deux

que l'on rencontre fréquemment et qui seules sont présentées ici : la *transformation associée* et la *transformation bilinéaire*.

12.4. La transformation associée

Cette transformation associe les pôles et zéros de $H(z)$ à ceux de $H(s)$. Autrement dit, connaissant la position des pôles et zéros du filtre analogique situés dans le demi-plan complexe, on construit un filtre numérique ayant les pôles et zéros correspondants situés dans un cercle de rayon unité (figure 12.3).

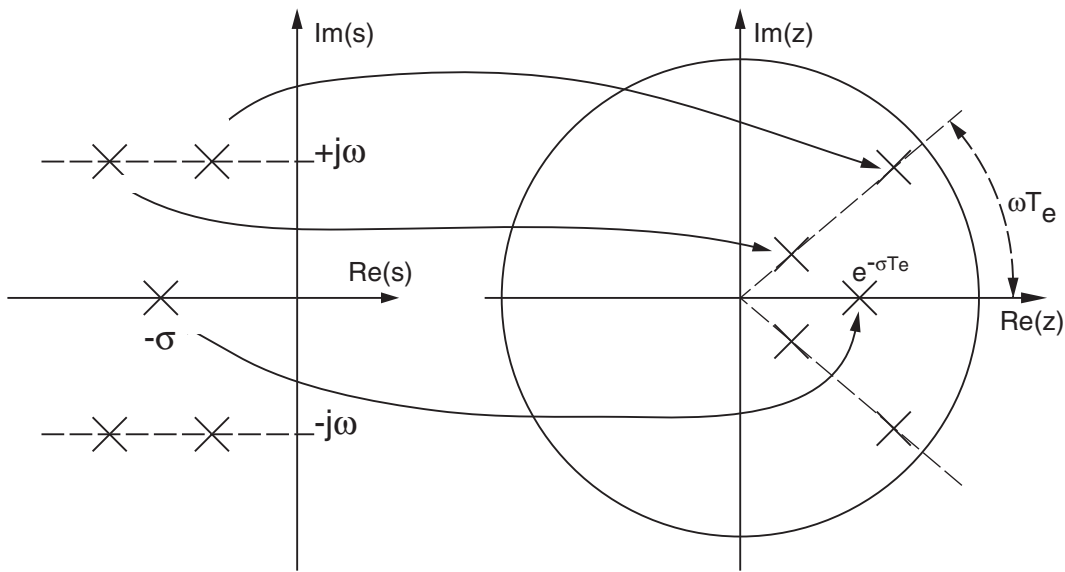


FIGURE 12.3.: Position des pôles analogiques et des pôles numériques

Sachant que la variable z représente un décalage temporel d'une période d'échantillonnage T_e , on a

$$z = \exp(s T_e) \quad (12.11)$$

On en déduit alors que la variable s peut simplement être remplacée par la fonction

$$s = \frac{1}{T_e} \ln(z) \quad (12.12)$$

qui, à une racine analogique r_a , fait correspondre une racine numérique r_n telle que

$$r_n = \exp(r_a T_e) \quad (12.13)$$

De manière équivalente, cette approche revient à relier les polynômes analogiques $P_a(s)$ aux polynômes numériques $P_n(z)$.

Considérant que tout filtre est représenté fondamentalement par des polynômes d'ordre 1 et 2, on peut se contenter d'analyser les deux situations suivantes.

1. À un polynôme analogique d'ordre 1 et sa racine r_a

$$P_{a1}(s) = 1 + s/\omega_c \quad \Rightarrow \quad r_a = -\omega_c \quad (12.14)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 1

$$P_{n1}(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec} \quad (12.15)$$

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) \quad (12.16)$$

2. À un polynôme analogique d'ordre 2 et ses racines $r_{a1,2}$

$$P_{c2}(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 \quad \Rightarrow \quad r_{a1,2} = -\sigma \pm j\omega_0 \quad (12.17)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 2

$$P_{n2}(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0) z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec} \quad (12.18)$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e \quad (12.19)$$

Une fois les correspondances polynomiales obtenues, il reste à ajuster le gain de $H(z)$ afin que, pour une fréquence donnée, on ait la même amplitude de la réponse fréquentielle en numérique qu'en analogique.

12.4.1. Exemple de transformation associée

Considérant un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 ayant sa fréquence de coupure en $f_c = 1 \text{ kHz}$ (figure 12.4), on désire réaliser un filtre numérique au comportement similaire sachant que l'on a choisi une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ de 10 kHz.

Solution On sait qu'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3 est décrit par une cellule d'ordre 1 suivie d'une cellule d'ordre 2 telles que

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)} \quad (12.20)$$

On en déduit que les pôles de ce filtre analogique valent

$$p_{a1} = -\omega_c = -2000 \pi$$

$$p_{a2,3} = -\omega_c \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) / 2 = -1000 \pi \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) \equiv -\sigma \pm j\omega_0$$

Tenant compte des équations (12.16) et (12.19), il vient :

1. un polynôme numérique d'ordre 1 :

$$P_1(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec}$$

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) = -0.5335$$

d'où

$$P_1(z) = 1 - 0.5335 z^{-1} \quad (12.21)$$

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

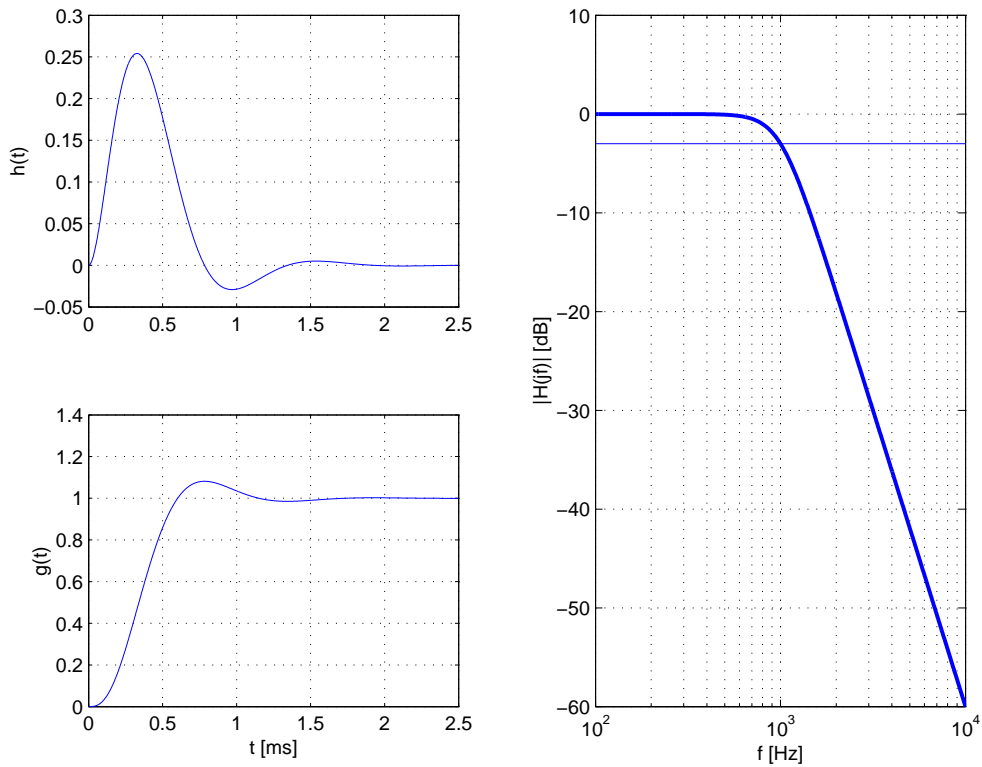


FIGURE 12.4.: Réponses d'un filtre analogique passe-bas de Butterworth

2. un polynôme numérique d'ordre 2 :

$$P_2(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0)z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec}$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) = \exp(-\pi/10) = 0.730 \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e = \pi\sqrt{3}/10 = 0.544$$

d'où

$$P_2(z) = 1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2} \quad (12.22)$$

Ces deux polynômes décrivent la fonction de transfert du filtre passe-bas numérique dont les gains G_1 et G_2 sont inconnus :

$$H(z) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{G_2}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

Il reste donc à adapter les gains de chaque cellule du filtre de manière à ce que l'amplitude du filtre numérique soit la même que celle du filtre analogique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit ici d'un filtre passe-bas, c'est le comportement DC des filtres qui doit être identique. Sachant que les valeurs DC des réponses analogique et numérique sont obtenues pour $s = 0$ et, respectivement, $z = 1$, il vient :

$$H(s \rightarrow 0) = 1$$

$$H(z \rightarrow 1) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335)} \frac{G_2}{(1 - 1.25 + 0.5335)} = \frac{G_1}{0.4665} \frac{G_2}{0.2835} = H(s \rightarrow 0) = 1$$

En choisissant $G_1 = 0.4665$ et $G_2 = 0.2835$, on obtient la fonction de transfert recherchée qui s'écrit dans l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z^2}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)}$$

Remarque On notera que l'égalité des ordres du numérateur et dénominateur conduit le filtre à répondre instantanément à l'excitation. Cette situation peu réaliste, en particulier pour un filtre passe-bas, nous incite à ajouter un retard unitaire z^{-1} à $H(z)$. Les fonctions de transfert s'écrivent alors dans l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})} z^{-1} \quad (12.23)$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)} \quad (12.24)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 12.5 où on les compare avec celles du filtre analogique.

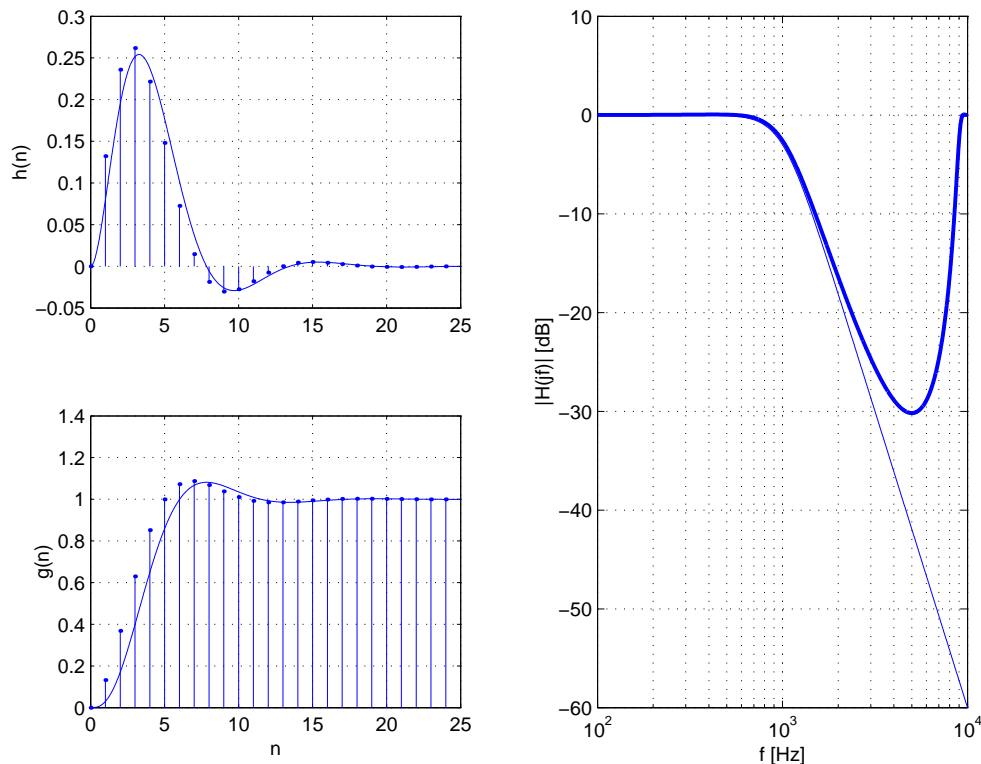


FIGURE 12.5.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation associée

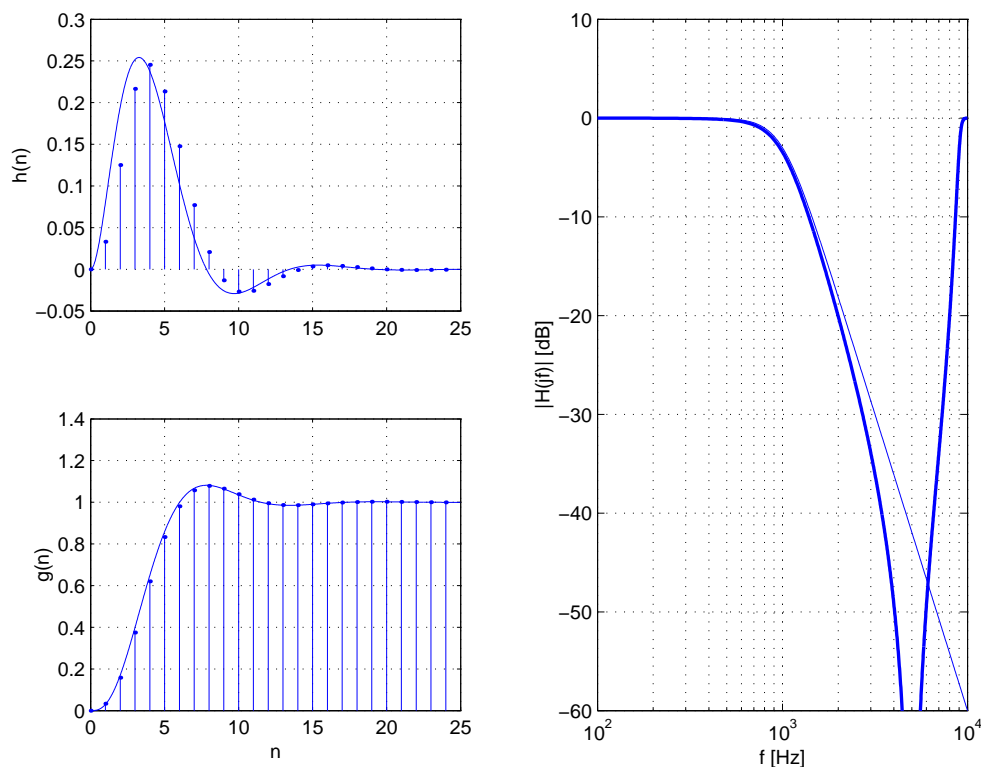


FIGURE 12.6.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par modification de la transformation associée

12.4.2. Modification de la transformation associée

En observant la réponse fréquentielle du filtre numérique, on remarquera que son atténuation à la fréquence de Nyquist ne dépasse pas 30 dB environ. Ceci représente un des inconvénients majeurs de la méthode. On peut pallier ce défaut en remplaçant les zéros de la fonction de transfert qui se situent en $z = 0$ par des zéros situés en $z = -1$. Comme le gain introduit par chaque nouveau zéro est égal à deux, il ne faut pas oublier de réduire d'autant le gain global. La nouvelle fonction de transfert s'écrit alors

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665 (z + 1)}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 (z + 1)}{(z^2 - 1.25z + 0.5335)} \quad (12.25)$$

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665 (1 + z^{-1})}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835 (1 + z^{-1})}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})} z^{-1} \quad (12.26)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle du filtre obtenu par la modification de la transformation associée sont représentées dans la figure 12.6 où on les compare avec celles du filtre analogique.

12.5. La transformation bilinéaire

12.5.1. Introduction

Le but de la transformation bilinéaire est de trouver une équation aux différences du filtre $H(z)$ dont la solution est proche de celle de l'équation différentielle du filtre analogique $H(s)$, solution que l'on obtient par intégration. Parmi les différentes méthodes numériques d'intégration, il en est une qui offre un bon compromis entre la qualité des résultats et la facilité de mise en oeuvre ; il s'agit de l'intégration trapézoïdale. Celle-ci revient à remplacer l'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x(t)dt = \int_0^{t-T_e} x(t)dt + \int_{t-T_e}^t x(t)dt$$

par l'opération suivante

$$y[n] = y[n-1] + \frac{(x[n] + x[n-1])}{2} T_e$$

On montre alors aisément que cela revient à remplacer la variable s par une fonction bilinéaire en z

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (12.27)$$

Remarque Si l'on se souvient que l'on a

$$z = e^{+sT_e} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{1}{T_e} \ln(z)$$

il est intéressant de relever que la transformation bilinéaire revient à ne conserver que le premier terme du développement en série de la fonction logarithme naturel

$$\ln(z) = 2 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \dots$$

12.5.2. Transformation bilinéaire d'une fonction de transfert

Comme tout filtre est représenté par des produits de polynômes d'ordre 1 et 2, on se contente d'analyser les deux situations suivantes dans lesquelles on remplacera la variable s par la fonction

$$s \rightarrow \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2}{T_e} \quad (12.28)$$

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

Polynôme d'ordre 1 Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a1}(s) = a_0 + a_1 s \quad (12.29)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 1

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_0 + a_1 \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \gamma) + (a_0 - a_1 \gamma) z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_1(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12.30)$$

$$\text{avec } q_0 = a_0 + a_1 \gamma \quad (12.31)$$

$$q_1 = a_0 - a_1 \gamma \quad (12.32)$$

Polynôme d'ordre 2 Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a2}(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad (12.33)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 2

$$\begin{aligned} F_2(z) &= a_0 + a_1 \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a_2 \left(\gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2) + 2(a_0 - a_2 \gamma^2) z^{-1} + (a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2) z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_2(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (12.34)$$

$$\text{avec } q_0 = a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 \quad (12.35)$$

$$q_1 = 2(a_0 - a_2 \gamma^2) \quad (12.36)$$

$$q_2 = a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 \quad (12.37)$$

12.5.3. Exemple de transformation bilinéaire

Reprenons l'exemple du filtre de Butterworth d'ordre 3 vu précédemment

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)}$$

avec $\omega_c = 2\pi f_c = 2000\pi \text{ rad/sec}$ et $f_e = 10 \text{ kHz}$.

Solution Prenant en compte les valeurs numériques, on a $\gamma = 2/T_e = 2 \cdot 10^4$ [sec⁻¹]. La transformation des polynômes donne alors les résultats suivants :

1. Polynôme d'ordre 1 : $P_{a1}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= +4.1831 \\ q_1 &= a_0 - a_1\gamma = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= -2.1831 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{F_1(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{q_0 + q_1 z^{-1}} = \frac{1 + z^{-1}}{4.1831 - 2.1831 z^{-1}} \\ &= \frac{0.239 (1 + z^{-1})}{1 - 0.5219 z^{-1}} \end{aligned}$$

2. Polynôme d'ordre 2 : $P_{a2}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s + 2.533 \cdot 10^{-8} s^2$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +14.315 \\ q_1 &= 2(a_0 - a_2\gamma^2) = 2(1 - 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8) \\ &= -18.264 \\ q_2 &= a_0 - a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +7.949 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1}{F_{n2}(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{14.315 - 18.264 z^{-1} + 7.949 z^{-2}} \\ &= \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \end{aligned}$$

La fonction de transfert globale est ainsi égale au produit de ces deux fonctions de transfert partielles qui correspondent à deux cellules passe-bas à gain unité. La fonction de transfert globale s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.239 (1 + z^{-1})}{1 - 0.5219 z^{-1}} \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \quad (12.38)$$

$$H(z) = \frac{0.239 (z + 1)}{z - 0.5219} \frac{0.06986 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.2759 z + 0.5553} \quad (12.39)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 12.7 où elles sont comparées avec celles du filtre analogique.

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

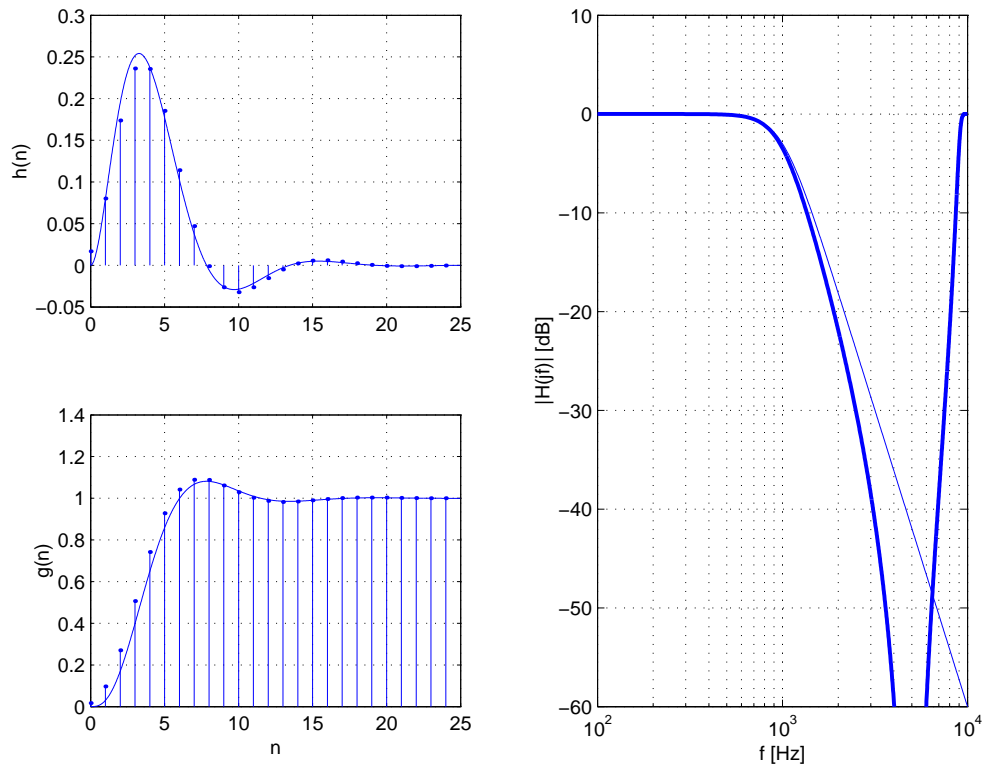


FIGURE 12.7.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation bilinéaire

12.6. Compensation de la distorsion des fréquences

Si l'on analyse plus en détail les effets de la transformation bilinéaire, on remarque que celle-ci entraîne une relation non-linéaire entre les pulsations analogique ω et numérique Ω . En effet, partant de la définition de la transformation bilinéaire

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12.40)$$

on obtient dans le domaine fréquentiel

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\omega T_e)}{1 + \exp(-j\omega T_e)} \quad (12.41)$$

Sachant que ωT_e représente la pulsation numérique Ω , on a

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\Omega)}{1 + \exp(-j\Omega)}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\exp(+j\Omega/2)$, il vient

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{\exp(+j\Omega/2) - \exp(-j\Omega/2)}{\exp(+j\Omega/2) + \exp(-j\Omega/2)} = \frac{2}{T_e} \frac{2j \sin(\Omega/2)}{2 \cos(\Omega/2)}$$

12.6. Compensation de la distorsion des fréquences

On en déduit alors que les pulsations analogique ω et numérique Ω sont reliées entre elles par la relation

$$\omega = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2f_e \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (12.42)$$

On voit ainsi que le domaine des fréquences analogiques variant de 0 à $+\infty$ est reporté sur un domaine de pulsation numérique allant de 0 à $+\pi$ (figure 12.8). On notera que c'est seulement pour les basses fréquences ($\Omega \ll 1$) que $\tan(\Omega/2)$ peut être assimilé à $\Omega/2$. Ce qui fait que l'effet de la distorsion est particulièrement marqué lorsque la fréquence d'échantillonnage n'est pas beaucoup plus élevée que la fréquence caractéristique du filtre.

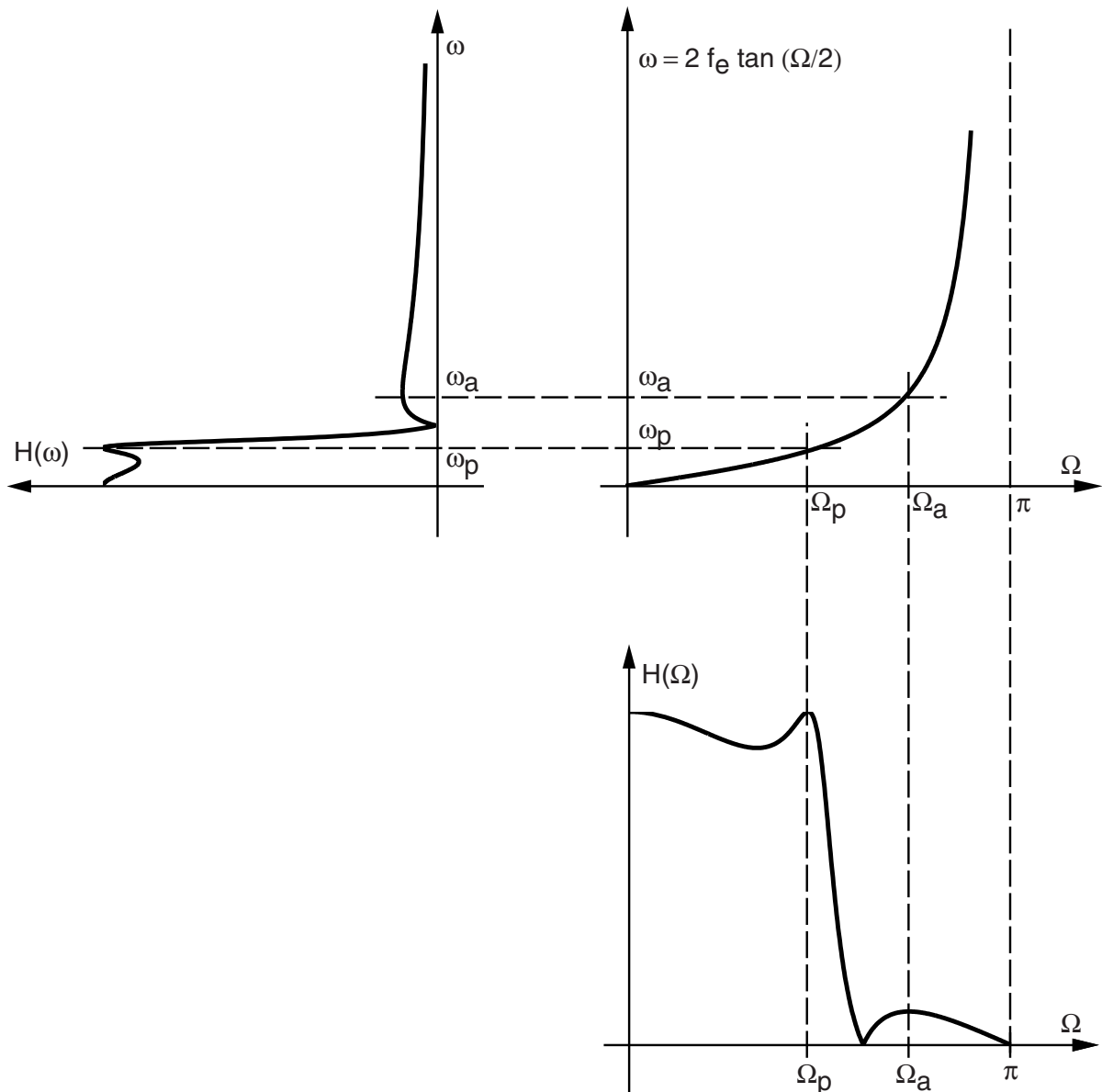


FIGURE 12.8.: Relation entre pulsations analogique et numérique

Cette distorsion des fréquences peut être corrigée en remplaçant la pulsation caractéristique ω_c par une pulsation ω_d prenant en compte l'effet de la distorsion avant

d'entreprendre le calcul des coefficients du filtre numérique.

12.7. Synthèse d'un filtre numérique récursif

Considérons comme exemple la réalisation d'un filtre numérique de Tchebicheff d'ordre 2, d'ondulation $r = 1 \text{ dB}$, de bande passante $f_r = 3 \text{ kHz}$ et de fréquence d'échantillonnage $f_e = 10 \text{ kHz}$.

On notera que, dans un but illustratif, on a choisi la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2 = 5 \text{ kHz}$ très proche de la fréquence caractéristique du filtre $f_r = 3 \text{ kHz}$ et que cela conduira à une forte distorsion fréquentielle si l'on n'effectue pas sa compensation.

La synthèse d'un filtre numérique récursif se fait en quatre étapes :

1. *Calcul de la pulsation caractéristique Ω_r et celle de prédistorsion ω_d :*

$$\Omega_r = 2\pi \frac{f_r}{f_e} = 2\pi \frac{3 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.6 \pi$$

$$\omega_d = 2 f_e \tan\left(\frac{\Omega_r}{2}\right) = 20 \cdot 10^3 \tan(0.3 \pi) = 27 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$$

On notera que l'on a toujours $\omega_d > \omega_r = 2\pi f_r = 18.8 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$.

2. *Recherche du filtre analogique normalisé satisfaisant au gabarit :*
Dans cet exemple, le filtre est un passe-bas de Tchebicheff d'ordre 2 et d'ondulation 1 dB. Les tables nous fournissent le polynôme normalisé qui vaut

$$P_{n,2}(s) = \frac{1}{H_n(s)} = 1 + 0.996 s + 0.907 s^2$$

3. *Calcul du polynôme de réalisation avec prédistorsion :*
On effectue le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_d} = 3.63 \cdot 10^{-5} s$$

et on obtient le polynôme de réalisation avec prédistorsion

$$P_{2,d}(s) = 1 + 3.617 \cdot 10^{-5} s + 1.197 \cdot 10^{-9} s^2$$

4. *Calcul de la fonction de transfert du filtre numérique :*
En appliquant la transformation bilinéaire au polynôme de réalisation $P_{2,d}(s)$ avec $\gamma = 2 f_e = 2 \cdot 10^4 [\text{sec}^{-1}]$, on obtient les coefficients

$$q_0 = a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +2.202$$

$$q_1 = 2 (a_0 - a_2 \gamma^2) = +1.043$$

$$q_2 = a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +0.755$$

permettant d'écrire la fonction de transfert numérique suivante

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{2.202 + 1.043z^{-1} + 0.755z^{-2}} \\ &= 0.454 \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + 0.473z^{-1} + 0.343z^{-2}} \end{aligned}$$

Les réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique sont présentées dans la figure 12.9a. Dans un but de comparaison, on a également calculé la fonction de transfert sans prédistorsion en effectuant directement la transformation bilinéaire de $H(s)$. Ce qui a donné

$$H_{spd}(z) = 0.325 \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0.0137z^{-1} + 0.313z^{-2}}$$

Sa réponse fréquentielle est présentée dans la figure 12.9b. On remarquera combien la correction de distorsion est nécessaire pour avoir, comme demandé, un gain unité à la fréquence caractéristique $f_r = 3 \text{ kHz}$.

Remarque Tout le travail effectué dans les points 1) à 4) ci-dessus pour obtenir la fonction de transfert $H(z)$ se fait beaucoup plus simplement dans Matlab avec les commandes suivantes :

```
n = 2; r = 1; fr = 3e3;
fe = 10e3; fn = fe/2;
[num,den] = cheby1(n,r,fr/fn);
num = num/sum(num)*sum(den); % gain DC = 1
```

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

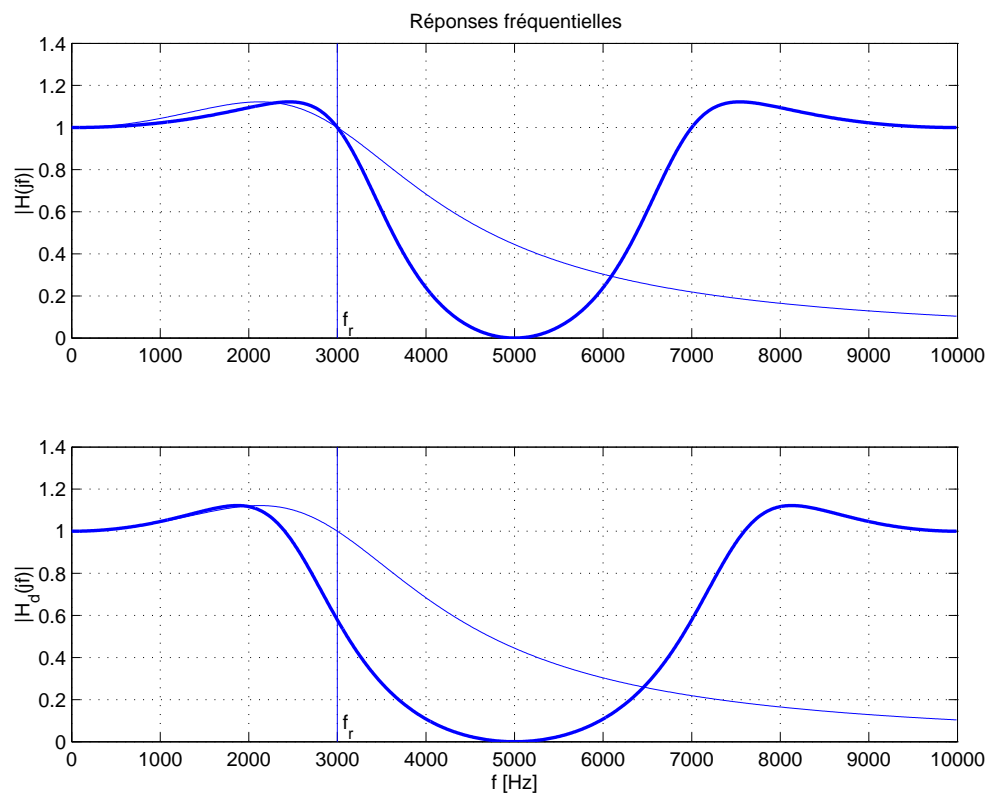


FIGURE 12.9.: Réponses fréquentielles des filtres analogiques et numériques avec et sans prédistorsion

12.8. Exercices

RII 1 Partant d'un filtre passe-bas RC, trouvez son équivalent numérique $H(z)$. Pour ce faire :

1. écrivez l'équation différentielle du circuit RC ;
2. discrétisez cette équation ;
3. écrivez l'équation aux différences du filtre et dessinez son schéma fonctionnel ;
4. calculez sa fonction de transfert $H(z)$;

RII 2 Dans l'exercice précédent, on choisit pour le filtre numérique une période d'échantillonnage égale au dixième de la constante de temps RC du filtre analogique.

1. calculez numériquement sa fonction de transfert $H(z)$;
2. que vaut l'instant caractéristique K_c ? quelle sera la durée du régime transitoire ?
3. si $x[n] = \epsilon[n]$, calculez $Y(z)$; que valent $y[0]$ et $y[\infty]$? esquissez $y[n]$;
4. que vaut la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ du filtre numérique ;
5. calculez $H(j\Omega)$ lorsque la fréquence du signal d'entrée vaut $f = 0, 1/(2\pi RC), f_e/2$? esquissez le module de $H(j\Omega)$;
6. comparez à la réponse fréquentielle du filtre analogique.

RII 3 Calculez les équivalents numériques $H_a(z)$ et $H_b(z)$ d'un filtre RC obtenus par les transformations associée et bilinéaire lorsque $T_e = RC/10$. Comparez ces deux résultats entre eux et avec celui de l'exercice précédent.

RII 4 On souhaite réaliser l'équivalent numérique $H(z)$ d'un filtre analogique passe-haut de type Butterworth devant travailler jusqu'à 10 kHz dont la fonction de transfert est décrite par

$$H(s) = \frac{(s/\omega_c)^2}{1 + 1.414 \cdot (s/\omega_c) + (s/\omega_c)^2} \quad \text{avec} \quad f_c = 1 \text{ kHz}$$

Pour ce faire :

1. esquissez le Bode d'amplitude du filtre analogique ;
2. choisissez la fréquence d'échantillonnage ;
3. calculez son équivalent $H_a(z)$ à partir de la transformation associée ;
4. calculez son équivalent $H_b(z)$ à partir de la transformation bilinéaire ;
5. écrivez les équations aux différences correspondantes permettant ces deux réalisations ;
6. dessinez leur schéma fonctionnel ;
7. que valent $H(\Omega = 0)$ et $H(\Omega = \pi)$ pour les 2 filtres ?

12. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

R11 5 On désire réaliser un filtre numérique à partir du filtre analogique décrit par

$$H(s) = \frac{5 \cdot 10^{-3} s}{1 + 5 \cdot 10^{-3} s + s^2}$$

1. dessinez les pôles et zéros de $H(s)$ dans le plan complexe ; esquissez son diagramme de Bode ; de quel type de filtre s'agit-il ?
2. après avoir choisi une fréquence d'échantillonnage qui vous paraît raisonnable, calculez son équivalent numérique $H(z)$ à l'aide de la transformation bilinéaire ;
3. dessinez les pôles et zéros de $H(z)$ dans le plan complexe ; où se situent-ils par rapport au cercle de rayon unité ?

R11 6 Considérant une cellule analogique biquadratique décrite par

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

écrivez un programme (en pseudo-langage) permettant de passer du filtre analogique à sa réalisation numérique. Pour cela :

1. écrivez une procédure ou une fonction permettant de transformer $H(s)$ en $H(z)$ à l'aide de la transformation bilinéaire ; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
2. écrivez une procédure ou une fonction calculant $y[n]$ à partir des paramètres de la cellule biquadratique et de son signal d'entrée $x[n]$; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
3. tenant compte de ce qui vient d'être fait, écrivez un programme permettant de réaliser le filtre suivant

$$H(s) = \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{\omega_2}{s^2 + 2\zeta\omega_2 s + \omega_2^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

Pour relier votre filtre au monde extérieur, utilisez les procédures `AnalogIn` (`var Value: real`) et `AnalogOut` (`Value: real`) .

4. votre programme peut être testé de manière simple à partir des instants caractéristiques et des valeurs initiale et finale de la réponse indicielle du filtre ; calculez ces valeurs.

N.B. : Les entrées (`AnalogIn`) se font sur la base d'interruptions commandées par l'horloge interne ; les sorties (`AnalogOut`) sont restituées immédiatement après les calculs.

13. Synthèse des filtres non récursifs

13.1. Introduction

Les filtres non récursifs que l'on appelle également filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) se distinguent des filtres récursifs étudiés dans le chapitre précédent par les points suivants :

- ils sont toujours stables ;
- ils peuvent être conçus pour avoir une phase linéaire exacte ;
- ils nécessitent généralement plus de matériel et de temps de calcul.

Un filtre non récursif d'ordre N comporte $N + 1$ coefficients et peut être décrit de manière équivalente par :

1. sa réponse impulsionnelle de longueur $L = N + 1$

$$h[n] = \{h[0], h[1], h[2], \dots, h[N]\} = \sum_{k=0}^N h[k] \delta[n - k] \quad (13.1)$$

2. son équation aux différences

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k] x[n - k] \quad (13.2)$$

3. sa fonction de transfert d'ordre N

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \quad (13.3)$$

4. sa réponse fréquentielle que l'on évalue en remplaçant z^{-1} par $e^{-j\Omega}$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-jn\Omega} \quad (13.4)$$

13.2. Spécifications

Les spécifications d'un filtre se donnent sous la forme d'un gabarit en valeurs réelles ou relatives (dB). Un exemple de gabarit pour un filtre passe-bas est illustré dans la figure 13.1. On y trouve :

1. la bande passante $[0, \Omega_p]$;

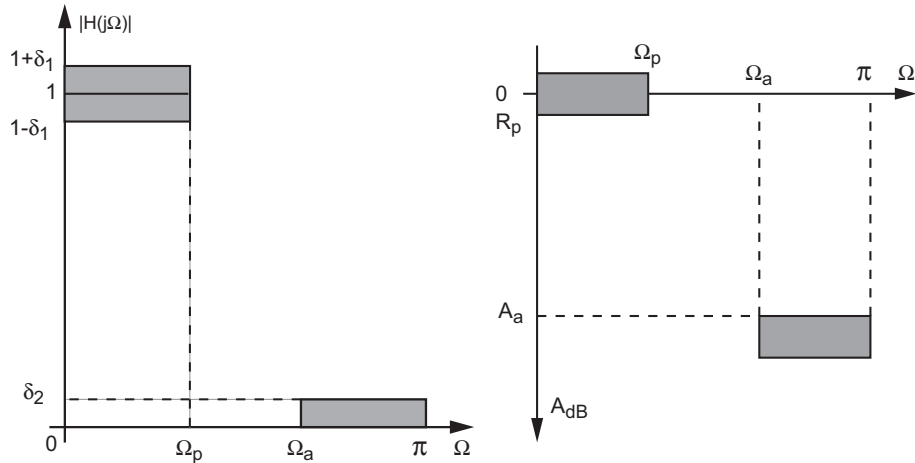


FIGURE 13.1.: Gabarit d'un filtre

2. les bandes de transition (Ω_p, Ω_a) et d'arrêt $[\Omega_a, \pi]$;
3. l'ondulation acceptée dans la bande passante, exprimée par δ_1 ou R_p [dB] ;
4. l'atténuation souhaitée dans la bande d'arrêt, exprimée par δ_2 ou A_a [dB].

Le gain du filtre passe-bas valant 1 lorsque $\Omega \rightarrow 0$, les relations entre les valeurs réelles ou relatives du gabarit sont alors définies comme suit :

$$R_p = |20 \log(1 \pm \delta_1)| > 0 \quad (13.5)$$

$$A_a = -20 \log(\delta_2) > 0 \quad (13.6)$$

ou inversement :

$$\delta_1 = \pm (10^{+R_p/20} - 1) \quad (13.7)$$

$$\delta_2 = 10^{-A_a/20} \quad (13.8)$$

13.3. Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

De manière générale, un filtre RIF ne possède aucune propriété particulière concernant le module ou la phase de la réponse fréquentielle mis à part que c'est le seul type de filtres pouvant offrir une phase linéaire exacte (qui est une des propriétés du filtre idéal). C'est donc essentiellement pour cette propriété que l'on utilise les filtres à réponse impulsionnelle finie.

13.3.1. Réponses impulsionnelle et fréquentielle

Dans le cas où on désire avoir une phase linéaire, la réponse impulsionnelle doit posséder une symétrie paire ou une symétrie impaire ou, de manière équivalente, une symétrie axiale ou ponctuelle. La justification en est donnée ci-dessous.

Symétrie paire

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie paire par rapport à $N_s = 3$ (figure 13.2a). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle paire $h_p[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est réelle.

Le décalage temporel (ici, un retard) nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_p(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_p| \\ \angle H = \{0, \pm\pi\} - N_s\Omega \end{cases} \quad (13.9)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_p(j\Omega)$ et la phase varie linéairement avec la pulsation. Le cas échéant, on devra, ajouter $\pm\pi$ à cette phase linéaire pour tenir compte de la valeur négative éventuelle de $H_p(j\Omega)$.

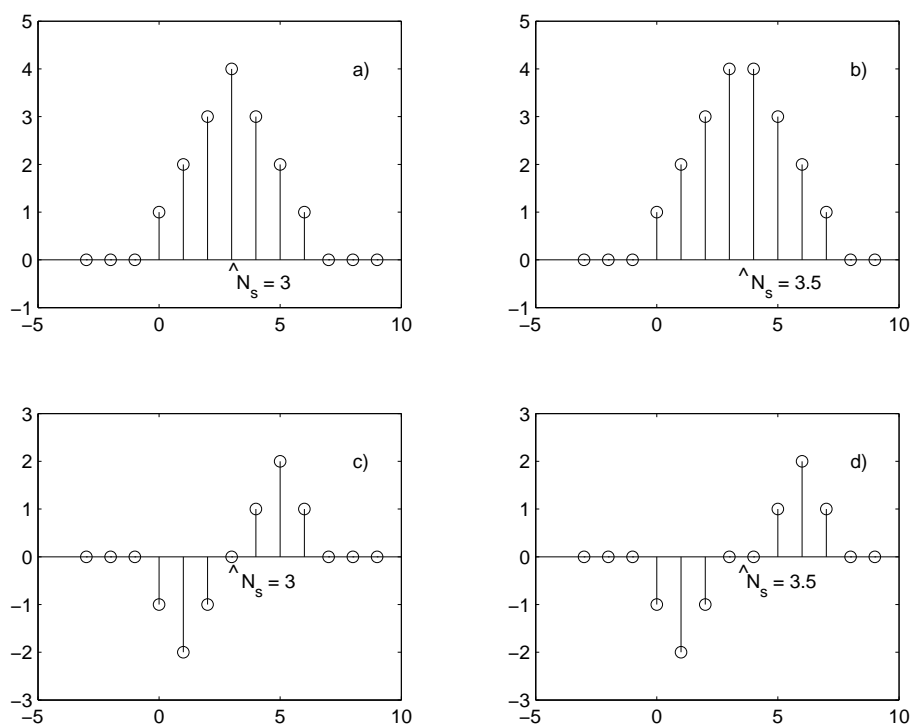


FIGURE 13.2.: Réponses impulsionnelles à symétrie paire ou impaire

Symétrie impaire

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie impaire par rapport à $N_s = 3$ (figure 13.2b). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle impaire $h_i[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est purement imaginaire.

Le décalage temporel nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_i(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_i| \\ \angle H = \pm\pi/2 - N_s\Omega \end{cases} \quad (13.10)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_i(j\Omega)$ et sa phase varie linéairement avec la pulsation à partir de $\pm\pi/2$ suivant le signe de la valeur imaginaire.

Remarque

On peut bien sûr considérer des filtres d'ordre N impair (figures 13.2c et 13.2d). Dans ce cas, l'axe ou le point de symétrie se situe entre 2 valeurs de la réponse impulsionnelle $h[n]$ et le déphasage linéaire s'écrira $-(N_s + \frac{1}{2})\Omega$. Dans le cadre de ce cours, on n'analysera que des filtres d'ordre N pair (c'est-à-dire de longueur $L = N + 1$ impaire) dont le point ou axe de symétrie se situe obligatoirement sur une valeur entière de l'axe n .

Exemple

Considérons comme exemple un filtre causal dont la réponse impulsionnelle finie (figure 13.3a) est décrite par une séquence non-nulle de longueur $L = 9$ à symétrie paire

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, +5, +4, +3, +2, +1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Par transformation en z de cette réponse impulsionnelle, on obtient la fonction de transfert du filtre RIF :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7} + 1z^{-8} \\ &= z^{-8} (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 1z^8) \end{aligned}$$

On en conclut que ce filtre RIF, décrit par un polynôme d'ordre $N = 8$, possède 8 pôles situés en $z = 0$ et 8 zéros dont les positions dans le plan complexe sont présentées dans la figure 13.3b.

En remplaçant l'opérateur de retard z^{-1} par sa transformée de Fourier $e^{-j\Omega}$, on obtient la réponse fréquentielle du filtre

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{k=0}^N h[k] e^{-j\Omega k} \\ &= 1 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 4e^{-j3\Omega} + 5e^{-j4\Omega} + 4e^{-j5\Omega} + 3e^{-j6\Omega} + 2e^{-j7\Omega} + 1e^{-j8\Omega} \end{aligned}$$

En mettant en évidence le phaseur central $e^{-j4\Omega}$, on obtient une forme illustrant clairement la symétrie paire du filtre

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 5 + 4e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 2e^{-j3\Omega} + 1e^{-j4\Omega})$$

13.3. Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

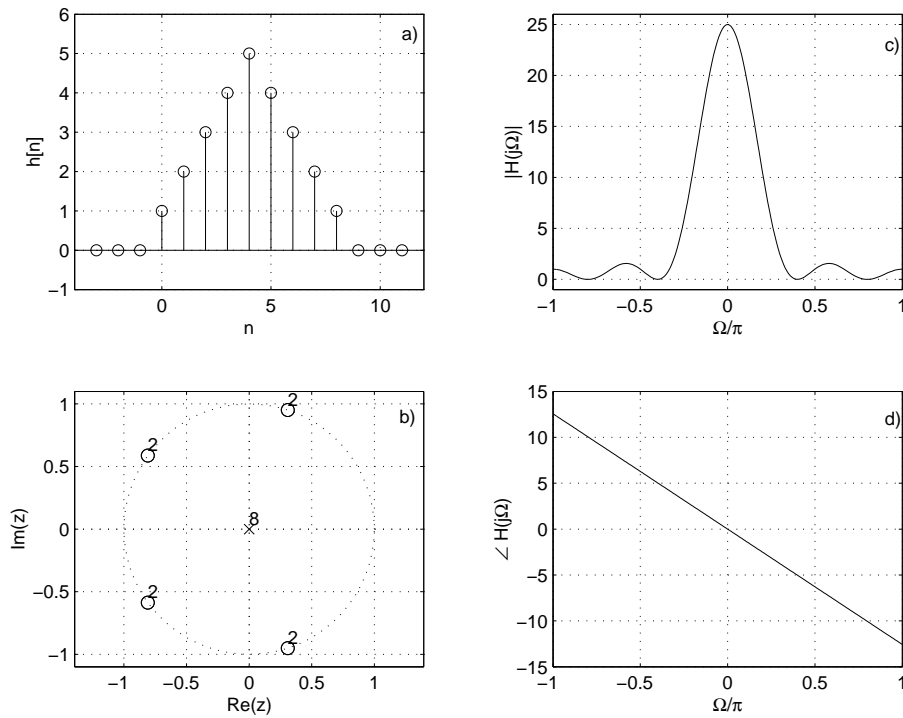


FIGURE 13.3.: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie paire

Utilisant la formule d'Euler $2 \cos \varphi = \exp(+j\varphi) + \exp(-j\varphi)$, on obtient finalement

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega))$$

Ce résultat montre à l'évidence que l'on a affaire à un filtre à phase linéaire puisque le seul terme complexe de l'expression est le phaseur $e^{-j4\Omega}$. Ce filtre RIF possède donc une réponse fréquentielle en amplitude (figure 13.3c) qui vaut

$$|H(j\Omega)| = |5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega)|$$

et une phase (figure 13.3d) décrite par

$$\angle H(j\Omega) = -4\Omega$$

À titre de comparaison, il est intéressant de tracer les mêmes graphes (figure 13.4) pour un filtre réalisé avec une réponse impulsionnelle similaire à la précédente mais avec une symétrie impaire cette fois-ci :

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 0 - 4e^{-j\Omega} - 3e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega} - 1e^{-j4\Omega}) \\ &= 2j e^{-j4\Omega} (4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega)) \\ &= 2 |(4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega))| \angle + \pi/2 - 4\Omega \end{aligned}$$

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

On peut relever que la symétrie paire conduit à un filtre passe-bas alors que la symétrie impaire fournit un filtre passe-haut ou passe-bande. Plus généralement, pour obtenir passe-haut ou passe-bande, il suffit que la somme des coefficients soient nulle

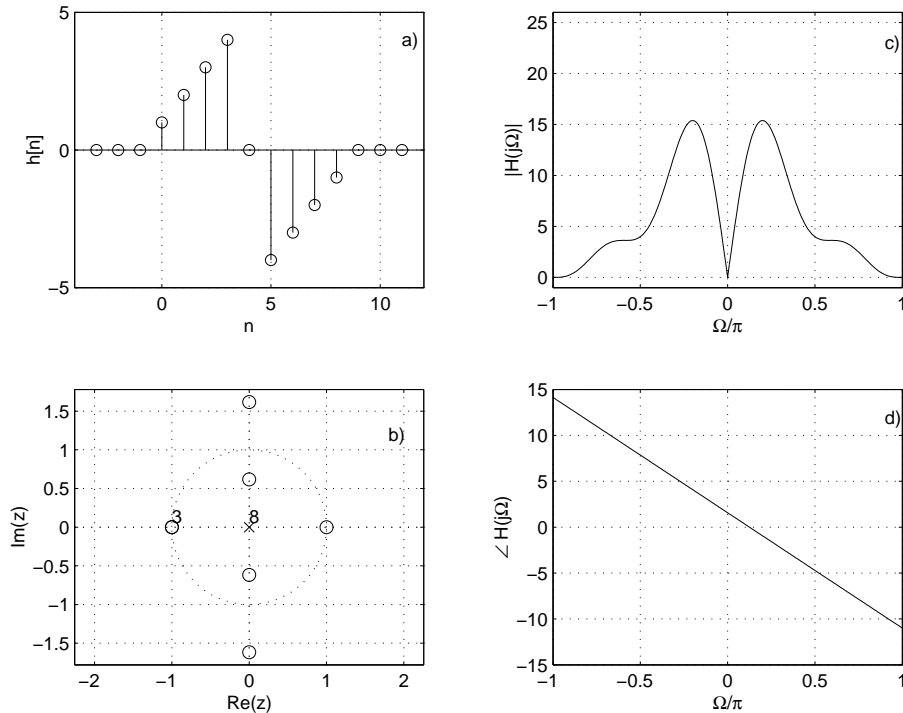


FIGURE 13.4.: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie impaire

13.4. Synthèse par fenêtrage

13.4.1. Principe du fenêtrage

Le point de départ de la synthèse des filtres RIF est donné par la considération des réponses impulsionnelles des filtres idéaux. Comme celles-ci sont infiniment longues et non causales, on voit immédiatement que les filtres idéaux ne sont pas réalisables. On doit donc manifestement se contenter d'une approximation de leurs réponses en les tronquant avant de les rendre causales.

Pour voir plus précisément comment cela se passe, considérons la réponse fréquentielle $H_d(j\omega)$ d'un filtre analogique passe-bas idéal (figure 13.5a). Sa réponse impulsionnelle $h_d(t)$ se calcule par transformation de Fourier inverse. On obtient ainsi une réponse temporelle en forme de sinus cardinal et de longueur infinie (figure 13.5b).

De manière à ce que ce filtre soit réalisable, il faut tronquer cette réponse en respectant sa symétrie paire (figure 13.5d). On obtient alors un filtre à réponse impulsionnelle de durée finie, mais non causale puisque $h(t)$ n'est pas nulle pour $t < 0$.

Un décalage de cette réponse à symétrie paire suffit à rendre le filtre causal (figure 13.5f), donc à phase linéaire (figure 13.5e). Bien entendu, le module de sa réponse fréquentielle ne sera plus qu'une approximation de l'idéal (figure 13.5c).

D'un point de vue mathématique, le fait de tronquer la réponse impulsionnelle $h_d(t)$ revient à multiplier celle-ci par une fenêtre rectangulaire $w_r(t)$ et la réponse impulsionnelle s'écrit alors :

$$h(t) = h_d(t) \cdot w_r(t) \quad (13.11)$$

Pour un filtre numérique, on aura de manière équivalente :

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_r[n] \quad (13.12)$$

13.4.2. Effet de la troncation

L'opération de troncation qui, dans une première approche peut sembler anodine, modifie sensiblement la réponse fréquentielle et entraîne des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt. Ceci provient de la convolution entre la réponse fréquentielle du filtre idéal et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre rectangulaire :

$$H(j\Omega) = H_d(j\Omega) \otimes W(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(j\theta) W(j\Omega - j\theta) d\theta \quad (13.13)$$

La figure 13.6 montre à l'évidence que l'ondulation caractérisant la réponse obtenue $H(j\Omega)$ provient du spectre $W(j\Omega)$ de la fenêtre choisie, ici rectangulaire.

Afin d'obtenir le meilleur compromis possible entre une faible ondulation et une bande de transition étroite, on sera donc amené par la suite à choisir une fenêtre $w[n]$ dont le comportement fréquentiel est satisfaisant du point de vue du filtre à réaliser. C'est-à-dire que l'on cherchera un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur des bandes de transition.

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

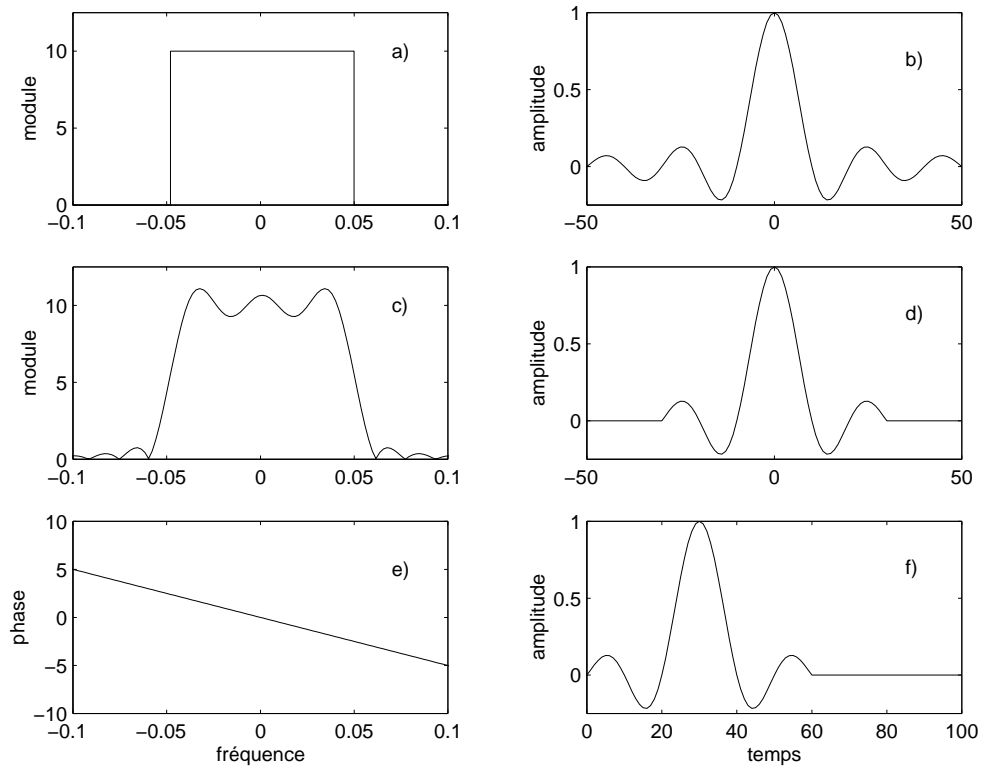


FIGURE 13.5.: Passage du filtre idéal au filtre réalisable

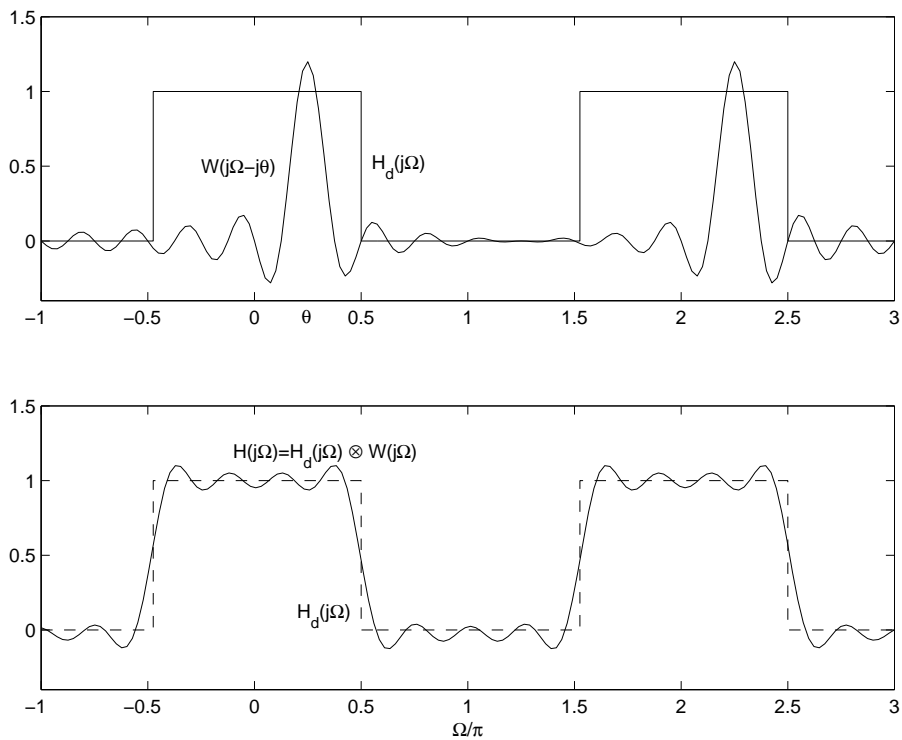


FIGURE 13.6.: Convolution circulaire dans le domaine des fréquences

13.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

Comme la synthèse par fenêtrage utilise les réponses impulsionnelles des filtres idéaux, il est nécessaire de les connaître. Ces réponses impulsionnelles sont calculées en partant des réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande (figure 13.7).

13.5.1. Filtre passe-bas

Avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_b(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{si } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (13.14)$$

Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

$$h_b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_b(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (13.15)$$

Tenant compte de la réponse fréquentielle idéale du filtre passe-bas, il vient :

$$\begin{aligned} h_b[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} \exp(+jn\Omega) d\Omega \\ &= \frac{\exp(+jn\Omega_c) - \exp(-jn\Omega_c)}{j2\pi n} \end{aligned}$$

Utilisant les relations d'Euler, on obtient finalement :

$$h_b[n] = \frac{\Omega_c \sin(n\Omega_c)}{\pi n\Omega_c} \quad -\infty < n < +\infty \quad (13.16)$$

Cette réponse temporelle est infiniment longue et non causale. Afin de la rendre causale, il faut tout d'abord la tronquer pour avoir une réponse impulsionnelle de d'ordre N puis la décaler de la moitié de sa longueur.

En choisissant de travailler avec une réponse impulsionnelle d'ordre N pair centrée en $N_s = N/2$, il vient :

$$h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c \sin((n-N_s)\Omega_c)}{\pi (n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.17)$$

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

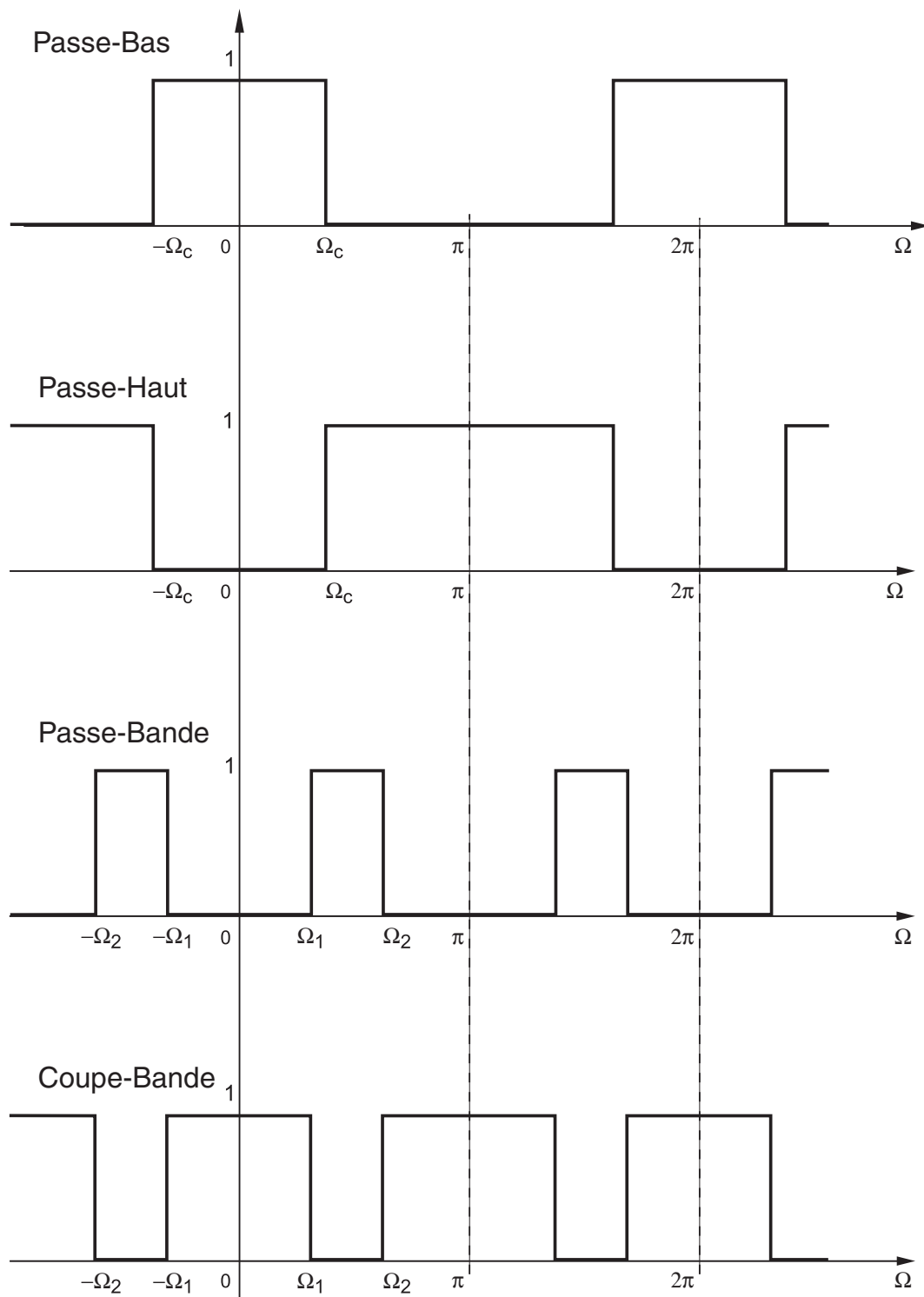


FIGURE 13.7.: Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres standard

13.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

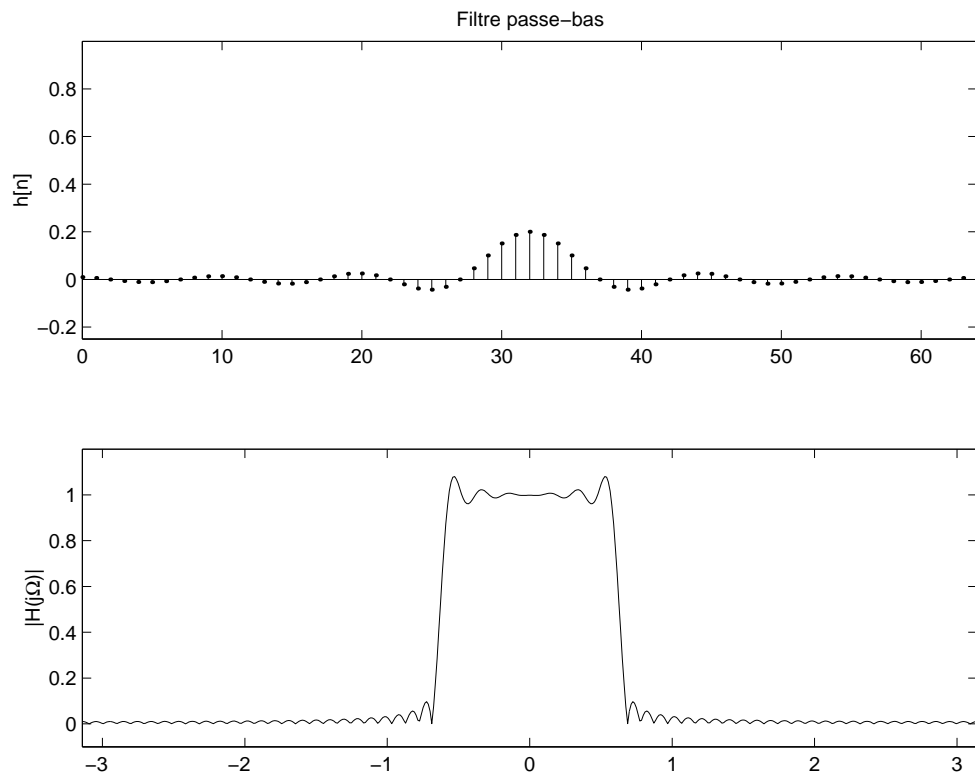


FIGURE 13.8.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bas

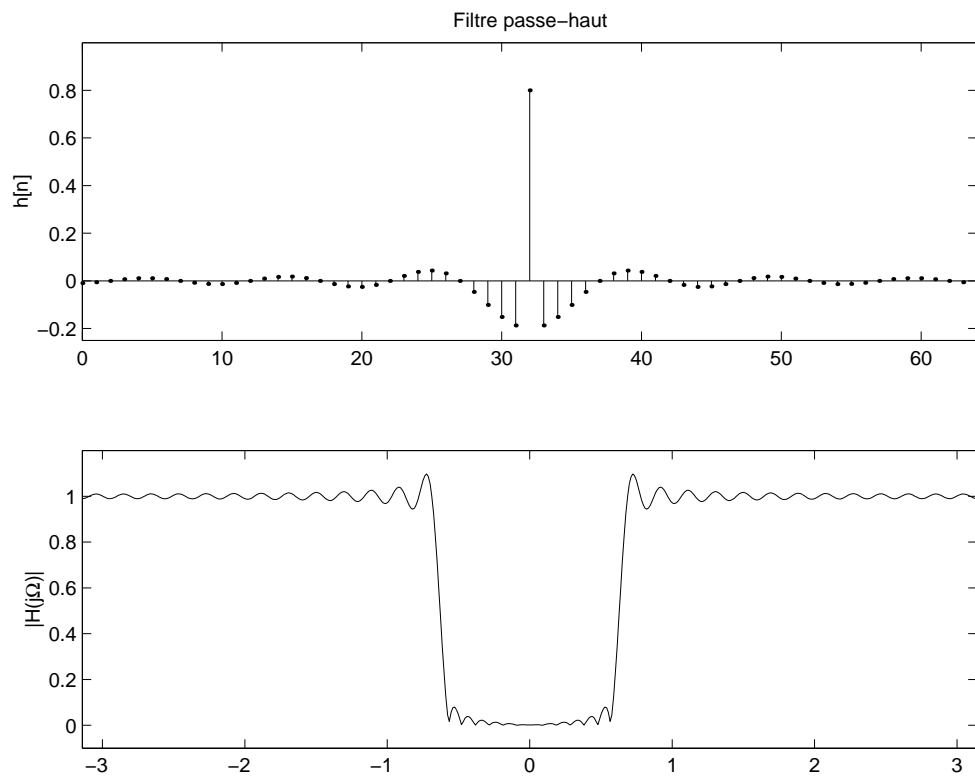


FIGURE 13.9.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-haut

13.5.2. Filtre passe-haut

Dans ce cas, avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_h(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 1 & \text{si } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (13.18)$$

On peut remarquer que les réponses fréquentielles d'un passe-bas et d'un passe-haut sont reliées entre elles par :

$$H_h(j\Omega) = 1 - H_b(j\Omega) \quad (13.19)$$

Ce qui, dans l'espace temps, correspond à :

$$h_h[n] = \delta[n] - h_b[n] \quad (13.20)$$

On en déduit donc immédiatement que :

$$h_h[n] = \begin{cases} -\frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.21)$$

13.5.3. Filtre passe-bande et réjecteur de bande

Les filtres passe-bande et réjecteur de bande possèdent 2 pulsations caractéristiques Ω_1 et Ω_2 limitant les bandes passante et d'arrêt. On montre aisément les deux résultats suivants :

1. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande

$$h_\Delta[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} - \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.22)$$

2. Réponse impulsionnelle d'un filtre réjecteur de bande

$$h_r[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} - \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.23)$$

Le calcul de ces réponses impulsionnelles est laissé comme exercice.

13.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

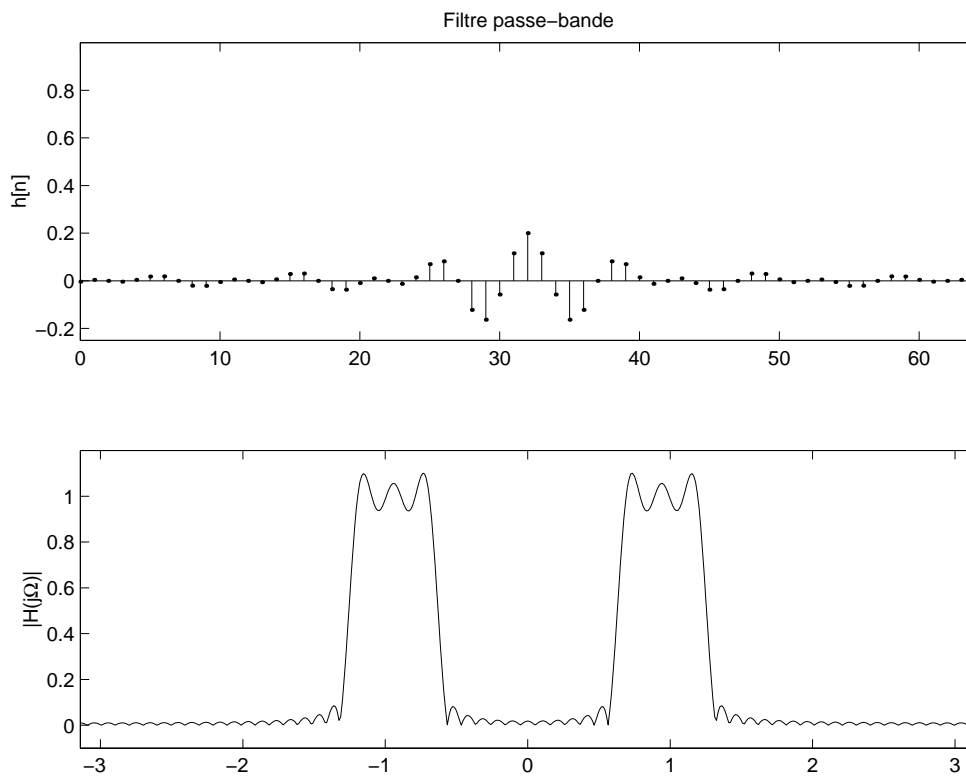


FIGURE 13.10.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande

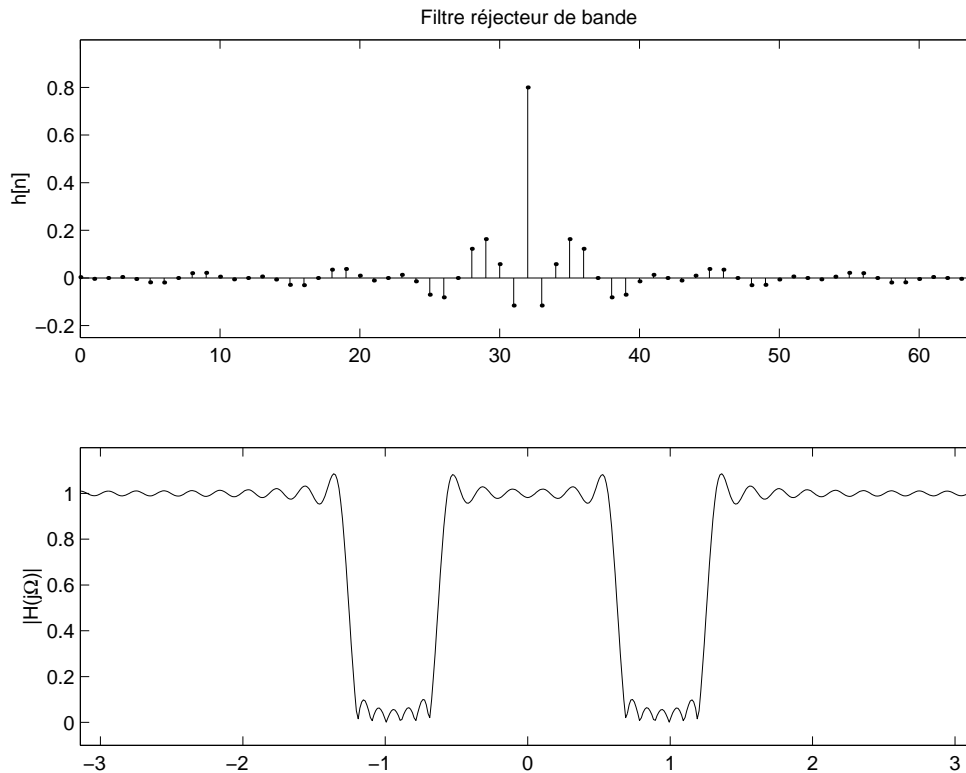


FIGURE 13.11.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre réjecteur de bande

Exemple Réalisation d'un filtre non récursif élémentaire basé sur la réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas ayant une bande passante de 1 kHz alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

13.6. Caractéristiques de quelques fenêtres

Du choix de la fenêtre, dépendra la qualité de l'approximation ; il est donc nécessaire de passer en revue les caractéristiques de celles-ci. On rappellera tout d'abord que si on désire conserver la phase linéaire du filtre, il faut que les fenêtres possèdent une symétrie paire ou impaire.

Comme on l'a vu plus haut, la troncation simple de la réponse impulsionnelle de longueur infinie conduit à une réponse fréquentielle avec des ondulations importantes. Celles-ci sont dues au phénomène de Gibbs et ne peuvent être diminuées que si la fenêtre possède des transitions douces, contrairement à la troncation simple.

Les fenêtres susceptibles de satisfaire les besoins de synthèse des filtres et d'analyse spectrale ont fait l'objet d'études extensives [3]. Parmi les nombreuses fenêtres proposées, seules celles qui sont le plus souvent citées sont présentées ci-après.

13.6.1. Fenêtres analytiques

Pour chacune des fenêtres étudiées, on présentera son équation $w[n]$ et une figure comportant 4 graphes :

1. son graphe temporel $w[n]$
2. son spectre d'amplitudes $W(j\Omega) = TF \{w[n]\}$
3. son spectre d'amplitudes en dB $W_{dB} = 20 \log (|W(j\Omega)|)$
4. son spectre cumulé défini comme suit [1] :

$$W_{cum}(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\Omega} W(j\theta) d\theta \quad (13.24)$$

Cette représentation peu commune est importante car grâce à elle, on peut mesurer le niveau d'atténuation possible ainsi que la largeur de la bande de transition pour un filtre RIF. Sa définition découle de la convolution entre une réponse fréquentielle constante et le spectre de la fenêtre $w[n]$.

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.25)$$

Fenêtre triangulaire (ou de Bartlett)

$$w_t[n] = \begin{cases} 2\frac{n}{N} & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 \\ 2 - 2\frac{n}{N} & \text{si } N/2 < n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.26)$$

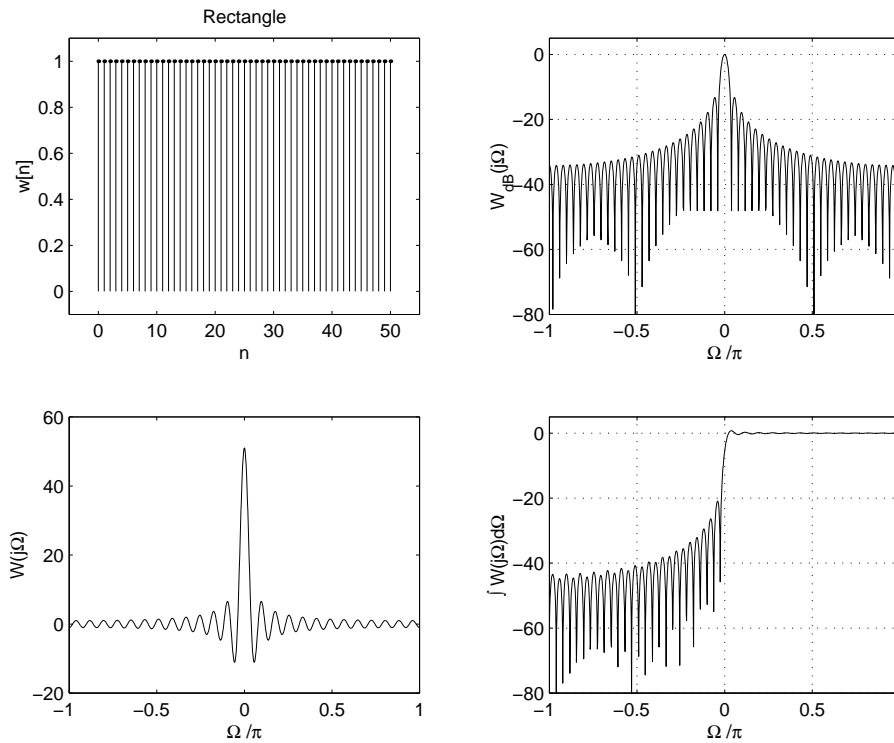


FIGURE 13.12.: Fenêtre rectangulaire

Fenêtre cosinusoidale (ou de Hann)

$$w_c[n] = \begin{cases} 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.27)$$

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.28)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) + 0.08 \cos \left(4\pi \frac{n}{N} \right) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.29)$$

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

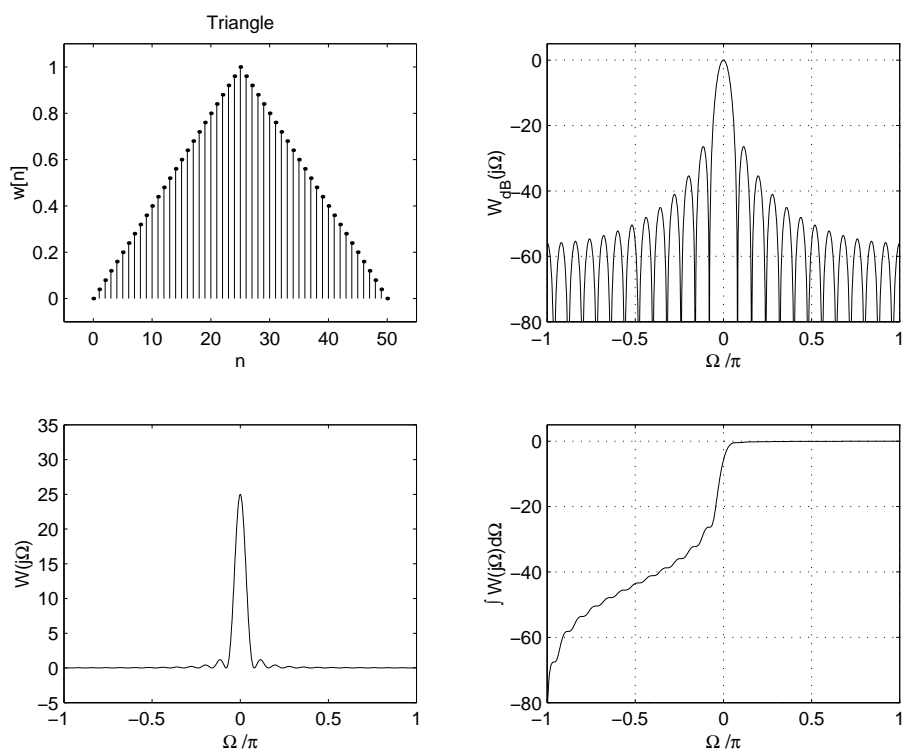


FIGURE 13.13.: Fenêtre triangulaire

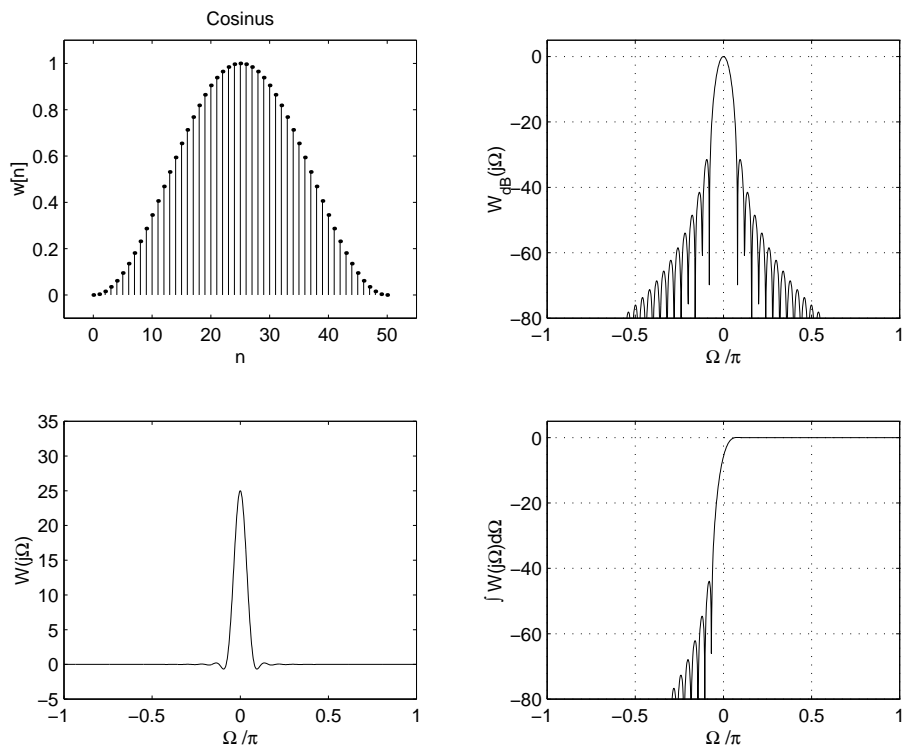


FIGURE 13.14.: Fenêtre cosinusoidale (ou de Hann)

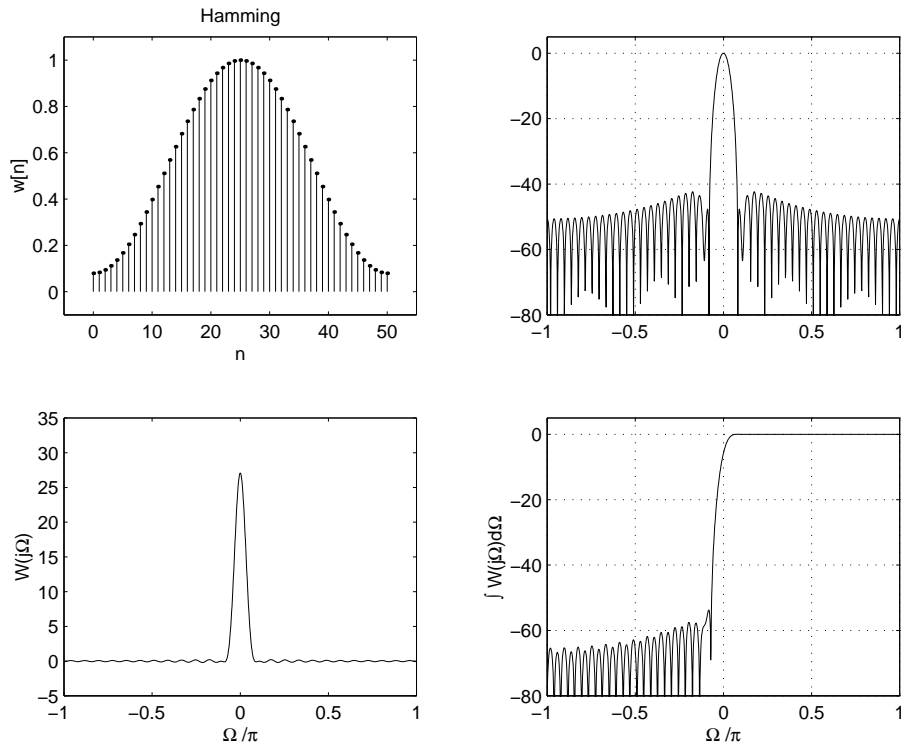


FIGURE 13.15.: Fenêtre de Hamming

13.6.2. Fenêtre de Kaiser-Bessel

Les fenêtres présentées ci-dessus ont des formes et des atténuations fixes apportant chacune sa largeur du lobe principal et son atténuation des lobes latéraux. La contribution de Kaiser fut de proposer une fenêtre s'adaptant à l'atténuation désirée. Cette fenêtre est définie par une fonction de Bessel :

$$w_k[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-(1-n/N_s)^2})}{I_0(\beta)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.30)$$

avec :

- I_0 = fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro
- β = paramètre de forme de la fenêtre
- $N_s = N/2$ = point de symétrie de la fenêtre

Calcul de la fonction de Bessel

L'usage fréquent des fenêtres de Hann ou de Hamming est dû à ce que ces fonctions sont familières et faciles à calculer. Cependant, bien que la fonction de Bessel soit en général peu connue, il est aisé de la calculer en utilisant son développement en série :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n \right]^2 \quad (13.31)$$

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

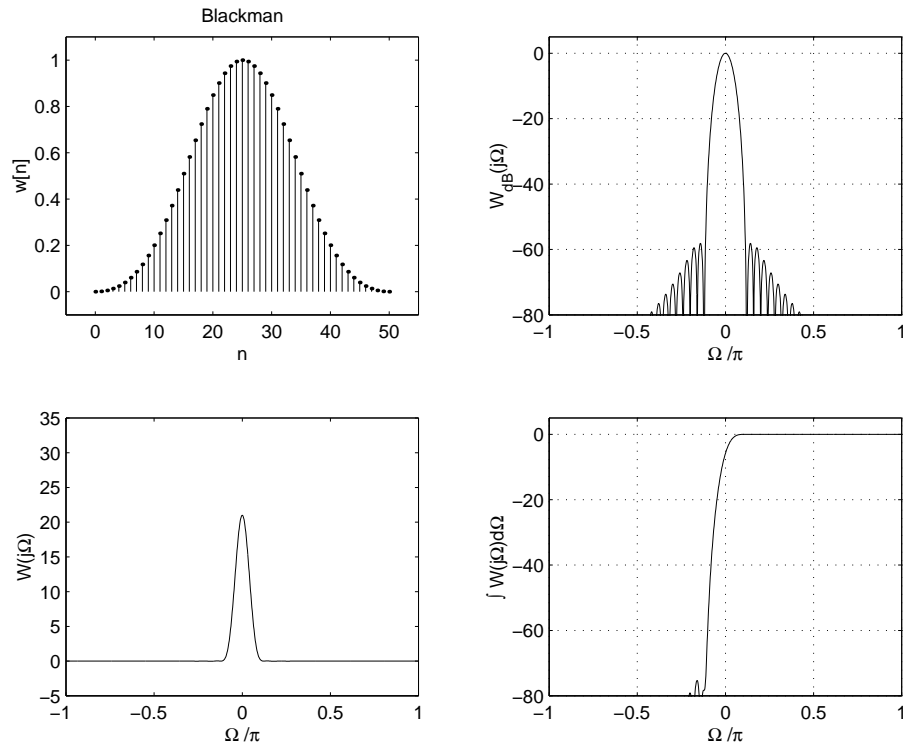


FIGURE 13.16.: Fenêtre de Blackman

Cette série converge rapidement et la procédure de calcul proposée par Kaiser est très simple à mettre en oeuvre :

```

function Bessel0 (x :real) :real;
  const eps = 1.0e-6;
  var d, ds, s : real;
begin
  d = 0.0;  ds = 1.0;  s = 1;
  repeat
    d = d + 2.0;
    ds = ds * (x / d) * (x / d);
    s = s + ds;
  until abs (ds/(s+eps)) < eps;
  Bessel0 = s;
end;

```

Calcul des paramètres des fenêtres de Kaiser

La figure 13.18 montre les caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser. On en tire les conclusions suivantes :

- en augmentant la longueur du filtre N , on diminue la largeur du lobe principal
- en augmentant le paramètre de forme β , on diminue l'amplitude des lobes latéraux.

13.6. Caractéristiques de quelques fenêtres

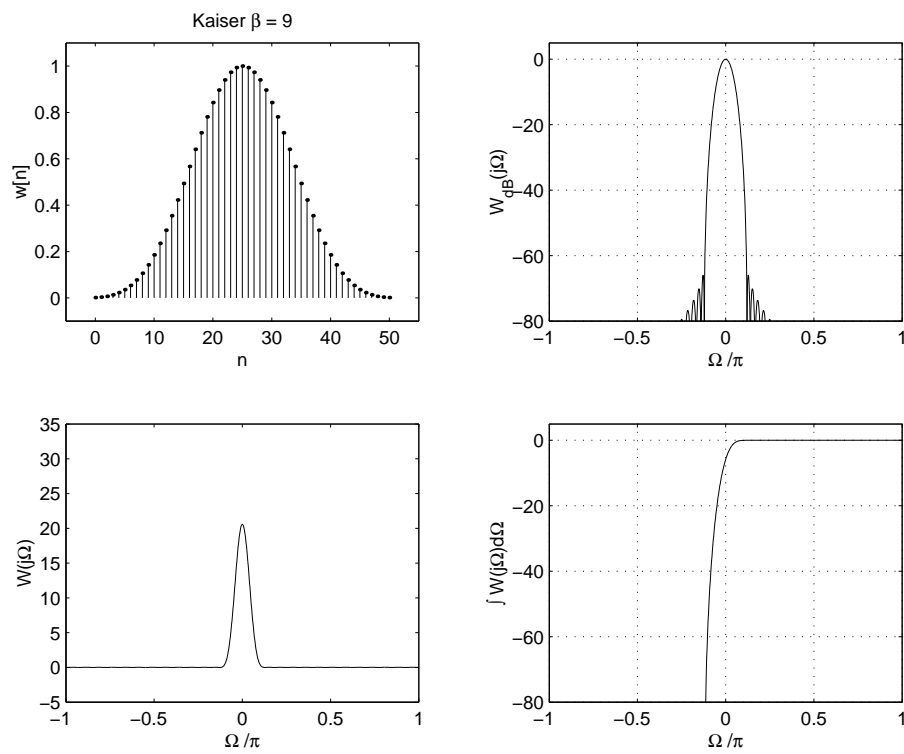


FIGURE 13.17.: Fenêtre de Kaiser avec $\beta = 9$

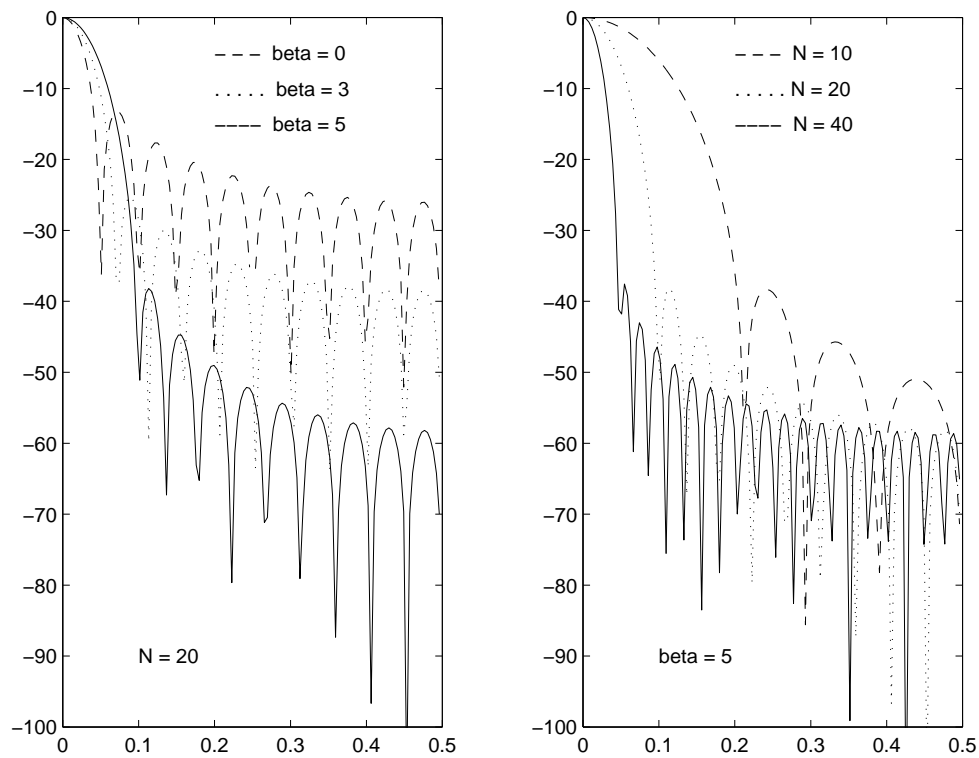


FIGURE 13.18.: Caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

Après une simulation numérique extensive, Kaiser a obtenu une paire de formules qui permettent de trouver β et N à partir des spécifications demandées. Ces spécifications sont l'atténuation A_{dB} et la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$ exprimée en radians.

Le facteur de forme β dépend uniquement de l'atténuation A_{dB}

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (A_{dB} - 8.7) & \text{si } A_{dB} > 50 \\ 0.5842 (A_{dB} - 21)^{0.4} + 0.078862 (A_{dB} - 21) & \text{si } 21 \leq A_{dB} \leq 50 \\ 0 & \text{si } A_{dB} < 21 \end{cases} \quad (13.32)$$

La longueur du filtre est déterminée par l'atténuation A_{dB} et la bande de transition $\Delta\Omega$ souhaitée

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} \quad (13.33)$$

13.7. Conclusions sur l'usage des fenêtres

13.7.1. Propriétés et utilisation des fenêtres

L'ensemble des propriétés concernant les fenêtres et les filtres étudiés ci-dessus sont réunies dans les tableaux 13.1 à 13.3. On y trouve les caractéristiques spectrales de quelques fenêtres usuelles, les caractéristiques des filtres RIF en fonction des fenêtres utilisées, les avantages et inconvénients de ces fenêtres.

Fenêtres	Largeur du 1er lobe	Atténuation du 1er lobe [dB]	Décroissance des lobes suivants
Rectangle	$4\pi/N$	-13	20 dB/déc
Triangle (Bartlett)	$8\pi/N$	-27	40 dB/déc
Cosinus (Hann)	$8\pi/N$	-32	60 dB/déc
Hamming	$8\pi/N$	-43	20 dB/déc
Blackman	$12\pi/N$	-58	60 dB/déc
Kaiser $\beta = 4.54$	$7.2\pi/N$	-30	20 dB/déc
Kaiser $\beta = 5.66$	$8.4\pi/N$	-42	20 dB/déc

TABLE 13.1.: Caractéristiques spectrales des fenêtres usuelles

Fenêtres	Ondulation R_p [dB]	Atténuation max. A_{max} [dB]	Bande de transition $\Delta\Omega$
Rectangle	0.74	21	$1.8 \pi/N$
Triangle (Bartlett)	0	25	$6.1 \pi/N$
Cosinus (Hann)	0.055	44	$6.2 \pi/N$
Hamming	0.014	53	$6.6 \pi/N$
Blackman	0.0017	74	$11 \pi/N$
Kaiser $\beta = 4.54$	0.025	50	$5.8 \pi/N$
Kaiser $\beta = 5.66$	0.009	60	$7.2 \pi/N$

TABLE 13.2.: Caractéristiques des réponses fréquentielles des filtres RIF

Fenêtres	+/-	Remarques
Triangle (Bartlett)	+	simple à calculer ; pas de sinus ou cosinus
	+	bande spectrale étroite
	-	faible réjection (25 dB)
	=	décroissance spectrale moyenne (-40 dB/déc)
Cosinus (Hann)	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	=	réjection raisonnable (44 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Hamming	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	+	bonne réjection (53 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
Blackman	+	simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	très bonne réjection (74 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Kaiser	-	moins simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	excellente réjection (100 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
	++	meilleur compromis atténuation / bande de transition

TABLE 13.3.: Avantages et inconvénients des fenêtres utilisées dans la réalisation de filtres RIF

13.7.2. Démarche pour calculer un filtre

La démarche à suivre pour obtenir les coefficients du filtre souhaité est la suivante :

1. connaissant le gabarit du filtre désiré, choisir le filtre idéal correspondant ;
2. calculer les pulsations caractéristiques Ω_k se situant au centre des bandes de transition ;
3. rechercher la réponse impulsionnelle $h_d[n]$ du filtre idéal ; si celle-ci n'est pas connue, on peut la calculer par transformation de Fourier inverse ;
4. choisir une fenêtre $w[n]$ satisfaisante du point de vue de l'atténuation (table 13.2) ;
5. connaissant la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$, calculer l'ordre du filtre N ;
6. calculer les coefficients du filtre en multipliant la réponse impulsionnelle par la fenêtre choisie

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

13.8. Réalisation d'un filtre passe-bas

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bas satisfaisant au cahier des charges suivant :

$$f_p = 1 \text{ kHz}, \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.4 \text{ kHz}, \quad A_a = 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

13.8.1. Préliminaires

La réponse du filtre sera construite à partir de celle d'un filtre passe-bas idéal tel que :

1. la fréquence de coupure se situe au centre de la bande de transition

$$f_c = \frac{f_p + f_a}{2} = 1.2 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_e} = 2\pi \frac{1.2 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.24 \pi$$

2. la largeur de la bande de transition requise vaut

$$\Delta f = f_a - f_p = 0.4 \text{ kHz}$$

on a donc :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.4 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.08 \pi$$

3. la réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bas (équ. 13.17)

$$h_d[n] = h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c \sin((n-N_s)\Omega_c)}{\pi (n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. le tableau 13.2 montre que pour cet exemple, on peut utiliser la fenêtre de Hamming ou la fenêtre universelle de Kaiser. Considérons ces deux cas.

13.8.2. Fenêtrage de Hamming

La fenêtre de Hamming apporte une atténuation de 53 dB et une bande de transition de largeur

$$\Delta\Omega = \frac{6.6 \pi}{N}$$

On en déduit immédiatement la longueur N du filtre :

$$N = \frac{6.6 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.6 \pi}{0.08 \pi} = 82.5 \simeq 84$$

que l'on a arrondi à la première valeur paire supérieure. Le point de symétrie se situe donc en $N_s = 42$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 13.17), on obtient :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\Omega_c \sin((n-N_s)\Omega_c)}{\pi (n-N_s)\Omega_c} \\ &= \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Hamming $w_h[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \cdot (0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{84})) & \text{si } 0 \leq n \leq 84 \\ 0.24 & \text{si } n = 42 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 13.19. Il est intéressant de relever que, en plus de la phase linéaire offerte par le filtre RIF, sa bande de transition est remarquablement étroite.

À titre comparatif, on y a ajouté en pointillé la réponse d'un filtre de Butterworth d'ordre 12 (filtre RII). Ce filtre d'ordre 12 réalisé avec 6 cellules biquadratiques requiert environ 36 multiplications-additions contre 84 pour le filtre RIF. Théoriquement, le gabarit aurait pu être respecté avec un filtre RII d'ordre 24.

La figure 13.20 illustre la différence de comportement des réponses indicielles des filtres RIF ou RII.

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

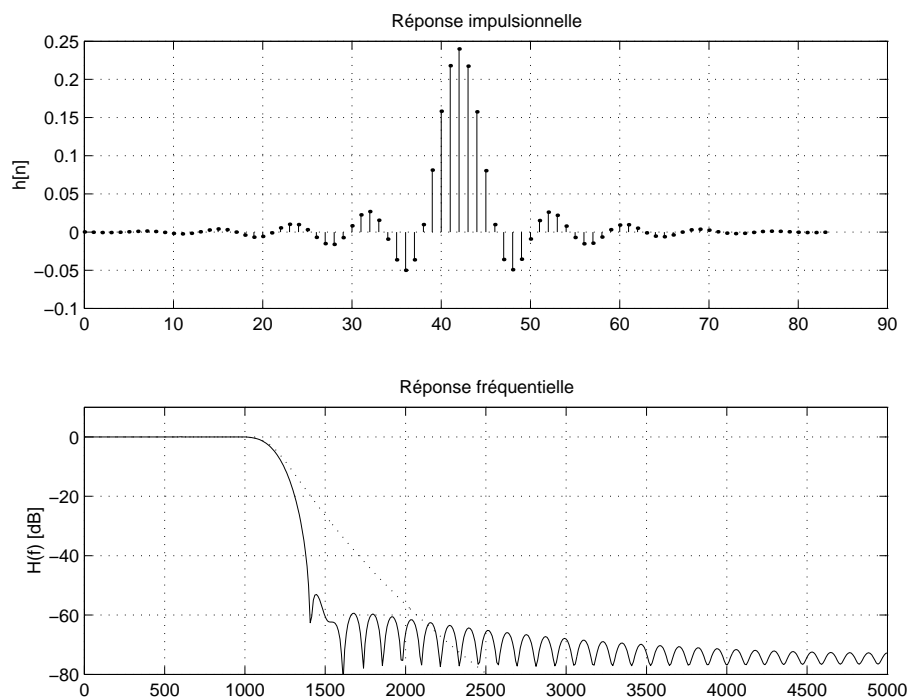


FIGURE 13.19.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Hamming)

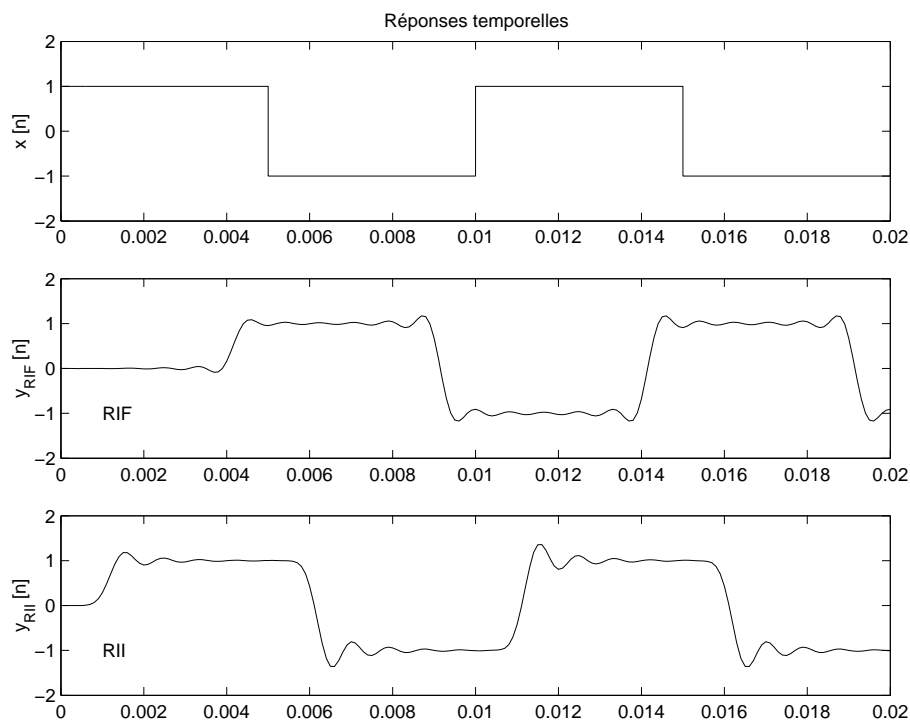


FIGURE 13.20.: Comparaison des réponses temporelles

13.8.3. Fenêtrage de Kaiser

Dans ce cas, l'atténuation A_{dB} détermine le facteur de forme β . Comme $A_{db} = 50$, il vient (équ. 13.32)

$$\beta = 0.1102 (A_{dB} - 8.7) = 0.1102 (50 - 8.7) = 4.55$$

L'ordre du filtre est fixé par la bande de transition $\Delta\Omega$ et l'atténuation A_{db} (équ. 13.33)

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} = \frac{50 - 8}{2.285 \cdot 0.08 \pi} = 73.1 \simeq 74$$

La valeur trouvée (73.1) est augmentée à 74 de manière à obtenir un ordre pair ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 37$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 13.17), on obtient

$$h_d[n] = \frac{\Omega_c \sin((n - N_s)\Omega_c)}{\pi (n - N_s)\Omega_c} = \frac{\sin(0.24 \pi (n - 37))}{\pi (n - 37)}$$

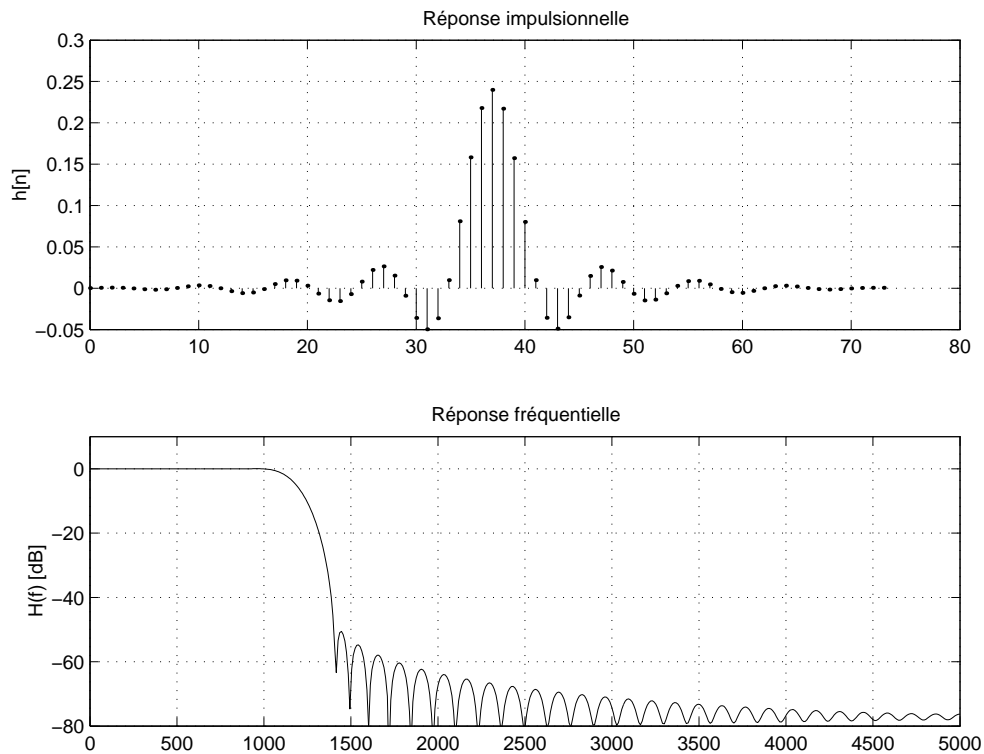


FIGURE 13.21.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Kaiser)

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Kaiser $w_k[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_k[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-37))}{\pi (n-37)} \cdot \frac{I_0(4.55 \sqrt{1-(1-n/37)^2})}{I_0(4.55)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 13.21.

13.9. Réalisation d'un filtre passe-bande

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bande satisfaisant au gabarit suivant :

fréq. d'échant.	10 kHz	Atténuation
1 ^{ere} bande d'arrêt	0... 1.8 kHz	30 dB
bande passante	1.9...2.1 kHz	0 dB
2 ^{eme} bande d'arrêt	2.4... 5 kHz	40 dB

Dans le cas, où deux atténuations différentes sont proposées pour les bandes d'arrêt, les calculs doivent se faire avec la plus forte atténuation (ici 40 dB). De même, lorsque les largeurs des bandes de transition diffèrent, on prendra la plus faible des deux.

Dans le tableau 13.2, nous voyons que la fenêtre en cosinus offre l'atténuation souhaitée. Comme la plus petite bande de transition a une largeur de 0.1 kHz, on en déduit que les fréquences définissant les bandes de transition sont les suivantes :

f_{a1}	f_{p1}	f_{p2}	f_{a2}
1.8 kHz	1.9 kHz	2.1 kHz	2.2 kHz

Ce qui donne pour les deux bandes de transition la largeur suivante :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.02 \pi$$

L'ordre du filtre est fixé par la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$:

$$N \geq \frac{6.2 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.2}{0.02} = 310$$

Comme cette valeur est entière et paire, il n'est pas nécessaire de l'augmenter ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 155$.

La réponse du filtre est construite à partir de celle d'un filtre passe-bande idéal dont les fréquences caractéristiques se situent au centre des 2 transitions

$$f_{c1} = \frac{f_{a1} + f_{p1}}{2} = 1.85 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = \frac{f_{p2} + f_{a2}}{2} = 2.15 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_{c1} = 2\pi \frac{f_{c1}}{f_e} = 2\pi \frac{1.85 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.37 \pi$$

$$\Omega_{c2} = 2\pi \frac{f_{c2}}{f_e} = 2\pi \frac{2.15 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.43 \pi$$

La réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bande (équ. 13.22) :

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{(n-N_s)\Omega_{c2}} - \frac{\Omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{(n-N_s)\Omega_{c1}} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, plus simplement :

$$h_d[n] = \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{\pi(n-N_s)} - \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{\pi(n-N_s)}$$

$$= \frac{\sin(0.43 \pi (n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37 \pi (n-155))}{\pi(n-155)}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre en cosinus $w_c[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_c[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{\sin(0.43 \pi (n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37 \pi (n-155))}{\pi(n-155)} \right) \cdot \frac{1 - \cos(2\pi n/310)}{2}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle sont présentées dans la figure 13.22. Un tracé plus détaillé de la réponse fréquentielle permet de relever une ondulation maximum de 0.05 dB aux 2 extrémités de la bande passante et des pulsations de coupure (-3 dB) situées en 1864 Hz et 2136 Hz.

13.10. Exercices

RIF 1 : Réalisez un filtre passe-bas non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.2 \text{ kHz} \quad A_a \geq 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz. Pour cela :

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

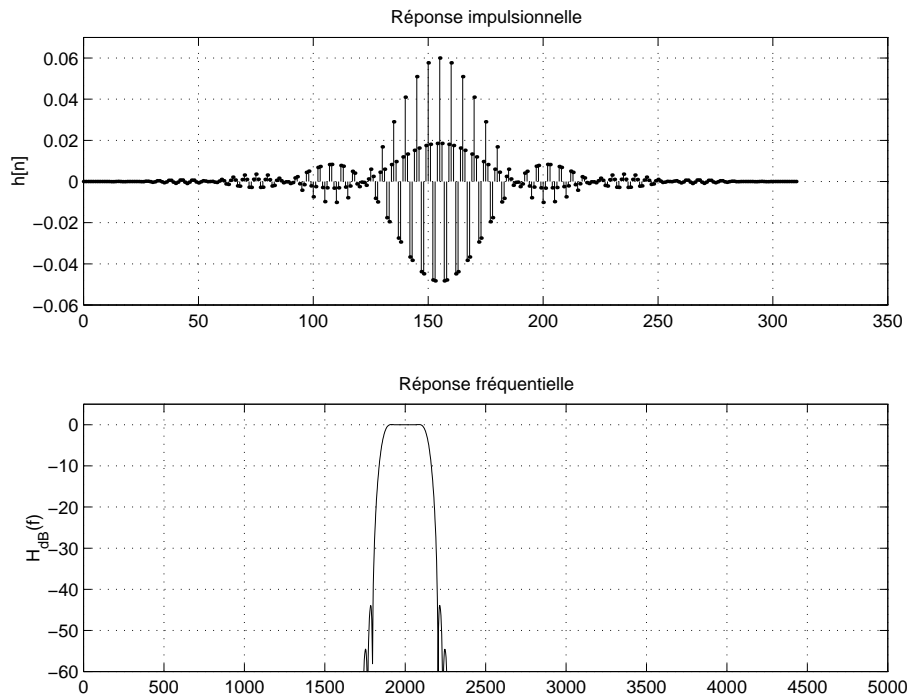


FIGURE 13.22.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande (cosinus)

- a) carré de période $K_p = 100$;
- b) sinus de fréquence $f_1 = 1.0 \text{ kHz}$;
- c) sinus de fréquence $f_2 = 1.2 \text{ kHz}$;

5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 2 : Réalisez un filtre passe-haut non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_a = 0.8 \text{ kHz} \quad A_a \geq 40 \text{ dB}; \quad f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:
 - a) carré de période $K_p = 100$;
 - b) sinus de fréquence $f_1 = 0.8 \text{ kHz}$;
 - c) sinus de fréquence $f_2 = 1.0 \text{ kHz}$;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 3 : Réalisez un filtre passe-bande non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_{p1} = 1.0 \text{ kHz} \quad f_{p2} = 2.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$

$$f_{a1} = 0.9 \text{ kHz} \quad A_{a1} \geq 50 \text{ dB} \quad f_{a2} = 2.3 \text{ kHz} \quad A_a \geq 40 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:
 - a) carré de période $K_p = 200$;
 - b) sinus de fréquence $f_1 = 1.5 \text{ kHz}$;
 - c) sinus de fréquence $f_2 = 0.6 \text{ kHz}$;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 4 : On veut réaliser un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie tel que sa bande passante soit de 1 kHz alors que $f_e = 20 \text{ kHz}$.

1. Analyse temporelle
 - a) calculez $h_b[n]$;
 - b) tronquez h_b à $N = 128$ et rendez-la causale ;
 - c) que vaut $h_b[n]$ à ses extrémités ?
 - d) est-ce raisonnable de l'accepter tel quel ? sinon que pouvez-vous faire ?
2. Analyse fréquentielle

Afin d'augmenter la résolution spectrale, on ajoute des 0 à la réponse impulsionnelle ; comme l'usage de la FFT nécessite que la longueur du signal analysé soit une puissance de 2, essayez 512 et/ou 1024.

 - a) calculez $H(jf)$ (`fft`) ;
 - b) tracez le module et la phase de $H(jf)$;
 - c) est-ce que cela correspond à votre attente ?
 - d) que valent les extrema de la bande passante et celle d'arrêt (**zoom**) ?
 - e) mesurez la fréquence de coupure et la largeur de la bande de transition.
3. Amélioration de la réponse fréquentielle
 - a) reprenez $h_b[n]$ et multipliez-la par une fenêtre en cosinus ou de Hamming ;
 - b) répétez les points 2.a), ..., 2.d).
 - c) concluez.

13. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

RIF 5 :

1. Générez un signal $x[n]$ de 64 échantillons à partir d'un cosinus discret tel que $A = 10$, $\Omega_0 = \pi/16$, $\alpha = \pi/3$.
2. Le système dans lequel passe ce signal $x[n]$ est décrit par les 2 équations suivantes :

$$w[n] = (x[n])^2$$
$$y[n] = w[n] - w[n - 1]$$

3. Dessinez le schéma fonctionnel de ce système et décrivez ce que réalise chaque fonction ; en quoi ces 2 opérateurs sont-ils à réponse impulsionnelle finie ?
4. Tracez sur une même figure les 3 signaux (`subplot`) ; observez-les.
5. Esquissez à la main le spectre de chacun des 3 signaux ;
 - a) remarquez que le premier opérateur est non linéaire et qu'il génère des fréquences non présentes dans $x[n]$; lesquelles ?
 - b) d'un point de vue temporel et fréquentiel, quel est l'effet du deuxième opérateur ?
6. Observez le signal $w[n]$; quelles sont les fréquences présentes ?
7. Transformez de Fourier les 3 signaux ; tracez sur une nouvelle figure les 3 spectres d'amplitudes.
8. Observez ces spectres et justifiez votre analyse précédente.

Réf. : McClellan, Schaffer, Yoder : *DSP FIRST*, Prentice Hall, 1998, p. 461

RIF 6 :

1. Générez un signal $x[n]$ de 128 échantillons tel que

$$x[n] = 10 \cos(2\pi n/T_0 + \pi/6) + 2 \cos(6\pi n/T_0 + \pi/2)$$

avec $T_0 = 32$; que valent les pulsations normalisées de $x[n]$?

2. Ce signal est appliqué à un filtre RIF d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n - 1] + x[n - 2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel.

3. Quel est le gain DC de ce filtre ?
4. Quelle est sa réponse impulsionnelle $h[n]$?
5. Avec Matlab, calculez et tracez les signaux $x[n]$, $h[n]$ et $y[n]$.
6. Observez les résultats ; quel est l'effet du filtre ?
7. Justifiez l'allure de $y[n]$ en calculant et traçant le module de la réponse fréquentielle $H(j\Omega) = \text{TF}(h[n])$ avec $N_{FFT} = 128$ ainsi que les spectres d'amplitude de $x[n]$ et $y[n]$.

RIF 7 : Poursuivant l'exercice précédent et partant de son équation

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n-1] + x[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

puis

- a) calculez ses pôles et zéros ;
 - b) tracez-les dans le plan complexe ;
 - c) justifiez l'effet réjecteur de ce filtre.
2. Pour quelle fréquence normalisée a-t-on $H(jf/f_e) = 0$?
 3. Tenant compte de ce qui vient d'être vu, quelle est l'équation d'un filtre réjecteur capable de supprimer
 - a) le 50 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz ;
 - b) le 50 Hz et 150 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz.
 4. Générez ces signaux et vérifiez vos algorithmes.

Bibliographie

- [1] V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS Publishing Company, 1997
- [2] B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley, 1997
- [3] J.F. Harris : *On the Use of Windows for Harmonic Analysis*, Proc. IEEE, vol 66, No.1, Jan.1978
- [4] J.F.Kaiser, F.F. Kuo : *System Analysis by Digital Computer*, John Wiley, 1966

Cinquième partie .
Applications du TdS

14. Analyse de la parole

14.1. Introduction

L'information portée par le signal parole peut être considéré de bien des façons. On distingue généralement plusieurs niveaux de description non exclusifs : acoustique, phonétique et phonologique.

Au niveau *acoustique*, on s'intéresse essentiellement au signal que l'on tentera de caractériser par son intensité, sa fréquence, son timbre et ses propriétés statistiques. Au plan *phonétique*, on considère la génération des sons, les phonèmes qui composent un mot et les classes auxquels ils se rattachent. Enfin, la *phonologie* s'attache à décrire le rythme, la prosodie, la mélodie d'une phrase.

Le texte qui suit traitera du signal acoustique seulement. Il n'a d'autre but que de servir d'introduction à une deuxième partie où l'on abordera le codage et décodage LPC de la parole. Une présentation plus complète peut être lue avec profit dans [1].

14.2. Analyse de la parole

Avant de vouloir traiter ou coder le signal de la parole, il est important de commencer par comprendre ce qu'est la parole, quel est son contenu spectral, quelles sont les parties qui la composent. De plus, il est primordial de réaliser que l'analyse des signaux est basée sur la stationnarité de ceux-ci alors que, par essence, un message ne peut pas être stationnaire. On sera donc constamment confronté au dilemme posé par l'analyse d'un signal transitoire considéré comme stationnaire.

Pour la suite, vous utiliserez les deux outils suivants :

- le programme CoolEdit 2000 pour l'enregistrement, l'analyse auditive et visuelle des sons et de leurs spectres ;
- le programme Matlab pour l'analyse et le traitement numériques des signaux.

14.2.1. Classification des phonèmes

Lorsqu'on recherche les composants élémentaires du langage articulé, on en trouve environ une trentaine pour la langue française. Ces éléments désignés sous le nom de *phonèmes* sont répartis en 7 classes ; ils suffisent pour représenter l'ensemble des sons. Il s'agit des :

- voyelles voisées : **lit**, **été**, **marais**, **Ursule**, **peur**, **petit**, **jeu**, **patte**, **pâte**, **sol**, **saule**, **bijou** ;

14. ANALYSE DE LA PAROLE

- voyelles nasales : **brin**, **brun**, **chant**, **bonjour** ;
- semi-voyelles : **paille**, **lui**, **Louis** ;
- consonnes fricatives : **saucisson**, **zèbre**, **chat**, **janvier**, **fameux**, **vert** ;
- consonnes nasales : **Nantes**, **menthe**, **agneau** ;
- consonnes liquides : **salon**, **bureau** ;
- consonnes plosives : **pari**, **barbare**, **bateau**, **badaud**, **écart**, **langue**.

Ces classes de phonèmes font intervenir à des degrés divers les lèvres, la cavité nasale, la langue, le palais, la glotte et les cordes vocales. Des différences subtiles entre phonèmes déterminent le sens du mot et modifient sensiblement la forme de l'onde sonore et son spectre. Ces différences ne sont pas faciles à détecter et à mettre en oeuvre.

Dans certaines applications, en téléphonie par exemple, on peut se contenter d'une approche plus grossière et de répartir les phonèmes dans deux classes seulement, les sons voisés et non voisés. Les premiers sont modélisés par un signal périodique, alors que les seconds sont représentés par un bruit. Une tâche difficile du codage de la parole consiste à déterminer si un son est voisé ou non.

14.2.2. Période des sons voisés

Considérant que les sons voisés ont un contenu périodique bien marqué, le problème à résoudre consiste à trouver la période de la composante fondamentale et à décider si le son analysé est voisé ou non. Cette période (communément appelée le pitch), est un paramètre très important pour la synthèse de la parole car l'oreille est très sensible à ses variations.

On a observé que la fréquence de la fondamentale se situe entre 40 Hz et 250 Hz pour les voix masculines alors qu'elle est comprise entre 150 Hz et 700 Hz pour les voix féminines. De manière générale, on admettra donc qu'un son est voisé si sa période ou le pitch est compris entre 2 msec et 20 msec.

14.3. Acquisition et analyse avec CoolEdit

On utilisera le logiciel CoolEdit pour acquérir des sons, sélectionner et écouter des phonèmes ou des parties de phrases et visualiser des ondes sonores à l'aide de graphes, de spectres ou de spectrogrammes.

14.3.1. Paramètres pour l'enregistrement

Considérant que l'on s'intéresse ici à des sons de la bande téléphonique, on les enregistrera en monophonie à la fréquence de 8 kHz avec un convertisseur 16 bits après un filtrage antirepliement des fréquences supérieures à 4 kHz.

Pour que les fichiers soient directement utilisables par Matlab, on les sauvegardera dans un fichier *.txt de type ASCII et on prendra garde à supprimer les 4 premières lignes qui contiennent des informations sur l'enregistrement.

14.3.2. Visualisation des signaux et de leur spectre

Dans la figure 14.1, on présente le signal correspondant au mot “bonjour”. On y voit le graphe du signal complet, son spectrogramme et deux zones du son “bonjour”. La première correspond au son non voisé “j”, alors que la deuxième illustre le phonème voisé “ou”. Pour chacune de ces deux zones, on a tracé les signaux temporels et les spectres correspondants.

Pour le son “j”, on relèvera le caractère aléatoire du signal, sa faible puissance et le fort taux de passages par zéro. Pour le son “ou”, on notera d’abord son caractère périodique qui conduit aux raies spectrales du domaine fréquentiel. La périodicité basse fréquence des signaux voisés conduit à un faible taux de passages par zéro. De plus, la puissance des sons voisés est sensiblement plus grande que celle des sons non voisés.

14.4. Analyse du signal acoustique avec Matlab

Le logiciel Matlab servira pour traiter les signaux par tranches successives, extraire leurs caractéristiques et mettre en évidence les résultats obtenus.

Après avoir enregistré une phrase ou un son avec CoolEdit, celui-ci doit être sauvegardé dans un fichier *.txt de type ASCII afin de pouvoir être lu par Matlab. Il ne doit contenir aucune autre information que les valeurs échantillonnées du signal.

14.4.1. Lecture du fichier de données

Le fichier *.txt comportera une colonne de N valeurs échantillonnées. Il sera lu par Matlab sous la forme d’un vecteur dont l’amplitude sera normalisée à 1 :

```
[filename,path] = uigetfile('*.txt','Choix de la phrase');  
phrase = load(filename);  
phrase = phrase/max(abs(phrase));
```

On désignera une tranche à l’aide de la variable `st`. La tranche désirée peut être sélectionnée en prenant une partie des composantes du vecteur `phrase` avec la commande

```
st = phrase(Ndebut:Nfin);
```

Si une analyse spectrale doit être faite, on choisira de préférence une tranche de longueur égale à une puissance de 2. Par exemple, 128 ou 256.

14.4.2. Initialisation

La visualisation du signal temporel et de son spectre débute par l’initialisation de quelques variables et la suppression de la valeur moyenne qui n’a aucun intérêt en traitement des signaux :

14. ANALYSE DE LA PAROLE

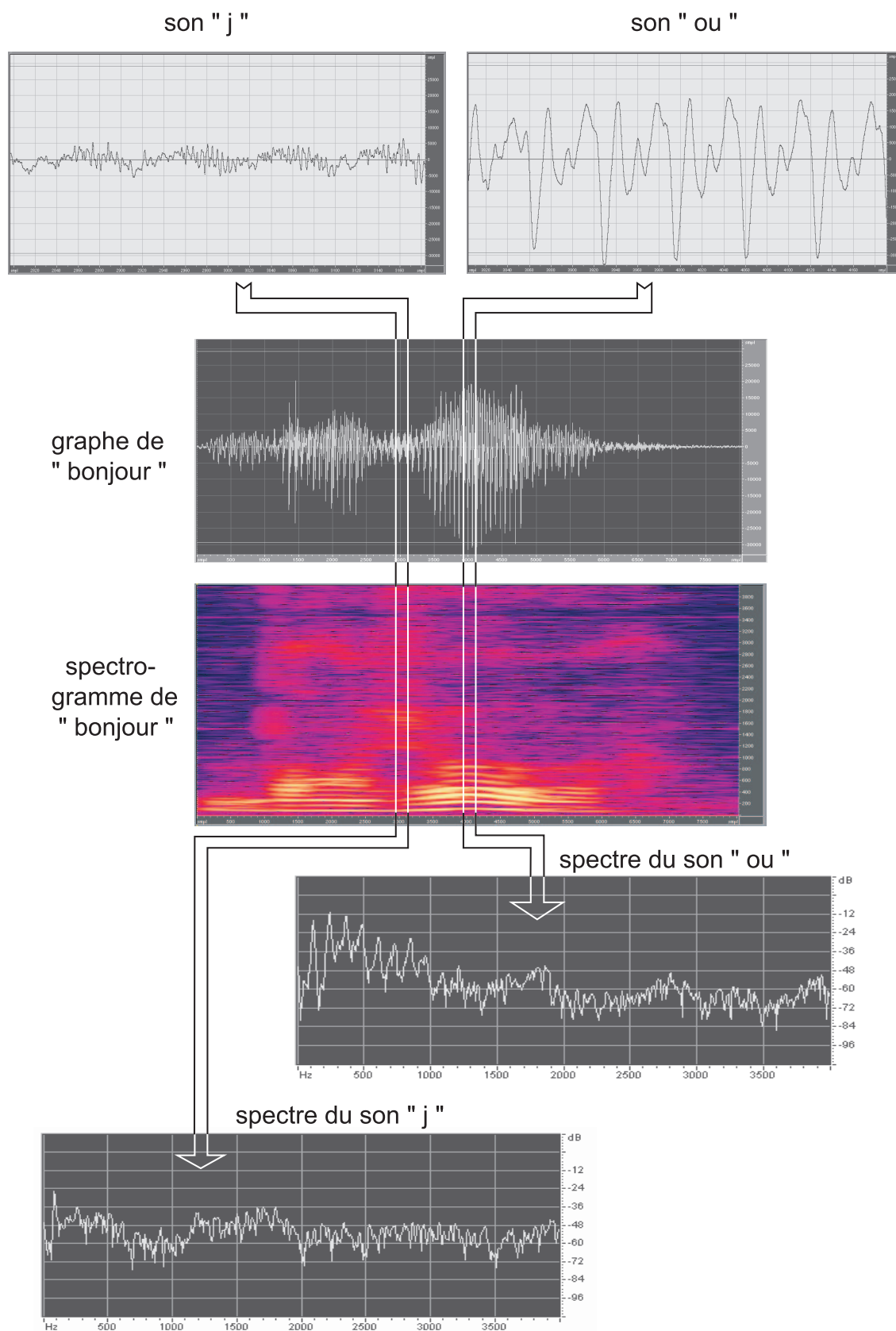


FIGURE 14.1.: Graphes correspondant au mot "bonjour" ; mise en évidence des sons "j" et "ou"

```

fe = 8e3; Te = 1/fe;
Npoints = length(st);
duree = Npoints*Te;
temps = 0:Te:duree-Te;
df = 1/duree;
Ndemi = fix(Npoints/2);
frequence = df*(0:Ndemi-1); % 0 <= frequence < fe/2
st = st - mean(st); % suppression de la valeur moyenne

```

14.4.3. Valeur efficace

Vous remarquerez par la suite que les sons voisés sont généralement plus intenses que les sons non voisés. Pour évaluer l'amplitude des signaux, on calcule la valeur efficace de la tranche considérée. Celle-ci est égale à la déviation standard du signal

```

Seff = std(st); % valeur efficace du signal

```

14.4.4. Taux de passages par zéro

Le taux de passages par zéro peut également aider à la décision voisé / non voisé. Il est défini comme le rapport entre le nombre de passages par zéro et le nombre d'échantillons considérés

$$n_{xz} = \frac{N_{xz}}{N_{ech}}$$

Le nombre passages par zéro peut se calculer comme suit :

```

function [Nxz] = zcross(xt)
xz = xt - mean(xt);
xz = (1+sign(xz))/2; % transformation en un signal binaire 0 / 1
xz = diff(xz); % derivee du signal binaire = +/- 1
Nxz = sum(abs(xz)); % nombre de passages par 0

```

14.4.5. Spectre

L'analyse spectrale est faite à l'aide de la FFT. Idéalement, le nombre de points de la tranche analysée devrait être une puissance de 2. Afin d'éviter les effets de bords de la tranche qui peuvent conduire à un étalement spectral, il est nécessaire d'effectuer préalablement un fenêtrage de la tranche. Ces opérations sont réalisées à l'aide des commandes suivantes :

```

stHm = st.*Hamming(Npoints);
spectre = fft(stHm);
spectre = spectre(1:Ndemi) % limitation à fe/2
module = abs(spectre); phase = angle(spectre);
plot(frequence,20*log10(abs(spectre)));

```

14. ANALYSE DE LA PAROLE

Une illustration de sons voisés et non voisés est donnée dans les figures 15.6 et 15.7. On notera les raies spectrales bien visibles dans le spectre du signal voisé et, en particulier, la correspondance entre la fréquence de la fondamentale et la période du signal voisé.

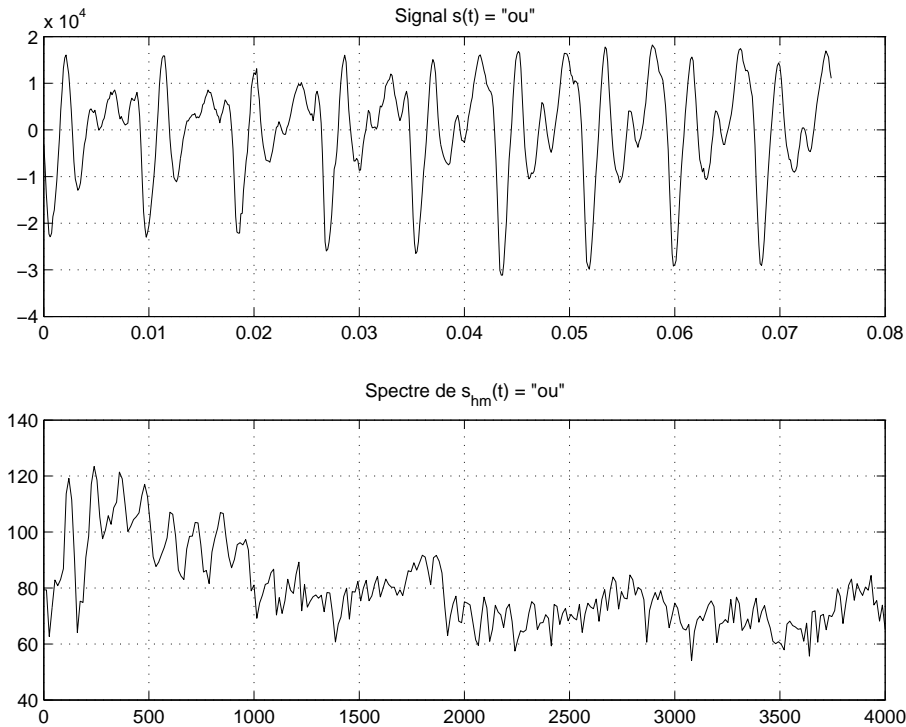


FIGURE 14.2.: Signal voisé et son spectre

14.5. Recherche du pitch

14.5.1. Filtrage du signal

Comme on l'a dit plus haut, on admet généralement que la période du pitch de la voix humaine est comprise entre 2 et 20 msec. Le domaine spectral qui nous préoccupe ici est donc inférieur à 500 Hz. Il est ainsi préférable, puisqu'on s'intéresse à un signal dont le spectre est limité, de commencer par éliminer les fréquences supérieures à 500 Hz. Ceci peut être fait à l'aide d'un filtre numérique passe-bas; celui-ci est généralement du type Butterworth et d'ordre 8 :

```
fc = 500; fn = fe/2; ordre = 8;  
[nbtw dbtw] = butter(ordre, fc/fn);  
stf = filter(nbtw, dbtw, st);
```

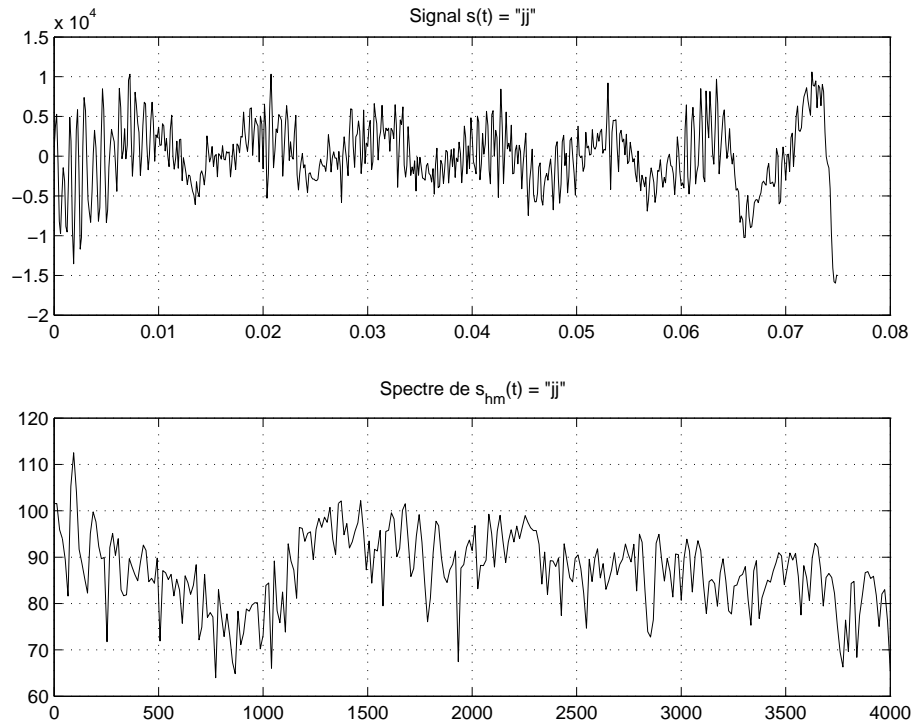


FIGURE 14.3.: Signal non voisé et son spectre

14.5.2. Autocorrélation

On a vu que la tranche considérée est périodique si le son est voisé et aléatoire dans le cas contraire. Afin de faciliter la recherche de la période, on travaille de préférence avec la fonction d'autocorrélation car celle-ci est généralement moins bruitée que le signal lui-même (figure 14.4).

Le résultat de l'autocorrélation est un vecteur de longueur $2N$ avec un maximum en son milieu. Si le signal est périodique, d'autres pics distants de la valeur du pitch seront présents. Pour trouver ce dernier, il suffit donc de mesurer la distance entre pics successifs.

Les commandes sont alors les suivantes :

```
% autocorrélation d'une tranche st filtrée
rss = real(xcorr(stf))/Npoints;
[rssmax k0] = max(rss);           % k0 = position du max central
rss = rss(k0:length(rss));       % partie droite de rss

% le 1er pic latéral doit se trouver entre Tpmin et Tpmx
fpmax = 500;                     % fréquences min et max du pitch
fpmin = 50;
Tpmax = 1/fpmin;                 % périodes min et max du pitch
Tpmin = 1/fpmax;
kpmmin = round(Tpmin/Te);        % compteurs liés à Tpmin et Tpmx
kpmmax = round(Tpmax/Te);
```

14. ANALYSE DE LA PAROLE

```
% recherche du premier pic
rss = rss(kpmin:kpmax);           % domaine limité par Tpmin et Tpmax
[ymax k1] = max(rss);           % k1 = position du 1er max latéral

% entier correspondant à la période du pitch
kp = kpmin + k1;
Tp = kp * Te;
```

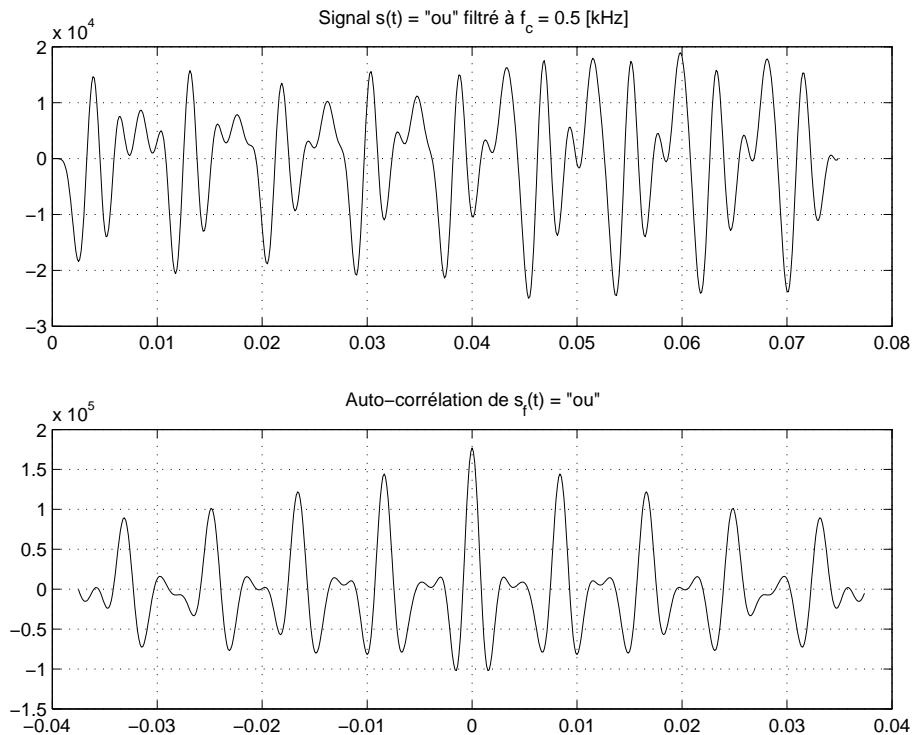


FIGURE 14.4.: Autocorrélation d'un son voisé

14.6. Travail pratique

Pour aborder l'analyse de la parole, je vous propose de travailler sur la phrase “Le colibri a chanté” (fichier colibri.txt) ou une phrase de votre choix.

14.6.1. Avec CoolEdit :

1. Chargez le fichier `colibri.txt` en mode mono / 16 bits / 8 kHz.
2. Écoutez la phrase ; observez le graphe temporel et le spectre (**Analyze/Frequency Analysis**) de diverses parties de la phrase ; notez que le temps peut être gradué en secondes ou en échantillons avec le bouton droit de la souris placé sur l'axe temporel.

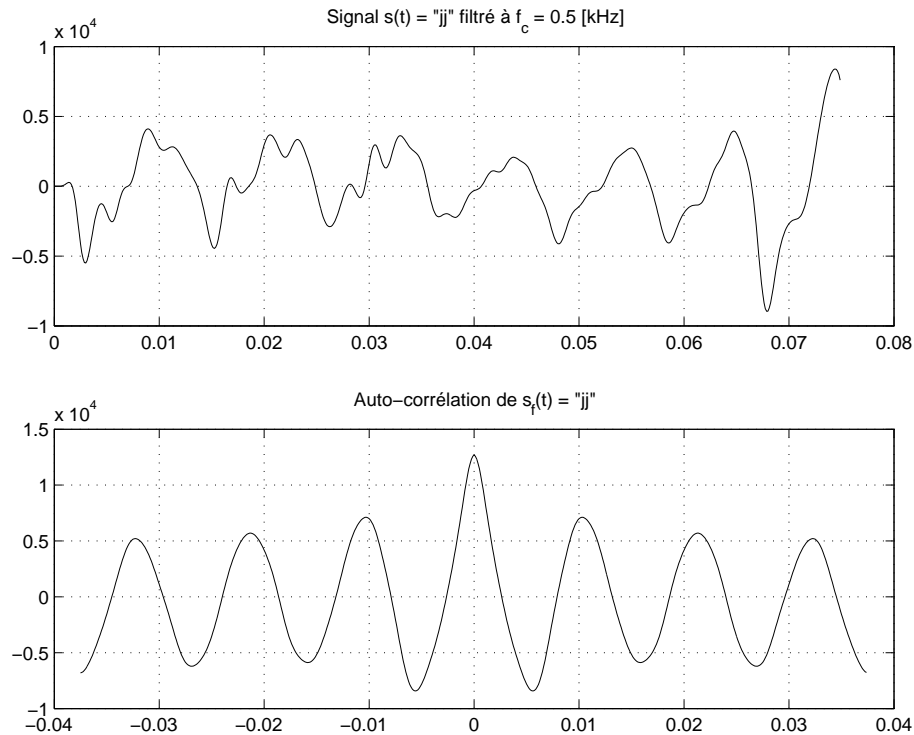


FIGURE 14.5.: Autocorrélation d'un son non voisé

3. Sur le spectrogramme (**View/Spectral View**), observez l'effet de la durée d'analyse N sur les résolutions temporelle et fréquentielle en prenant 128, 256 et 512 échantillons (**Options/ Settings/ Spectral**).
4. Qu'en est-il de la relation liant les résolutions temporelle et spectrale? quelle durée d'analyse choisissez-vous?
5. Mentionnez tous les phonèmes que l'on trouve dans cette phrase; à quelles familles appartiennent-ils?
6. Relevez les numéros d'échantillons correspondant au début et à la fin des phonèmes.
7. Dans l'enregistrement, choisissez librement au moins deux tranches voisées et non voisées.
8. Observez leurs spectres et spectrogramme puis analysez plus en détail leurs caractéristiques temporelles et spectrales.

14.6.2. Avec Matlab

Procédez à l'analyse détaillée de plusieurs tranches voisées / non voisées et tentez de les séparer automatiquement. Pour cela :

1. Extrayez de la phrase les zones que vous souhaitez analyser.
2. Mesurez leur valeur efficace et taux de passages par zéro (< 100%!).
3. Recherchez la période du signal avec la fonction de corrélation.

14. ANALYSE DE LA PAROLE

4. Voyez-vous un moyen de séparer automatiquement les sons voisés / non voisés ?

Bibliographie

- [1] R. Boite et al., *Traitement de la parole*, PPUR, 2000

15. Codage et décodage LPC de la parole

15.1. Introduction

Le codage linéaire prédictif LPC (Linear Predictive Coding) de la parole est utilisé, en particulier, en téléphonie où il permet de transmettre les communications avec un débit d'environ 12 kbits/sec au lieu de 64 kbits/sec si on se contentait de numériser la parole.

Cette forte diminution du débit est basée sur une modélisation très simplifiée du conduit vocal dont on transmet les paramètres toutes les 10 ou 20 ms.

15.2. Prédiction linéaire

15.2.1. Mesure de l'erreur de prédiction

Le codage LPC consiste à estimer la valeur de l'échantillon à venir sur la base de quelques valeurs mesurées précédemment $s[n - k]$ (figure 15.1).

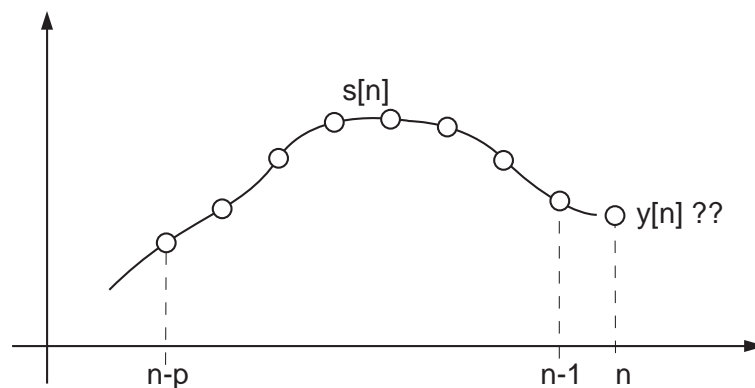


FIGURE 15.1.: Les échantillons $s[n - p]$ à $s[n - 1]$ sont utilisés pour estimer la valeur à venir

La valeur estimée $y[n]$ est calculée à partir des échantillons précédents pondérés par des coefficients a_k qui sont généralement au nombre de 8 à 12 :

$$y[n] = - (a_1 s[n - 1] + a_2 s[n - 2] + \dots + a_p s[n - p]) = - \sum_{k=1}^p a_k s[n - k] \quad (15.1)$$

La valeur des coefficients de prédiction a_k s'obtient par minimisation de la variance σ_e^2 de l'écart $e[n]$. Celui-ci est défini comme la différence entre la valeur réelle $s[n]$ et la valeur estimée $y[n]$:

$$e[n] = s[n] - y[n] = s[n] + \sum_{k=1}^p a_k s[n-k] \quad (15.2)$$

La puissance ou variance de l'écart de l'ensemble des N échantillons $e[n]$ à disposition dépend du choix des coefficients de prédiction a_k et elle vaut :

$$\sigma_e^2(a_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(s[n] + \sum_{k=1}^p a_k s[n-k] \right)^2 \quad (15.3)$$

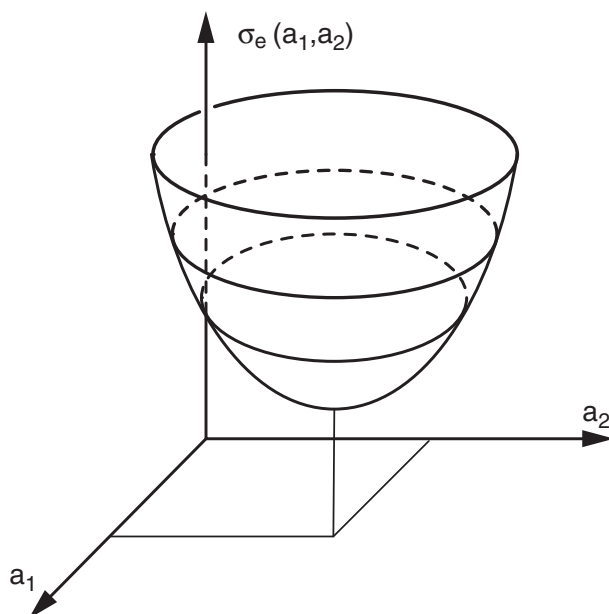


FIGURE 15.2.: Variance de l'erreur de prédiction

15.2.2. Calcul des coefficients de prédiction linéaire

La procédure pour obtenir la valeur optimum des coefficients a_k consiste à rendre minimum la puissance de l'erreur commise lors de la prédiction. Un schéma fonctionnel traduisant cette démarche est présentée dans la figure 15.3.

Mathématiquement, la variance est une fonction des paramètres de prédiction a_k :

$$\sigma_e^2 = \sigma_e^2(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sigma_e^2(a_k) \quad (15.4)$$

Sa valeur minimum s'obtient donc lorsque l'ensemble des dérivées partielles de σ_e^2 par rapport aux paramètres a_k sont nulles :

$$\sigma_{e,min}^2 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_e^2(a_k)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (15.5)$$

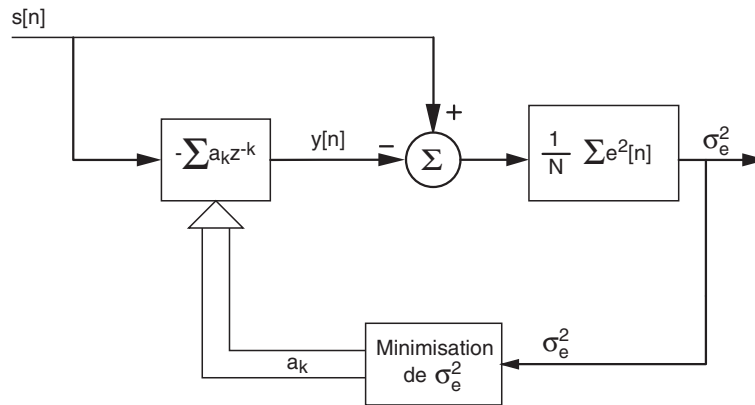


FIGURE 15.3.: Schéma fonctionnel de la prédiction linéaire

Le calcul de ces p dérivées partielles conduit à p équations pour les p paramètres inconnus a_k (voir annexe 15.9) :

$$\begin{aligned}
 a_1 r_{ss}[0] + a_2 r_{ss}[-1] + \cdots + a_p r_{ss}[1-p] &= -r_{ss}[1] \\
 a_1 r_{ss}[1] + a_2 r_{ss}[0] + \cdots + a_p r_{ss}[2-p] &= -r_{ss}[2] \\
 &\vdots \\
 a_1 r_{ss}[p-1] + a_2 r_{ss}[p-2] + \cdots + a_p r_{ss}[0] &= -r_{ss}[p]
 \end{aligned}$$

avec :

$$r_{ss}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]s[n-m], \quad m = 1, \dots, p \quad (15.6)$$

Les coefficients des paramètres a_k sont les p premières valeurs de la fonction d'autocorrélation $r_{ss}[m]$ du signal $s[n]$ comportant N échantillons.

Cet ensemble d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}_{ss} \mathbf{a} = -\mathbf{r}_{ss} \quad (15.7)$$

où \mathbf{R}_{ss} est la matrice $p \times p$ d'autocorrélation, \mathbf{r}_{ss} le vecteur $p \times 1$ d'autocorrélation et \mathbf{a} le vecteur $p \times 1$ des paramètres de prédiction. On notera que, la fonction d'autocorrélation étant paire, la matrice \mathbf{R}_{ss} est symétrique. On voit donc que les coefficients de prédiction linéaire peuvent s'obtenir par inversion de la matrice \mathbf{R}_{ss} :

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_{ss} \quad (15.8)$$

L'estimation de la valeur à venir sera d'autant meilleure que le nombre de points N utilisés pour calculer la fonction d'autocorrélation $r_{ss}[m]$ sera élevé. L'évaluation des paramètres a_k se fait donc après analyse d'une tranche t_k suffisamment longue ($N \sim 200$) alors que le calcul de la valeur à venir $y[n]$ n'utilise que les p dernières valeurs de $x[n]$.

Il est important de relever que si les points $s[n]$ ne sont pas corrélés entre eux, aucune prévision n'est possible (cas du bruit blanc). Pour plus d'informations, on consultera avantageusement la référence [1].

15.2.3. Interprétation de la prédiction linéaire

Dans ce qui précède, le signal $e[n]$ a été considéré comme une erreur de prédiction dont on a minimisé la variance pour calculer les coefficients de prédiction linéaire a_k . Sa définition était la suivante :

$$e[n] = s[n] - y[n] = s[n] + \sum_{k=1}^p a_k s[n-k] \quad (15.9)$$

Appliquant la transformation en z à cette équation, on en tire la relation suivante :

$$E(z) = S(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}) = S(z) A(z) \quad (15.10)$$

Elle montre que l'on peut reconstruire le résidu $e[n]$ de l'estimation à partir du signal $s[n]$ à l'aide d'un filtre non récursif représenté par la fonction de transfert $A(z)$.

Une deuxième représentation, plus fructueuse,

$$S(z) = E(z) \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} = E(z) \frac{1}{A(z)} \quad (15.11)$$

met en évidence le fait que le résidu $e[n]$ peut être considéré comme un signal d'excitation servant à créer le signal $s[n]$ avec l'aide d'un filtre récursif tous pôles $H(z) = 1/A(z)$. Dans le cas du codage LPC de la parole, le signal d'excitation $e[n]$ est choisi périodique pour les sons voisés et aléatoire pour les sons non voisés.

15.3. Modèle du conduit vocal

La production de sons met en oeuvre un certain nombre de muscles modifiant la forme du conduit vocal dans lequel circule un flux d'air. On y trouve les cordes vocales qui vibrent pour les sons voisés et restent au repos pour les sons non voisés. Viennent en suite le pharynx et la cavité buccale en parallèle avec la cavité nasale. La forme de ces parties est constamment modifiée pour créer le message sonore.

Le modèle généralement adopté pour créer artificiellement des sons est grossier par rapport à la complexité du système phonatoire mais il est tout à fait satisfaisant pour les besoins de la téléphonie. Ce modèle comprend (figure 15.4) :

- un générateur périodique d'impulsions unité ;
- un générateur de nombres aléatoires à valeur moyenne nulle et variance unité ;
- un commutateur servant à choisir les sons voisés ou non ;
- un gain proportionnel à la valeur efficace du signal $s[n]$;
- un filtre tous pôles $H(z) = 1/A(z)$.

Comme les sons évoluent constamment, le générateur et le filtre doivent être modifiés en permanence. L'extraction de ces paramètres du générateur et du filtre constituent le codage de la parole. A l'émission, on décompose le son en tranches pour en extraire les paramètres qui seuls seront transmis. A la réception, chaque tranche du signal sonore est reconstruite à partir des paramètres du générateur et du filtre.

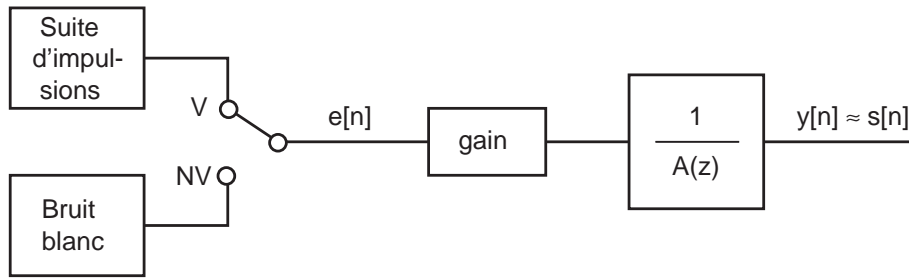
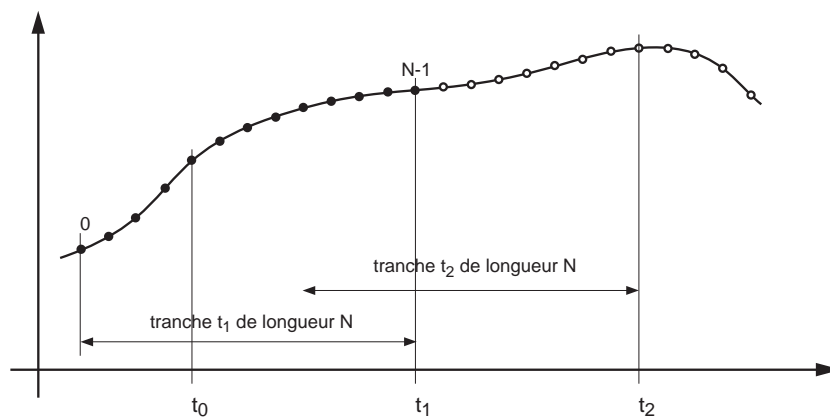


FIGURE 15.4.: Modèle du conduit vocal

L'analyse de la parole se fait par tranches de 20 à 30 msec. Dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est de 8 kHz, chaque tranche comporte donc 160 à 240 échantillons. C'est à partir de ces échantillons que l'on décide si le son est voisé ou non et que l'on calcule le gain et les paramètres du filtre.

Pour assurer une certaine continuité du signal sonore, les tranches successives peuvent être décalées d'une valeur inférieure à leur durée (figure 15.5). Généralement, ce décalage est de 10 msec (80 échantillons).

FIGURE 15.5.: Découpage en tranches t_k du signal $s[n]$

Dans le cas où l'on doit effectuer une analyse spectrale à l'aide de la FFT, il est préférable de travailler avec des tranches dont le nombre de points est une puissance de 2, généralement 128 ou 256. La durée des tranches est alors de 16 ou 32 msec et le décalage de 8 msec (64 échantillons).

Considérant que les sons voisés ont un contenu périodique bien marqué, le problème à résoudre consiste à trouver la période de la composante fondamentale et à décider si le son analysé est voisé ou non. Cette période (communément appelée le pitch), est un paramètre important pour la synthèse de la parole car l'oreille est sensible à ses variations.

On a observé que la fréquence de la fondamentale se situe entre 40 Hz et 250 Hz pour les voix masculines alors qu'elle est comprise entre 150 Hz et 700 Hz pour les voix féminines. De manière générale, on admettra donc qu'un son est voisé si sa période ou le pitch est compris entre 2 msec et 20 msec.

15.4. Analyse du signal

Après avoir enregistré une phrase ou un son, celui-ci doit être sauvegardé dans un fichier *.txt de type ASCII afin de pouvoir être lu par MatLab. Il ne doit contenir aucune autre information que les valeurs échantillonnées du signal.

Le fichier *.txt comportera une colonne de N valeurs échantillonnées. Il sera lu par MatLab sous la forme d'un vecteur dont l'amplitude sera normalisée à 1 :

```
[filename,path] = uigetfile('*.txt','Choix de la phrase');
phrase = load(filename);
phrase = phrase/max(abs(phrase));
```

Par la suite, on désignera une tranche à l'aide de la variable `st`. La tranche désirée peut être sélectionnée en prenant une partie des composantes du vecteur `phrase` avec la commande

```
st = phrase(Ndebut:Nfin);
st = st - mean(st);           % suppression de la valeur moyenne
```

Si une analyse spectrale doit être faite, on choisira de préférence une tranche de longueur égale à une puissance de 2. Par exemple, 128 ou 256.

15.4.1. Initialisation

La visualisation du signal temporel et de son spectre débute par l'initialisation de quelques variables, la suppression de la valeur moyenne et le calcul de la valeur efficace :

```
fe = 8e3; Te = 1/fe;
Npoints = length(st);
temps = Te*(0:Npoints-1);
duree = Npoints*Te;
df = 1/duree;
Ndemi = fix(Npoints/2);
frequence = df*(0:Ndemi-1); % 0 <= frequence < fe/2
```

15.4.2. Spectre

L'analyse spectrale se fait à l'aide de la FFT. Idéalement, le nombre de points de la tranche analysée devrait être une puissance de 2. Si cela n'est pas possible, il faudra être critique par rapport aux résultats obtenus.

Afin d'éviter les effets de bords de la tranche qui peuvent conduire à un étalement spectral, il est nécessaire d'effectuer préalablement un fenêtrage de la tranche. Ces opérations sont réalisées à l'aide des commandes suivantes :

```

stHm = st.*Hamming(Npoints);
spectre = fft(stHm);
spectre = spectre(1:Ndemi) % limitation à fe/2
module = abs(spectre); phase = angle(spectre);
plot(frequence,20*log10(abs(spectre)));

```

Une illustration de sons voisé et non voisé est donnée dans les figures 15.6 et 15.7.

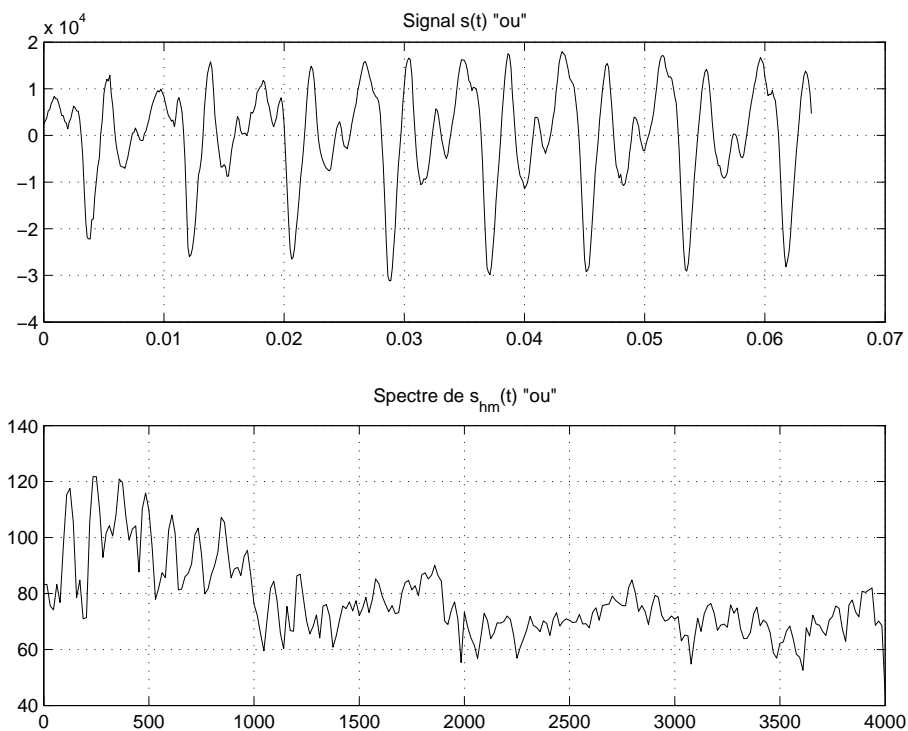


FIGURE 15.6.: Signal voisé et son spectre

15.5. Analyse LPC

Celle-ci fournit les coefficients de prédiction linéaire et la variance (la puissance) de l'erreur de prédiction :

```

NbCoeff = 12;
[coeff Perreur] = lpc(st, NbCoeff);

```

15.5.1. Valeur efficace et gain

Pour évaluer l'amplitude des signaux synthétisés, on calcule la valeur efficace de la tranche considérée

```

Seff = std(st); % valeur efficace du signal

```

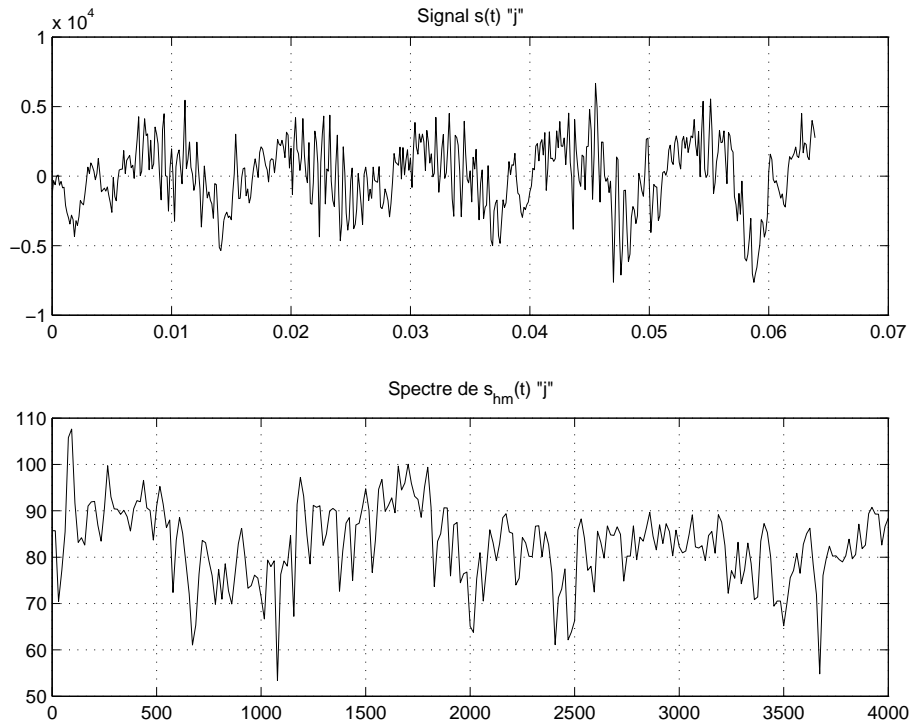


FIGURE 15.7.: Signal non voisé et son spectre

Cette valeur efficace peut représenter le gain de la fonction de transfert du conduit vocal :

```
gain = Seff;
```

15.5.2. Fonction de transfert $H(z)$ du conduit vocal

Les coefficients LPC représentent un polynôme en z^{-1} qui n'est autre que le dénominateur de la fonction de transfert du conduit vocal :

$$H(z) = \frac{\text{gain}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (15.12)$$

Comme le conduit vocal est par essence stable, les pôles doivent se trouver à l'intérieur du cercle de rayon unité.

La donnée de la fonction de transfert sous la forme d'un produit de fonctions biquadratiques et le tracé des zéros et des pôles dans le plan complexe (figure 15.8) s'obtiennent avec les commandes suivantes :

```
Hz = tf(gain, coeff);
zpk(Hz);
zplane(roots(gain), roots(coeff));
```

15.5.3. Réponse fréquentielle du conduit vocal

La réponse fréquentielle du conduit vocal s'obtient avec :

```
[Hf ff] = freqz(gain, coeff, Ndemi, fe);
```

Au tracé de cette réponse fréquentielle, on peut superposer le spectre du signal (figure 15.9) :

```
plot(ff, 20*log10(abs(Hf)), frequence, 20*log10(abs(spectre)));
```

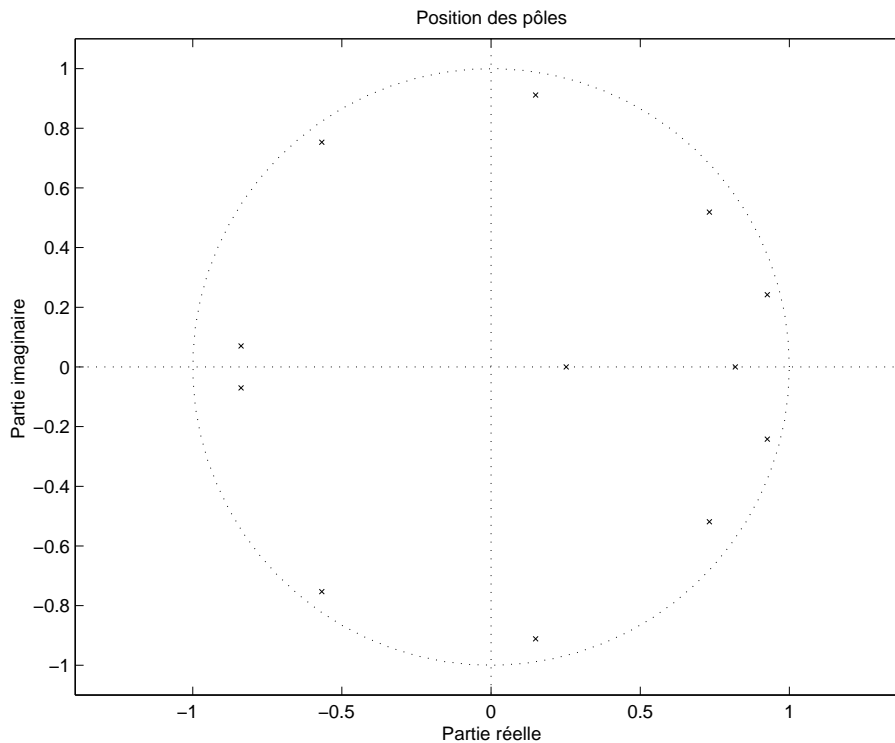


FIGURE 15.8.: Pôles de la fonction de transfert représentant le conduit vocal

15.6. Recherche du pitch

15.6.1. Filtrage du signal

Comme on l'a dit plus haut, la période du pitch est comprise entre 2 et 20 msec. Le domaine spectral qui nous préoccupe ici est donc inférieur à 500 Hz. Il est ainsi préférable, avant de poursuivre l'analyse, de commencer par éliminer les fréquences supérieures à 500 Hz à l'aide d'un filtre passe-bas de Butterworth, généralement d'ordre 8.

```
fc = 500; fn = fe/2; ordre = 8;
[nbtw dbtw] = butter(ordre, fc/fn);
stf = filter(nbtw, dbtw, st);
```

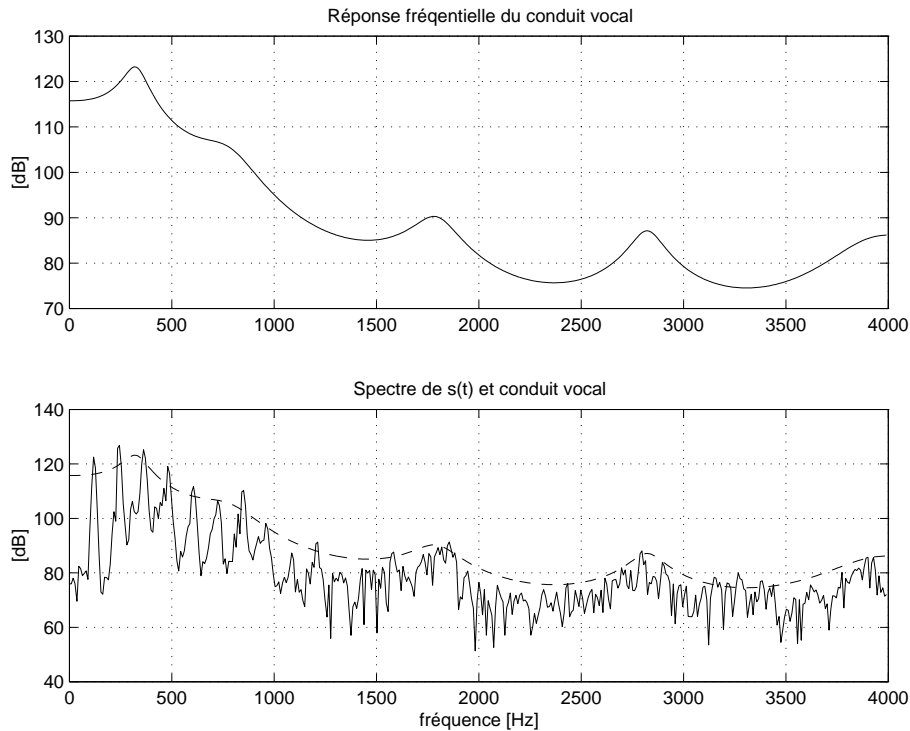


FIGURE 15.9.: Réponse fréquentielle du conduit vocal et spectre du signal

15.6.2. Recherche du signal d'excitation $e[n]$

Nous avons vu dans la section 15.2.3 que le résidu $e[n]$ de la prédiction linéaire peut être considéré comme le signal d'excitation servant à créer le signal $s[n]$ en passant à travers le filtre récursif :

$$H(z) \equiv \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{A(z)} \quad (15.13)$$

Puisque, dans notre cas, le signal $s[n]$ est connu, on peut par filtrage inverse obtenir le résidu $e[n]$:

$$E(z) = A(z)S(z) \quad (15.14)$$

ce qui revient à convoluer les coefficients $a_k \equiv a[n]$ avec le signal $s[n]$:

$$e[n] = a[n] \otimes s[n] \quad (15.15)$$

Dans MatLab, cela s'écrit simplement

```
en = conv(coeff, stf);
```

15.6.3. Autocorrélation de $e[n]$

On a vu que le signal d'excitation est périodique si le son est voisé et aléatoire dans le cas contraire. Comme le signal est passablement bruité, la recherche de la période est grandement facilitée si on l'effectue sur la fonction d'autocorrélation de $e[n]$ plutôt que sur le signal lui-même (figure 15.10).

Le résultat de l'autocorrélation est un vecteur de longueur $2N$ avec un maximum en son milieu. Si le signal est périodique, d'autres pics distants de la valeur du pitch seront présents. Pour trouver ce dernier, il suffit donc de mesurer cette distance.

Les commandes sont les suivantes :

```
% autocorrélation des résidus
ree = real(xcorr(en))/Npoints;
[reemax k0] = max(ree); % maximum central
ree = ree(k0:length(ree)); % partie droite de ree

% le 1er pic latéral doit se trouver entre Tpmin et Tpmax
fpmax = 500; fpmin = 50; % fréquences min/max du pitch
Tpmax = 1/fpmin; Tpmin = 1/fpmax; % périodes min et max du pitch
kpmin = round(Tpmin/Te); kpmax = round(Tpmax/Te);

% recherche du premier pic
ree = ree(kpmin:kpmax); % domaine temporel limité par Tpmin et Tpmax
[reemax1 k1] = max(ree); % k1 = position du 1er max latéral

% entier correspondant à la période du pitch  $T_p = K_p * T_e$ 
Kp = kpmin + k1;
```

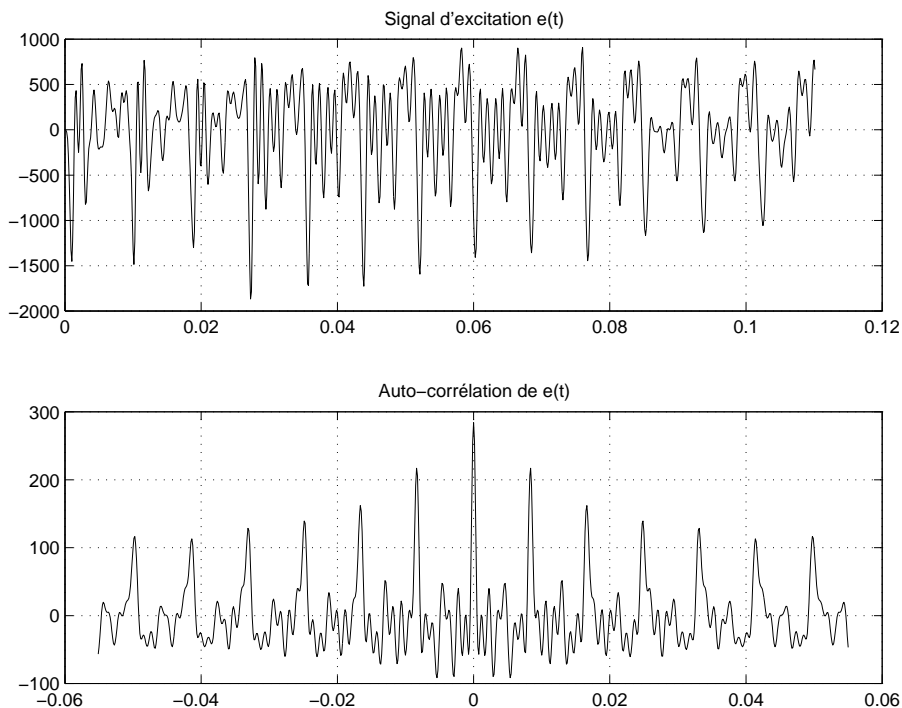


FIGURE 15.10.: Résidus de la prédiction linéaire et autocorrélation (son voisé)

15.6.4. Critères de décision

Les éléments pouvant contribuer à la décision voisé/non voisé sont la valeur efficace de la tranche, son taux de passages par zéro et l'amplitude du premier maximum latéral de la fonction d'autocorrélation des résidus.

Pour les *sons voisés*, on a en effet observé qu'en moyenne

1. l'amplitude du signal est élevée ;
2. le taux de passages par zéros est faible ;
3. le premier pic latéral de la fonction d'autocorrélation des résidus est bien marqué.

Taux de passages par zéro Le taux de passages par zéro est défini comme le rapport entre le nombre de passages par zéro et le nombre d'échantillons considérés

$$n_{zx} = \frac{N_{zx}}{N_{ech}}$$

Le nombre passages par zéro peut se calculer comme suit :

```
function [Nzx] = zcross(xt)
    xz = xt - mean(xt);
    xz = (1+sign(xz))/2;    % transformation en un signal binaire 0 / 1
    xz = diff(xz);         % derivee du signal binaire = +/- 1
    Nzx = sum(abs(xz));    % nombre de passages par 0
```

Fonction de corrélation Pour les sons voisés, l'amplitude du premier pic latéral est souvent supérieure au tiers de celle du pic central. Il est moins marqué pour les sons non voisés.

Choix des seuils Sur la base d'analyses statistiques, on fixe les seuils approximatifs suivants

```
SeuilXeff = 0.05;  SeuilZcross = 0.3;  SeuilCorrel = 0.3;
```

Période du pitch Tenant compte des éléments ci-dessus, le calcul du pitch se fait comme suit

```
voise = (Seff > SeuilXeff) & (Nzx < SeuilZcross) & (reemax1 > SeuilCorrel*reemax);
if ~voise
    Kp = 0; % le son n'est pas voisé
end;
```

15.7. Synthèse d'un son

La synthèse d'un son consiste à utiliser les paramètres obtenus ci-dessus pour synthétiser une tranche après l'autre. Il faudra donc créer le signal d'excitation (périodique ou bruité selon que le signal est voisé ou non), le filtrer à travers la fonction de transfert $H(z)$ et adapter son amplitude. Les commandes sont les suivantes :

```
% génération des impulsions de période Kp = Tp / Te
if Kp ~= 0
    for k=1:Npoints
        if mod(k,Kp) == 0
            xt(k) = -1;
        else
            xt(k) = 0;
        end; % if
    end; % for
    xt(1) = -1; % 1ère impulsion non-nulle
end; % if Kp ...

% génération d'un bruit de longueur Npoints
if Kp == 0
    xt=2*(rand(Npoints,1)-0.5);
end; % if

% synthèse du son
yt = filter(1, coeff, xt);

% adaptation de l'amplitude
Seff = std(st); % valeur efficace du signal original
Yeff = std(yt); %valeur efficace du signal synthétisé
gain = Seff/Yeff;
yt = yt*gain;
```

On notera qu'avec MatLab il est également possible d'écouter directement des sons grâce à la fonction `sound` ou `soundsc`. Par exemple :

```
soundsc (yt, fe);
```

15.7.1. Signaux réel et synthétique

La figure 15.11 montre les résultats de la synthèse d'un phonème voisé. Ces différences visuelles nous paraissent difficilement acceptables. Il ne faut cependant pas oublier que la parole est un message très redondant et que seule l'écoute de la phrase synthétisée permet de juger de la qualité du codage LPC.

15.7.2. Mise en valeur des résultats

Afin de faciliter l'analyse critique des résultats obtenus, il est pratique de réunir sur une ou deux figures les graphes significatifs de la synthèse d'une phrase. Les figures 15.12 et 15.13 illustrent les résultats du codage et décodage de la phrase "Comment allez-vous?".

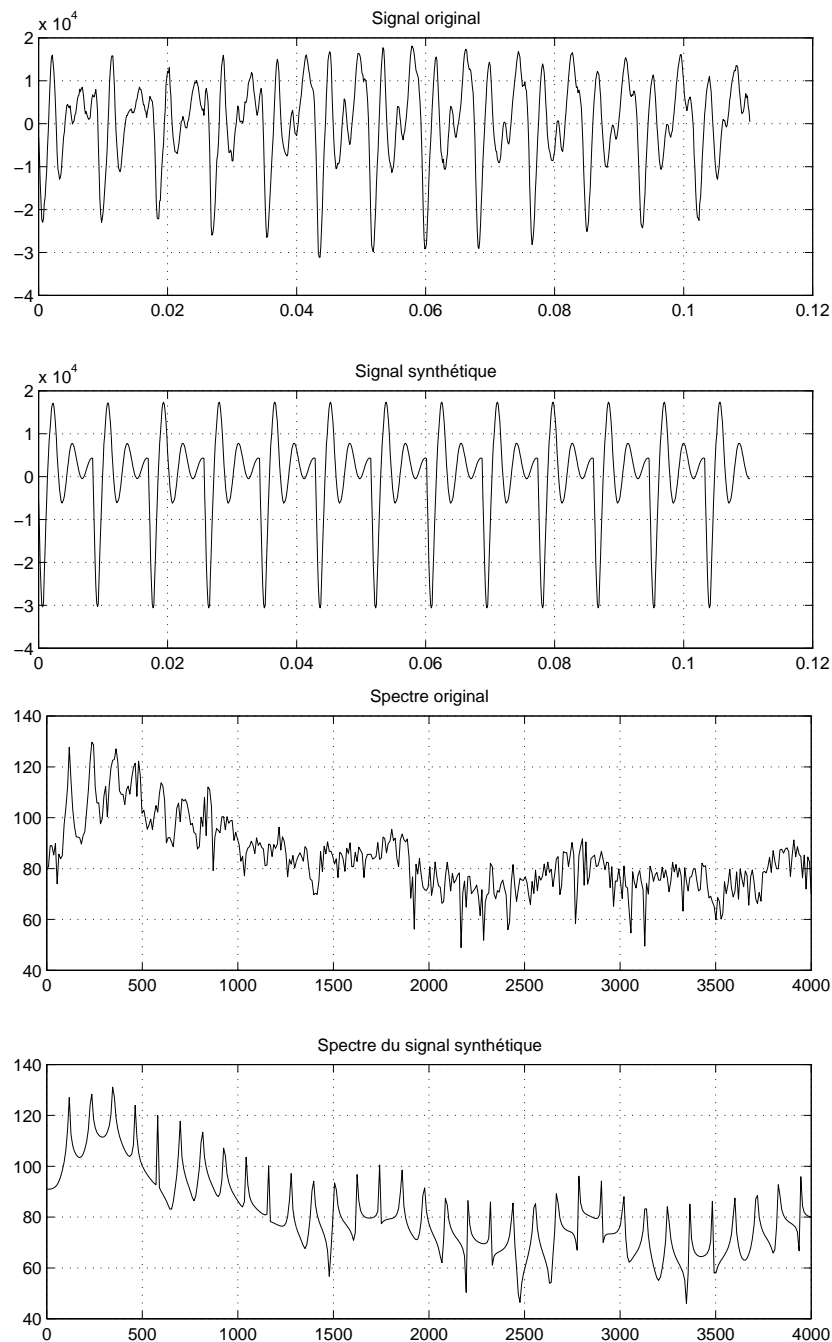


FIGURE 15.11.: Signaux réel et synthétique avec leurs spectres respectifs

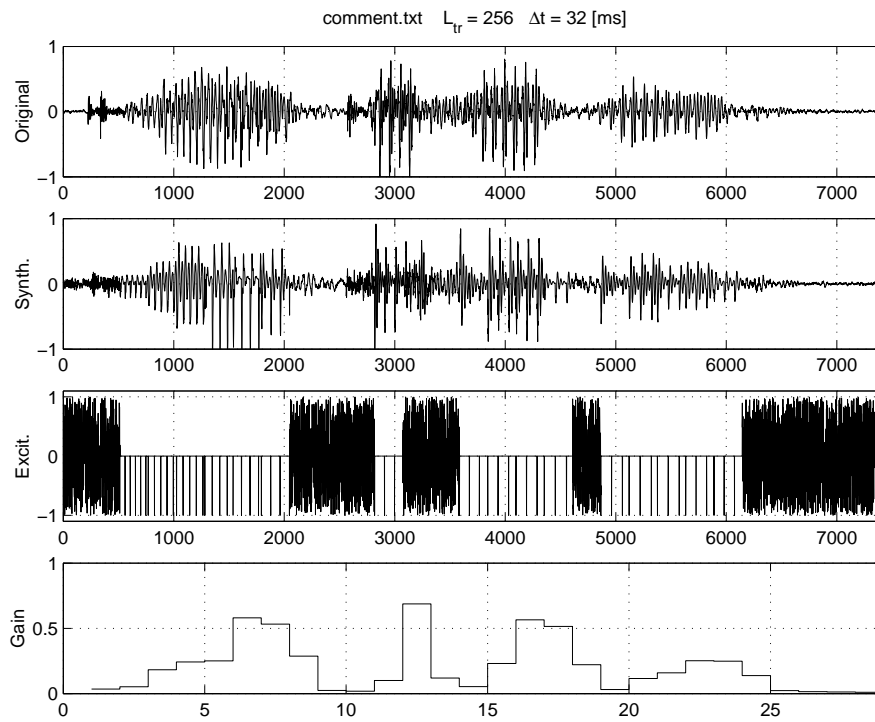


FIGURE 15.12.: Signaux, excitation et gain

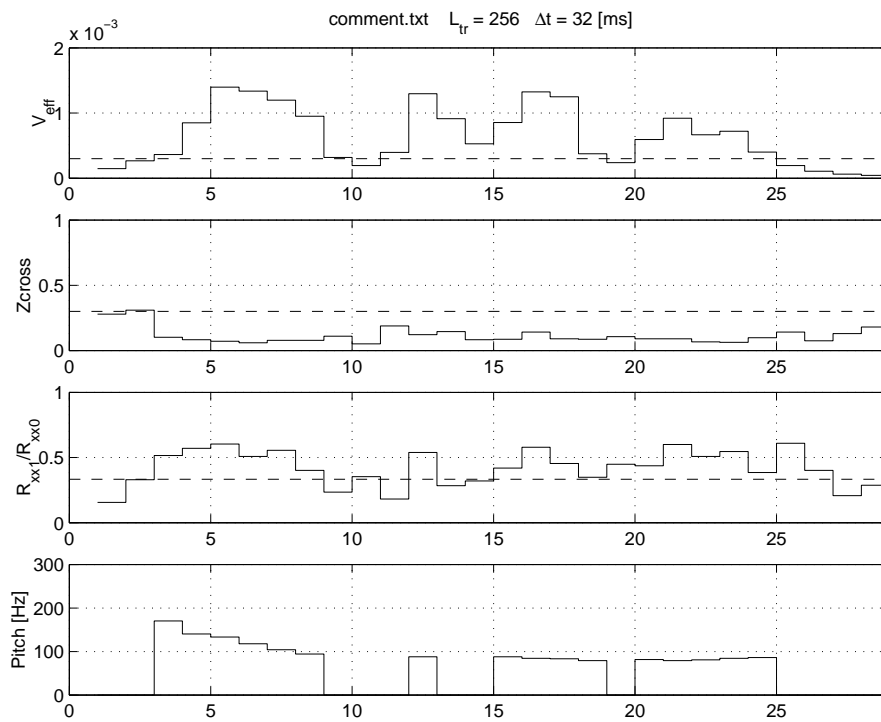


FIGURE 15.13.: Évolution des paramètres

15.8. Travail pratique

Le codage de la parole consiste en l'extraction des paramètres étudiés ci-dessus, à savoir les coefficients de prédiction linéaire, la période du pitch et le gain du filtre. Ces paramètres sont ensuite transmis vers le récepteur qui en effectuera le décodage en reconstituant le signal sonore. Afin d'y parvenir, il faut reprendre une partie des éléments présentés plus haut et les placer dans un programme séquentiel dont la structure vous est donnée ci-dessous.

15.8.1. Codage et décodage d'une phrase

Créez un fichier Matlab vous permettant de coder puis décoder la phrase du fichier "colibri.txt" en vous inspirant de la structure suivante :

Codage

```
% préparation de l'espace Matlab
% lecture de la phrase à coder et normalisation entre +/- 1
% initialisation de la longueur et du nombre de tranches
% initialisation des constantes et vecteurs nécessaires aux calculs

% répéter jusqu'à la dernière tranche
% choix de la tranche à coder
% analyse lpc de la tranche et calcul du gain
% recherche du signal d'excitation
    %% suppression des fréquences supérieures à fmax du pitch
    %% filtrage inverse pour obtenir l'excitation e(t)
% recherche de la période d'excitation Kp
    %% autocorrélation de e(t) => ree
    %% limitation de ree entre Tpmin et Tpmax
    %% décision: voisé ou non
% concaténation dans une matrice des coefficients, gains et périodes
% fin de la boucle répéter
```

Décodage

```
% lecture de la matrice contenant tous les paramètres
% extraction du vecteur contenant les gains
% extraction du vecteur contenant les périodes Kp

% répéter jusqu'à la dernière tranche
% si Kp > 0: génération des impulsions de période Kp
% si Kp = 0: génération du bruit entre +1 et -1
% synthèse du son y(t)
% ajustage de l'amplitude à Veff
% concaténation des tranches
```

```
% fin de la boucle répéter

% limitation de l'amplitude à +/- 1
% traçage des signaux intéressants
```

Pour comparer le signal original avec le signal synthétisé, il peut être intéressant de les transférer simultanément vers CoolEdit dans un fichier *.txt de type ASCII. On peut, par exemple, envoyer le signal original vers le canal gauche et le signal synthétisé vers la droite :

```
% fichier CoolEdit: gauche = original, droite = synthèse
signaux = 32e3*[original synthese];
save fichier.txt signaux -ascii -tabs
```

Lors du chargement du fichier avec CoolEdit, on précisera que l'on souhaite travailler en mode stéréophonique.

15.8.2. Analyse des résultats

Débit d'informations Ayant terminé le codage et apprécié la qualité des résultats obtenus, il est intéressant de calculer le taux de compression ainsi obtenu. Pour ce faire, considérant que les informations transmises sont codées 8 bits,

1. faites la liste des informations transmises après codage LPC ;
2. à quel rythme sont-elles transmises ?
3. calculez le nombre de bits nécessaires pour chacune d'entre elles ;
4. calculez le débit d'informations et le taux de compression obtenu par rapport à un codage 8 bits de la parole non codée.

Modifications du codage

1. Qu'est-ce qui change si l'excitation est purement aléatoire ($K_p = 0$ pour toutes les tranches) ?
2. Plutôt que de rechercher et transmettre le pitch de chaque tranche, on peut, à chaque instant d'échantillonnage, transmettre le signe du résidu $e(n)$ et l'utiliser comme signal d'excitation. Que pensez-vous du résultat de cette synthèse très simple ?

15.8.3. Analyse et amélioration de la synthèse

Vous ne serez sûrement pas satisfait des résultats obtenus au premier essai. Essayez d'apporter des modifications à votre algorithme. Par exemple :

- Avez-vous pensé au fait que les conditions finales d'une tranche doivent être les conditions initiales de la suivante ?
- Le compteur de pitch doit-il être propre à chaque tranche ou global ?
- Faut-il augmenter le nombre de paramètres ?

– Essayez de varier les seuils de détection du pitch.

Afin de mieux saisir les possibilités d'amélioration, sélectionnez une tranche qui vous paraît intéressante. Puis sur celle-ci, tentez de comprendre où se situent les difficultés et observez les effets de vos modifications.

Malgré tous vos essais, il est peu probable que vous atteigniez la qualité de la téléphonie mobile. En effet, bien que celle-ci soit basée sur le codage LPC, on a dû, pour des raisons de qualité du son, améliorer l'analyse et la restitution du signal d'excitation. Vous trouverez plus d'informations dans la référence [2].

15.9. Minimisation de l'écart quadratique

Dans le cas où le signal d'erreur $e[n]$ est à valeur moyenne nulle, sa puissance est égale à sa variance. Partant d'un ensemble de N échantillons à disposition $e[n]$ avec $0 \leq n \leq N-1$, la variance dépend du choix des coefficients de prédiction a_k et elle vaut :

$$\sigma_e^2(a_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(s[n] + \sum_{k=1}^p a_k s[n-k] \right)^2 \quad (15.16)$$

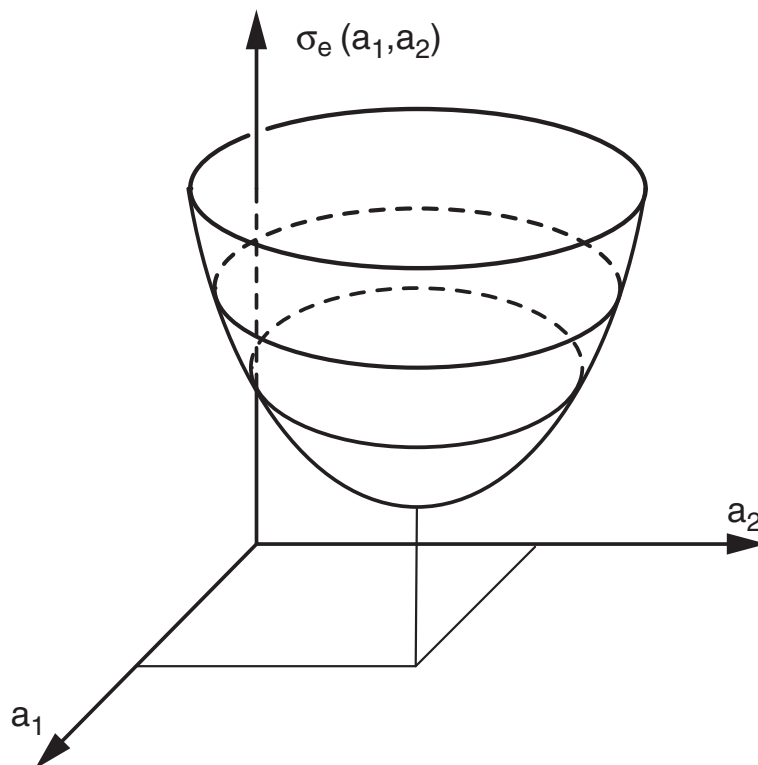


FIGURE 15.14.: Variance de l'erreur de prédiction

Mathématiquement, la variance est donc une fonction des paramètres de prédiction a_k :

$$\sigma_e^2 = \sigma_e^2(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sigma_e^2(a_k) \quad (15.17)$$

et les valeurs des paramètres correspondant à sa valeur minimum s'obtiennent en annulant l'ensemble des dérivées partielles de σ_e^2 par rapport aux paramètres a_k :

$$\frac{\partial \sigma_e^2(a_k)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (15.18)$$

La dérivation de l'équation (15.16) s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_e^2(a_k)}{\partial a_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial a_k} \left(s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] \right) \frac{\partial}{\partial a_k} \left(s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] \right) (0 + s[n-k]) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(s[n] s[n-k] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] s[n-k] \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] s[n-k] + \sum_{m=1}^p a_m \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n-m] s[n-k] \\ &= r_{ss}[k] + \sum_{m=1}^p a_m r_{ss}[k-m] \end{aligned}$$

L'annulation de ce résultat donne

$$\sum_{m=1}^p a_m r_{ss}[k-m] = -r_{ss}[k], \quad 1 \leq k \leq p$$

qui représente p équations pour les p paramètres inconnus a_m :

$$\begin{aligned} a_1 r_{ss}[0] + a_2 r_{ss}[-1] + \dots + a_p r_{ss}[1-p] &= -r_{ss}[1] \\ a_1 r_{ss}[1] + a_2 r_{ss}[0] + \dots + a_p r_{ss}[2-p] &= -r_{ss}[2] \\ &\vdots = \vdots \\ a_1 r_{ss}[p-1] + a_2 r_{ss}[p-2] + \dots + a_p r_{ss}[0] &= -r_{ss}[p] \end{aligned}$$

avec :

$$r_{ss}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] s[n-k], \quad k = 1, \dots, p \quad (15.19)$$

15. CODAGE ET DÉCODAGE LPC DE LA PAROLE

On voit ainsi que les coefficients des inconnues a_k sont les p premières valeurs de la fonction d'autocorrélation $r_{ss}[k]$ du signal $s[n]$ comportant N échantillons.

Cet ensemble d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}_{ss} \mathbf{a} = -\mathbf{r}_{ss} \quad (15.20)$$

où \mathbf{R}_{ss} est la matrice $p \times p$ d'autocorrélation, \mathbf{r}_{ss} le vecteur $p \times 1$ d'autocorrélation et \mathbf{a} le vecteur $p \times 1$ des paramètres de prédiction. On notera que, la fonction d'autocorrélation étant paire, la matrice \mathbf{R}_{ss} est symétrique.

On voit donc que les coefficients de prédiction linéaire peuvent s'obtenir par inversion de la matrice \mathbf{R}_{ss} :

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_{ss} \quad (15.21)$$

Bibliographie

- [1] R. Boite et al., *Traitement de la parole*, PPUR, 2000
- [2] B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley, 1997
- [3] J.R. Deller, J.G. Proakis, J.L. Hansen, *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Macmillan, 1993
- [4] V.K. Ingle, J.G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS, 1997
- [5] C.S. Burrus et al., *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MatLab*, Prentice Hall, 1994

16. Introduction au filtrage adaptatif

Le filtrage adaptatif est basé sur la recherche de paramètres optimaux par minimisation d'un critère de performance. Fréquemment, cette minimisation se fait en recherchant les moindres carrés.

Étant donné le cadre dans lequel cette présentation est faite, on commencera par rappeler quelques définitions d'estimateurs statistiques puis on montrera ce que sont la régression linéaire et le filtrage de Wiener avant de parler du filtrage adaptatif proprement dit.

16.1. Notions de probabilités

16.1.1. Définitions de quelques estimateurs statistiques

Considérant une variable aléatoire réelle z , on la caractérise généralement à l'aide des grandeurs suivantes :

1. Sa **valeur moyenne** :

$$\mu_z = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \quad (16.1)$$

On notera que la valeur moyenne μ_z représente la composante continue du signal autour de laquelle prennent place les fluctuations.

2. Sa **puissance moyenne** :

$$P_z = \mu_{z^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n] \quad (16.2)$$

3. Sa **variance** qui mesure la puissance des fluctuations autour de la valeur moyenne

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - \mu_z)^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (z^2[n] - 2\mu_z z[n] + \mu_z^2) \\ &= \mu_{z^2} - 2\mu_z \mu_z + \mu_z^2 = \mu_{z^2} - 2\mu_z^2 + \mu_z^2 \end{aligned}$$

qui vaut finalement

$$\sigma_z^2 = \mu_{z^2} - \mu_z^2 \quad (16.3)$$

4. Son **écart-type** (ou déviation standard) défini comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma_z = \sqrt{\mu_{z^2} - \mu_z^2} \quad (16.4)$$

Sa valeur est égale à la valeur efficace des variations du signal autour de la valeur moyenne.

Il est intéressant de noter que la puissance moyenne (μ_{z^2}) de la variable z peut également s'écrire sous la forme

$$\mu_{z^2} = \mu_z^2 + \sigma_z^2 \quad (16.5)$$

On voit ainsi que la puissance de la variable z est égale à la puissance de sa valeur moyenne μ_z^2 plus la puissance de ses fluctuations σ_z^2 .

16.1.2. Notation vectorielle

Il est intéressant de relever que si l'on considère une notation vectorielle du type :

$$Z = \begin{bmatrix} z[0] \\ \vdots \\ z[N-1] \end{bmatrix}, \quad Z^T = [z[0], \dots, z[N-1]] \quad (16.6)$$

l'écriture de grandeurs importantes en est fortement allégée.

1. La puissance s'écrit simplement sous la forme d'un produit scalaire :

$$P_z = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n] = \frac{1}{N} Z^T Z \quad (16.7)$$

2. L'indépendance (ou *a contrario* la non correspondance) de deux **signaux à valeurs moyennes nulles** ou de deux vecteurs se mesure avec le produit scalaire :

$$\rho = X^T Y = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n] \quad (16.8)$$

Dans le cas où les signaux sont orthogonaux (c'est à dire indépendants), $X^T Y$ sera nul alors que si les signaux sont fortement dépendants (ou ressemblants), la valeur du produit $X^T Y$ sera proche de son maximum.

3. En statistique, cette dépendance est mesurée par le *coefficient de corrélation normalisé* dont la valeur est comprise entre 0 (indépendance totale) et ± 1 (totale correspondance)

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (16.9)$$

avec

$$\sigma_{xy} = \text{covariance de } x \text{ et } y = \frac{1}{N} (X - \mu_x)^T (Y - \mu_y) \quad (16.10)$$

$$\sigma_x = \text{écart-type de } x = \sqrt{\frac{1}{N} (X - \mu_x)^T (X - \mu_x)} \quad (16.11)$$

$$\sigma_y = \text{écart-type de } y = \sqrt{\frac{1}{N} (Y - \mu_y)^T (Y - \mu_y)} \quad (16.12)$$

Dans le cas de signaux à valeurs moyennes nulles, on a plus simplement

$$\rho = \frac{X^T Y}{\sqrt{(X^T X) (Y^T Y)}} \quad (16.13)$$

16.1.3. Fonction de répartition et densité de probabilités

Dans le cas d'une variable aléatoire continue x , on définit la probabilité d'avoir la valeur mesurée x' inférieure à une valeur x donnée

$$P(x) \equiv \text{prob}(x' < x) \quad (16.14)$$

Cette fonction porte le nom de fonction de répartition la variable x .

La probabilité d'avoir la valeur mesurée x' comprise entre deux valeurs x et $x + \Delta x$ vaut donc

$$P(x < x' < x + \Delta x) = P(x' < x + \Delta x) - P(x' < x) \quad (16.15)$$

Cette relation permet de définir la densité de probabilité

$$p(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < x' < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dP(x)}{dx} \quad (16.16)$$

et d'en tirer la fonction de répartition

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (16.17)$$

avec comme propriété évidente

$$P(-\infty < x' < +\infty) = P(\infty) = 1 \quad (16.18)$$

C'est la densité de probabilité qui est généralement utilisée comme modèle de pour décrire la répartition des valeurs d'une variable aléatoire. À partir de celle-ci, on peut calculer la valeur moyenne, la variance et la puissance d'une variable x à l'aide de

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (16.19)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad (16.20)$$

$$\mu_{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \quad (16.21)$$

16.1.4. Modèles statistiques

Les modèles les plus fréquemment utilisés sont

1. La **répartition uniforme** entre deux valeurs extrêmes x_{min} et x_{max}

$$p(x) = \text{constante} = \frac{1}{x_{max} - x_{min}} = \frac{1}{\Delta x} \quad (16.22)$$

On montre que dans ce cas, la variance vaut

$$\sigma_x^2 = \frac{(x_{max} - x_{min})^2}{12} = \frac{\Delta x^2}{12} \quad (16.23)$$

2. La **répartition gaussienne** entre $-\infty$ et $+\infty$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2 \sigma_x^2}\right) \quad (16.24)$$

Il est intéressant de relever que que la probabilité de trouver à l'intérieur des domaines $\pm\sigma_x$ et $\pm 3\sigma_x$ par rapport à la valeur moyenne valent respectivement

$$P(|x - \mu_x| < \sigma_x) = 68\% \quad (16.25)$$

$$P(|x - \mu_x| < 3\sigma_x) = 99.7\% \quad (16.26)$$

Suivant les applications, on peut imaginer d'autres distributions comme par exemple la **répartition exponentielle** décrite par

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_x} \exp\left(-\sqrt{2} \frac{|x - \mu_x|}{\sigma_x}\right) \quad (16.27)$$

16.2. Régression linéaire

La régression linéaire consiste en la recherche de la droite passant au mieux parmi un ensemble de points mesurés (figure 16.2). Le critère conduisant à cet optimum est la minimisation des distances quadratiques entre les points mesurés et la droite optimum.

On notera que la régression linéaire s'applique aux systèmes statiques alors que l'approche de Wiener (que l'on verra dans la section suivante) sert à optimiser des systèmes évoluant au cours du temps.

16.2.1. Mesure, modèle et écart

Comme on souhaite faire passer une droite parmi un ensemble de points, on se donne un modèle dont l'équation est :

$$y_m = ax + b \quad (16.28)$$

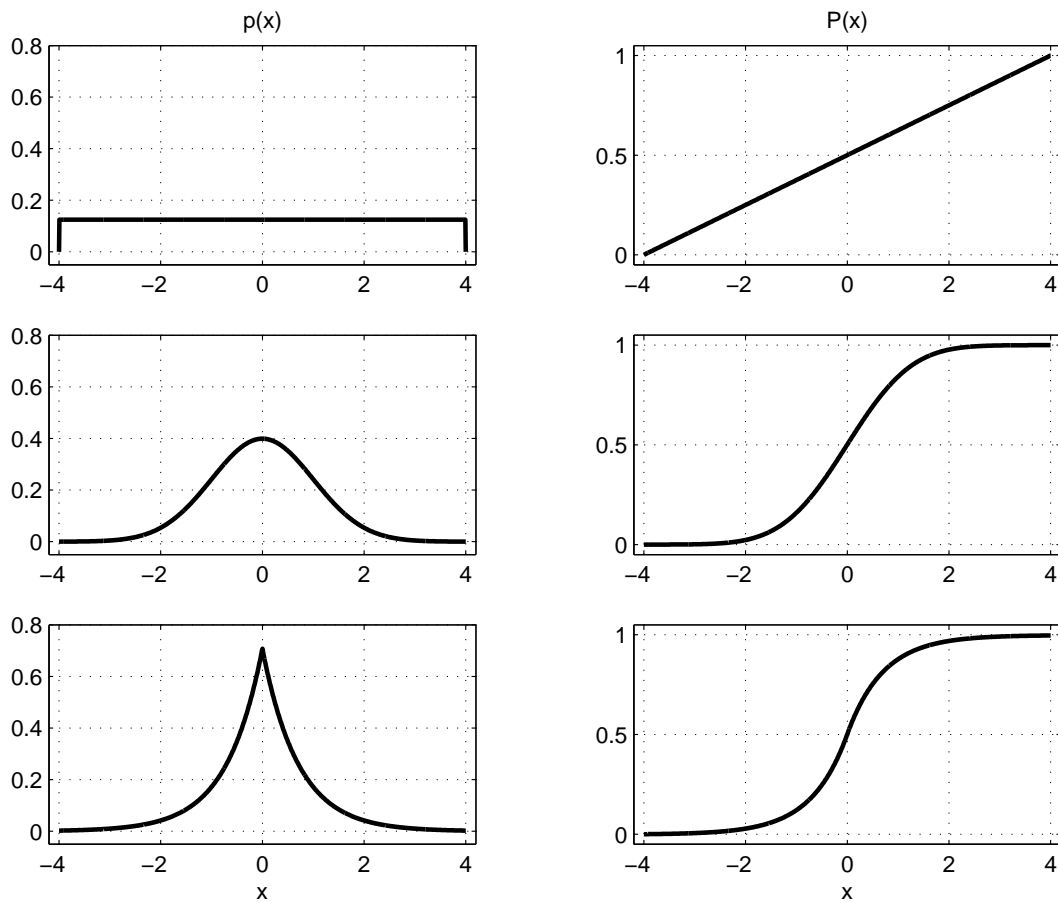


FIGURE 16.1.: Illustration des distributions uniforme, gaussienne et exponentielle et de leurs fonctions de répartition

L'écart de $y[n]$ par rapport au modèle s'écrit donc :

$$e[n] = y[n] - y_m[n]$$

$$e[n] = [n] - (a x[n] + b) \quad (16.29)$$

Si l'on décrit la mesure $y(n)$ par rapport au modèle $y_m(n)$, on a évidemment :

$$y[n] = y_m[n] + e[n] \quad (16.30)$$

On associe généralement deux grandeurs à l'écart $e[n]$:

1. sa valeur moyenne μ_e qui doit tendre vers 0 si le modèle n'est pas biaisé ;
2. sa puissance σ_e^2 qui doit diminuer lorsque a et b se rapprochent des "vraies" valeurs liant y à x ;
3. un estimateur est dit consistant si le biais et la variance tendent vers 0 quand le nombre d'échantillons tend vers l'infini.

On notera que pour le calcul d'une régression linéaire, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de bruit sur la valeur de la variable indépendante $x[n]$.

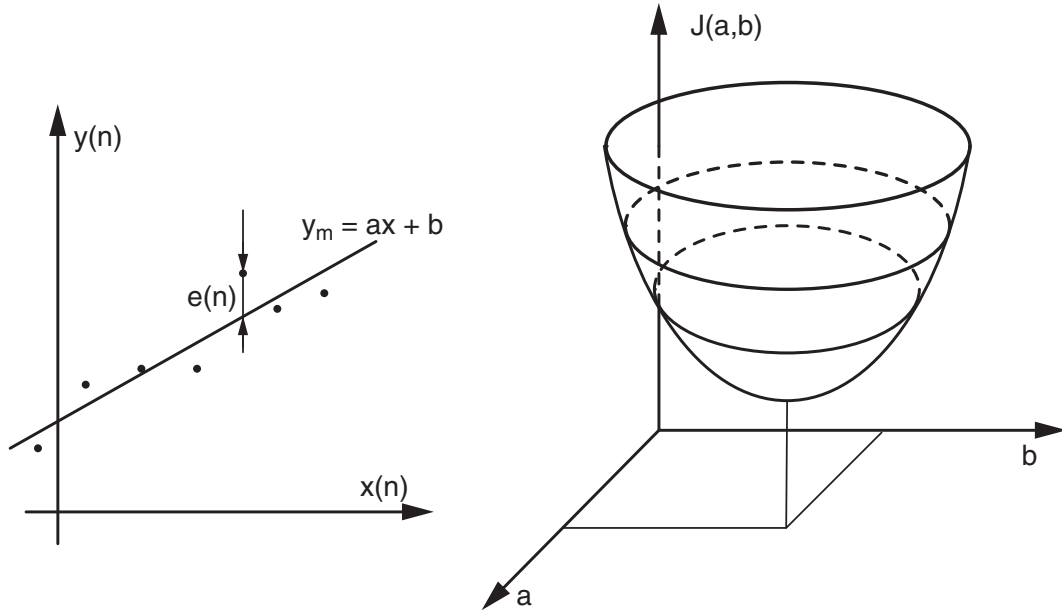


FIGURE 16.2.: Régression linéaire

16.2.2. Minimisation de l'écart quadratique

L'obtention de la droite passant au mieux parmi les points mesurés nécessite la recherche du minimum d'une fonction dépendant des paramètres recherchés a et b . Pour cela, on définit un critère d'optimisation qui mesure la puissance ou la variance de l'écart :

$$J(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - (ax[n] + b))^2 \quad (16.31)$$

Lorsque l'écart quadratique est minimum, on a :

$$\frac{\partial J(a, b)}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial J(a, b)}{\partial b} = 0 \quad (16.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(a, b)}{\partial a} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2 (y[n] - (ax[n] + b)) (0 - x[n] - 0) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-x[n]y[n] + ax^2[n] + bx[n]) \\ &= \frac{2}{N} \left(- \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n] + a \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] + b \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2 (y[n] - (ax[n] + b)) (0 - 0 - 1) \\
&= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-y[n] + ax[n] + b) \\
&= \frac{2}{N} \left(- \sum_{n=0}^{N-1} y[n] + a \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \sum_{n=0}^{N-1} b \right)
\end{aligned}$$

On en tire 2 équations dont les inconnues sont a et b :

$$a \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] + b \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n] \quad (16.33)$$

$$a \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \quad (16.34)$$

16.2.3. Équations de la régression linéaire

Se souvenant de la définition classique d'une valeur moyenne

$$\mu_x \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad \mu_y \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \quad (16.35)$$

et celle des moyennes quadratiques directes ou croisées

$$\mu_{x^2} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n], \quad \mu_{xy} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n] \quad (16.36)$$

on voit que les équations (16.34) et (16.33) s'écrivent plus simplement sous la forme :

$$a \mu_x + b = \mu_y \quad (16.37)$$

$$a \mu_{x^2} + b \mu_x = \mu_{xy} \quad (16.38)$$

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{pmatrix} \mu_x & 1 \\ \mu_{x^2} & \mu_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_{xy} \end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x & 1 \\ \mu_{x^2} & \mu_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_{xy} \end{pmatrix} \quad (16.39)$$

L'inversion de la matrice et le calcul explicite de a et b donnent alors

$$a = \frac{\mu_x \mu_y - \mu_{xy}}{\mu_x^2 - \mu_{x^2}} \quad (16.40)$$

$$b = \frac{\mu_x \mu_{xy} - \mu_y \mu_{x^2}}{\mu_x^2 - \mu_{x^2}} \quad (16.41)$$

Dans le cas particulier où les valeurs moyennes μ_x et μ_y sont nulles, la droite passe par l'origine et l'on a :

$$a = \frac{\mu_{xy}}{\mu_{x^2}} = \frac{\sum x[n]y[n]}{\sum x^2[n]} = \frac{X^T Y}{X^T X}, \quad b = 0 \quad (16.42)$$

16.3. Filtrage de Wiener

Dans de nombreuses applications, les signaux temporels sont entachées d'une interférence ou d'un bruit non désirés. Il faut alors trouver une solution permettant de supprimer ou tout au moins réduire ces composantes perturbatrices. Dans le cas où le spectre du signal désiré et celui du signal perturbateur se superposent, il n'est pas possible de recourir au filtrage classique. Le filtre de Wiener apporte une solution à ce problème lorsque le processus est stationnaire.

16.3.1. Définition du problème

On considère ici le schéma de la figure 16.3 dans lequel on trouve :

1. le signal d'excitation $x[n]$ connu ou mesuré ;
2. le signal de sortie du processus $y_p[n]$ inatteignable ;
3. le signal de sortie mesuré $y[n]$ entâché d'une perturbation inconnue $e[n]$;
4. le signal modélisé $y_w[n]$ à l'aide des paramètres w_k ;
5. le signal d'écart $\varepsilon[n]$ entre le modèle $y_w[n]$ et la mesure $y[n]$.

On admet que le signal mesuré $y[n]$, causé par l'excitation $x[n]$, peut être modélisé à l'aide d'un modèle MA (*Moving Average* = moyenne glissante) d'ordre p représentant un processus stationnaire inconnu :

$$y_p[n] = \sum_{k=0}^{p-1} w_k x[n-k]$$

Le but poursuivi est de trouver les coefficients w_k du modèle MA à partir de la mesure des signaux d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$.

La recherche d'une solution consiste à rendre $y_w[n]$ aussi proche que possible du signal $y_p[n]$ en minimisant l'erreur quadratique moyenne (*Mean Square Error* = MSE) par ajustage des coefficients w_k . Il est important de bien comprendre que

si la solution exacte est trouvée, le signal d'écart $\varepsilon[n]$ n'est pas nul, mais égal à la perturbation $e[n]$ de la mesure.

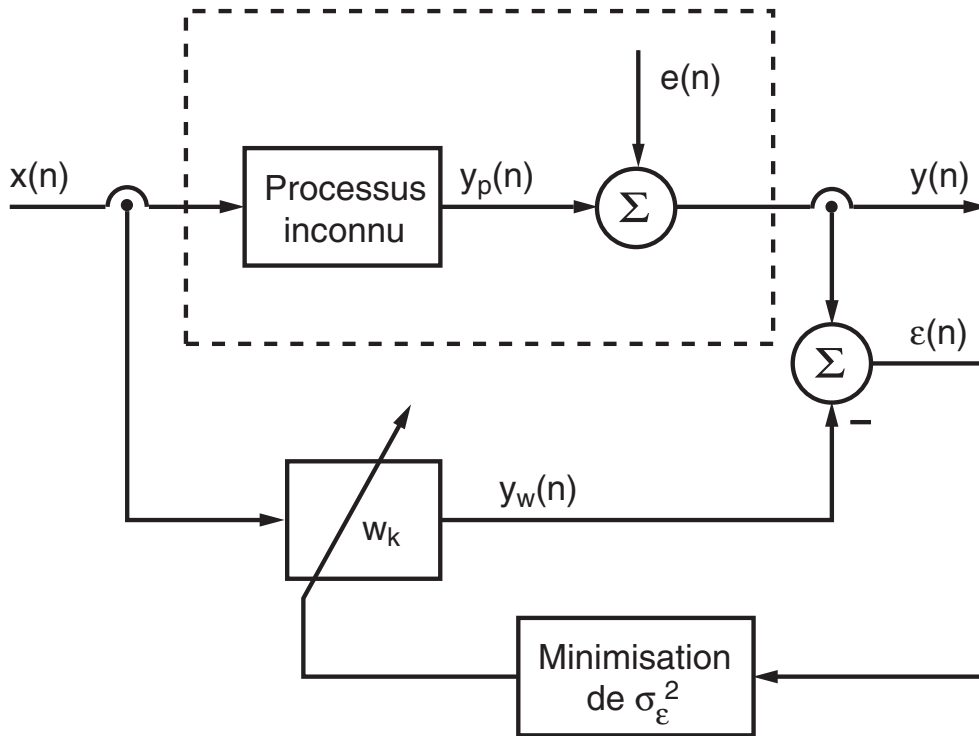


FIGURE 16.3.: Filtrage de Wiener

D'autre part, on peut relever que le filtrage de Wiener nous fournit trois informations distinctes

1. l'estimateur $y_w[n]$ du signal $y_p[n]$ qui vaut

$$y_w[n] = w_0 x[n] + w_1 x[n-1] + w_2 x[n-2] + \dots + w_p x[n-p] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (16.43)$$

2. l'estimateur $\varepsilon[n]$ de la perturbation $e[n]$;
3. un modèle MA du processus inconnu sous la forme de p coefficients w_k représentant sa réponse impulsionnelle finie (RIF).

16.3.2. Résolution au sens des moindres carrés

Le problème ainsi posé est proche de celui de la régression linéaire que l'on a étudié pour les systèmes statiques (ou sans mémoire). Dans le cas des systèmes dynamiques, les signaux évoluent temporellement. L'erreur est alors une fonction du temps que l'on cherche à réduire en minimisant sa valeur quadratique moyenne ; cela se fait en variant les coefficients inconnus w_k .

Afin d'alléger l'écriture de ce qui suit, on se contentera de traiter le cas particulier où le processus est décrit par trois paramètres (l'extension à une dimension plus grande se fait sans difficulté)

$$W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (16.44)$$

Partant de

$$\varepsilon[n] = y[n] - y_w[n] \quad (16.45)$$

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - [n])^2 \quad (16.46)$$

et tenant compte de l'équation (16.43), il vient

$$J(w_0, w_1, w_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - w_0 x[n] - w_1 x[n-1] - w_2 x[n-2])^2 \quad (16.47)$$

Le calcul des dérivées partielles de $J(w_0, w_1, w_2)$ par rapport à chacun des coefficients inconnus w_k donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_0} &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - w_0 x[n] - w_1 x[n-1] - w_2 x[n-2]) (-x[n]) \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]y[n] - w_0 x[n]x[n] - w_1 x[n]x[n-1] - w_2 x[n]x[n-2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_1} &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - w_0 x[n] - w_1 x[n-1] - w_2 x[n-2]) (-x[n-1]) \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n-1]y[n] - w_0 x[n-1]x[n] - w_1 x[n-1]x[n-1] - w_2 x[n-1]x[n-2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_2} &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - w_0 x[n] - w_1 x[n-1] - w_2 x[n-2]) (-x[n-2]) \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n-2]y[n] - w_0 x[n-2]x[n] - w_1 x[n-2]x[n-1] - w_2 x[n-2]x[n-2]) \end{aligned}$$

Tenant compte de la définition de la fonction de corrélation

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-k] y[n] = r_{yx}[-k] \quad (16.48)$$

on voit que ces trois dérivées s'écrivent plus simplement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_0} &= -2 (r_{xy}[0] - w_0 r_{xx}[0] - w_1 r_{xx}[-1] - w_2 r_{xx}[-2]) \\ \frac{\partial J}{\partial w_1} &= -2 (r_{xy}[+1] - w_0 r_{xx}[+1] - w_1 r_{xx}[0] - w_2 r_{xx}[-1]) \\ \frac{\partial J}{\partial w_2} &= -2 (r_{xy}[+2] - w_0 r_{xx}[+2] - w_1 r_{xx}[+1] - w_2 r_{xx}[0]) \end{aligned}$$

Comme l'erreur quadratique obtenue est minimum lorsque ces dérivées s'annulent, on obtient finalement un ensemble de 3 équations à 3 inconnues

$$w_0 r_{xx}[0] + w_1 r_{xx}[-1] + w_2 r_{xx}[-2] = r_{xy}[0]$$

$$w_0 r_{xx}[+1] + w_1 r_{xx}[0] + w_2 r_{xx}[-1] = r_{xy}[+1]$$

$$w_0 r_{xx}[+2] + w_1 r_{xx}[+1] + w_2 r_{xx}[0] = r_{xy}[+2]$$

que l'on écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & r_{xx}[-2] \\ r_{xx}[+1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] \\ r_{xx}[+2] & r_{xx}[+1] & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xy}[0] \\ r_{xy}[1] \\ r_{xy}[2] \end{pmatrix} \quad (16.49)$$

Cette matrice d'autocorrélation est obligatoirement symétrique car la fonction d'autocorrélation est paire.

En représentant la matrice d'autocorrélation par le symbole R_{xx} , le vecteur des paramètres par W et le vecteur d'intercorrélations par r_{xy} , ce résultat s'écrit plus succinctement sous la forme :

$$R_{xx} W = r_{xy} \quad (16.50)$$

dont la solution est

$$W = R_{xx}^{-1} r_{xy} \quad (16.51)$$

Cette équation porte le nom d'équation normale ou de Wiener-Hopf.

Remarque On peut relever qu'en statistique, la fonction de corrélation $r_{xy}[k]$ est souvent normalisée par le facteur $1/(N-1)$ afin de diminuer le biais

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+k]$$

16.3.3. Description matricielle

Les calculs que l'on vient d'exposer peuvent être présentés dans une écriture plus concise fréquemment utilisée. Définissant tout d'abord les vecteurs colonnes suivants :

$$W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{p-1} \end{bmatrix} \quad X[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-p+1] \end{bmatrix} \quad (16.52)$$

on obtient :

– le signal estimé $y_w[n]$

$$y_w[n] = \sum_{i=0}^{p-1} w_i x[n-i] = W^T X[n] = X[n]^T W \quad (16.53)$$

– l'erreur d'estimation $\varepsilon[n]$

$$\varepsilon[n] = y[n] - y_w[n] = y[n] - X[n]^T W \quad (16.54)$$

– l'erreur quadratique $\varepsilon^2[n]$

$$\varepsilon^2[n] = (y[n] - X[n]^T W)^2 \quad (16.55)$$

$$\varepsilon^2[n] = y^2[n] - 2y[n] X[n]^T W + W^T X[n] X[n]^T W \quad (16.56)$$

– l'erreur quadratique moyenne $J(W)$ fonction des paramètres W

$$\begin{aligned} J(W) &= E\{\varepsilon^2[n]\} = E\{(y[n] - X[n]^T W)^2\} \\ &= E\{y^2[n]\} - 2E\{y[n] X[n]^T W\} + E\{W^T X[n] X[n]^T W\} \end{aligned}$$

d'où

$$J(W) = r_{yy}[0] - 2r_{xy}^T W + W^T R_{xx} W \quad (16.57)$$

– le gradient de $J(W)$ par rapport au vecteur W des coefficients w_k

$$\frac{dJ}{dW} = -2r_{xy} + 2R_{xx} W \quad (16.58)$$

– le vecteur des paramètres optimaux qui annule le gradient

$$W = R_{xx}^{-1} r_{xy} \quad (16.59)$$

16.3.4. Applications du filtrage de Wiener

Les applications du filtrage de Wiener diffèrent par la manière dont est extraite la réponse désirée. Dans ce contexte, on peut distinguer quatre classes fondamentales utilisant le filtrage de Wiener :

1. l'identification de processus ; dans ce cas, on souhaite trouver la réponse impulsionnelle $w(n)$ représentant au mieux le processus inconnu ;
2. la modélisation inverse avec laquelle on tente de reconstruire un signal ;
3. la prédiction linéaire qui, sur la base des échantillons précédents, permet d'estimer une valeur à venir (codage LPC de la parole) ;
4. la suppression d'un signal perturbateur.

Dans ce qui suit, compte tenu du cadre dans lequel est présentée cette note, on se contentera d'illustrer comment on peut supprimer une perturbation grâce au filtrage adaptatif.

16.4. Suppression d'une perturbation

Comme illustration du filtrage de Wiener, imaginons la mesure de l'activité cardiaque d'un fœtus à l'aide d'un électrocardiogramme (ECG) pris au niveau de l'abdomen de la mère et qui, naturellement, est perturbé par l'ECG de celle-ci.

Cette mesure nécessite l'utilisation de 2 capteurs. Avec le premier, on mesure le signal de référence $x[n]$ représentant, si possible, uniquement l'ECG de la mère. Avec le deuxième, on mesure le signal $y[n]$ qui est l'ECG du fœtus perturbé par l'activité cardiaque de la mère.

Les signaux du schéma de Wiener (figure 16.4) sont alors les suivants :

1. $x[n]$ = l'ECG maternel mesuré près du coeur,
2. $y[n]$ = l'ECG foetal mesuré mais perturbé par celui de la mère,
3. $y_p[n]$ = l'ECG maternel près du fœtus (non mesuré),
4. $y_w[n]$ = l'estimation de l'ECG maternel près du fœtus,
5. $e[n]$ = l'ECG foetal non mesuré,
6. $\varepsilon[n]$ = l'estimation de l'ECG foetal.

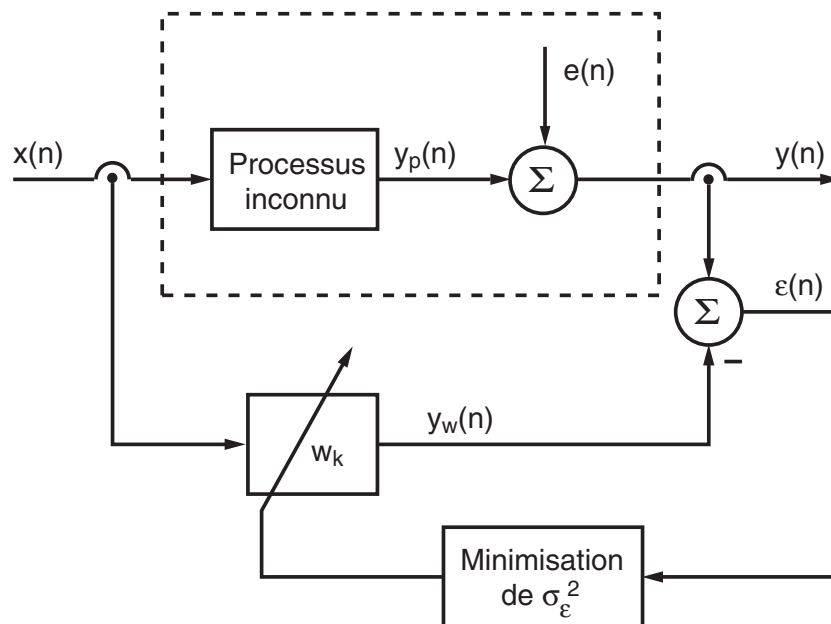


FIGURE 16.4.: Suppression de la perturbation $y_p(n)$

On notera que dans ce problème, les rôles sont inversés par rapport à la définition initiale du filtre de Wiener. En effet, le signal $e[n]$ considéré plus haut comme une perturbation du signal recherché $y_p[n]$, est, dans notre cas, le signal ECG que l'on souhaite mesurer et le signal $y_p[n]$ est la perturbation que l'on souhaite rejeter. C'est en recherchant $y_w[n] \simeq y_p[n]$ que l'on obtient une bonne estimation $\varepsilon[n]$ de l'ECG foetal $e[n] \simeq x[n] - y_w[n]$.

Dans cette simulation et dans un but didactique, on a choisi un modèle MA constitué de deux coefficients seulement $W = [w_0, w_1]^T$. Le système à résoudre s'écrit

alors :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[1] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xy}[0] \\ r_{xy}[1] \end{pmatrix}$$

La recherche des coefficients W peut se faire de deux manières :

1. Dans le cas où l'on considère que le processus générateur de la perturbation est stationnaire, on commence par enregistrer la totalité des signaux $x[n]$ et $y[n]$. Puis, on calcule le vecteur des coefficients W après avoir calculé R_{xx} et r_{xy} pour l'ensemble des points acquis.
2. Si les signaux ne sont pas stationnaires (ce qui est le cas lorsque le processus change au cours du temps), il faut, après chaque échantillonnage, calculer les coefficients $W = R_{xx}^{-1} r_{xy}$.

16.4.1. Filtrage de Wiener classique

La figure 16.5 présente les résultats que l'on obtient avec un filtrage de Wiener classique dans lequel l'ensemble des points acquis est analysé en une seule fois. Dans cette approche, on fait l'hypothèse que le processus générateur de la perturbation est stationnaire. Sur la figure 16.5, on a tracé dans l'ordre :

- le signal $x[n]$ correspondant à l'ECG maternel,
- le signal $y[n]$ correspondant à l'ECG foetal perturbé,
- l'estimation $\varepsilon[n]$ de l'ECG foetal et sa valeur exacte $e[n]$ en pointillé.

On peut relever à quel point le résultat obtenu est proche du signal original. Un exemple de codage pour deux paramètres est donné à la figure 16.6.

16.4.2. Remarque

D'un point de vue pratique, le filtre de Wiener tel qu'il a été présenté ci-dessus souffre de quelques limitations :

- il nécessite le calcul de la matrice d'autocorrélation R_{xx} et du vecteur d'intercorrélation r_{xy} , tous deux coûteux en temps de calcul ;
- il faut inverser la matrice R_{xx} , ce qui peut demander beaucoup de calcul et d'espace mémoire ;
- si les signaux ne sont pas stationnaires (ce qui est fréquent), R_{xx} et r_{xy} évoluent au cours du temps ; il faut donc à chaque instant résoudre l'équation de Wiener-Hopf.

Pour des applications en temps réel, il faut donc trouver un moyen rapide, efficace et robuste pour calculer récursivement la solution $W = R_{xx}^{-1} r_{xy}$. C'est ce que fait le filtrage adaptatif.

16.5. Filtrage adaptatif

Un filtre adaptatif est un système numérique dont les coefficients se modifient eux-mêmes en fonction des signaux extérieurs. Il est utilisé chaque fois qu'un environnement est mal connu ou changeant ou pour supprimer des perturbations situées dans

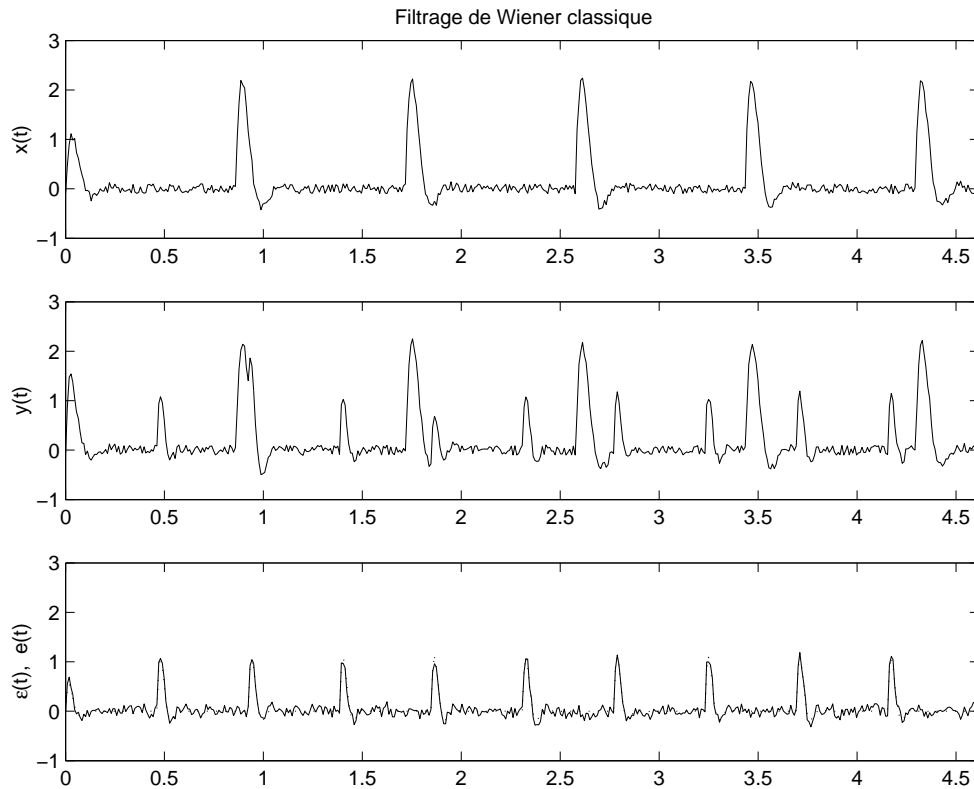


FIGURE 16.5.: Suppression d'une perturbation par filtrage de Wiener

le domaine de fréquences du signal utile, ce que les filtres classiques ne peuvent pas faire.

Un filtre adaptatif est constitué de deux parties distinctes :

- un filtre numérique à coefficients ajustables ;
- un algorithme de modification des coefficients basé sur un critère d'optimisation.

16.5.1. Algorithme récursif des moindres carrés (RLMS)

Nous avons vu au paragraphe 16.3.2 que pour trouver les paramètres optimaux, il faut descendre le long d'un paraboloïde afin d'atteindre le minimum de l'erreur quadratique moyenne. Mathématiquement, cette descente se fait dans le sens opposé à celui du gradient

$$\frac{\partial J}{\partial W} = -2 r_{xy} + 2 R_{xx} W$$

et on atteint le point optimum lorsque le gradient s'annule. La valeur des paramètres est alors donnée par la solution

$$W = R_{xx}^{-1} r_{xy}$$

De manière heuristique, on imagine bien que cette solution peut être atteinte récursivement en corrigeant les valeurs des coefficients w_k en chaque instant n dans

16. INTRODUCTION AU FILTRAGE ADAPTATIF

```

% les signaux mesures sont stockes dans les vecteurs xt et yt
% initialisation des calculs
rxx0 = 0; rxx1 = 0;
rxy0 = 0; rxy1 = 0;
% boucle de calculs
kmax = length(xt)-1;
for n = 1:kmax
    % lecture des signaux
    xn = xt(n);
    yn = yt(n);
    xn1 = xt(n+1);
    yn1 = yt(n+1);
    % correlation
    rxx0 = rxx0 + xn*xn;
    rxx1 = rxx1 + xn*xn1;
    rxy0 = rxy0 + xn*yn;
    rxy1 = rxy1 + xn*yn1;
end;
% solution de Wiener-Hopf
Rxx = [rxx0 rxx1;
       rxx1 rxx0]
rxy = [rxy0; rxy1]
w = inv(Rxx) * rxy
% calcul du signal recherche
xn1 = 0;
for n = 0:kmax-1
    xn = xt(n+1);
    yn = yt(n+1);
    ew(n+1) = yn - [xn, xn1]*w;
    xn1 = xn;
end;

```

FIGURE 16.6.: Exemple de codage d'un filtre de Wiener en temps différé

le sens opposé à l'évolution de l'erreur quadratique par rapport au vecteur des coefficients $W[n]$ (figure 16.7) :

$$W[n] = W[n-1] - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon^2[n]}{\partial W} \right) \quad (16.60)$$

où γ est un facteur de pondération du gradient.

Comme l'erreur quadratique à l'instant n vaut :

$$\varepsilon^2[n] = \left(y[n] - \sum_{i=0}^{p-1} w_i x[n-i] \right)^2 = (y[n] - X[n]^T W)^2$$

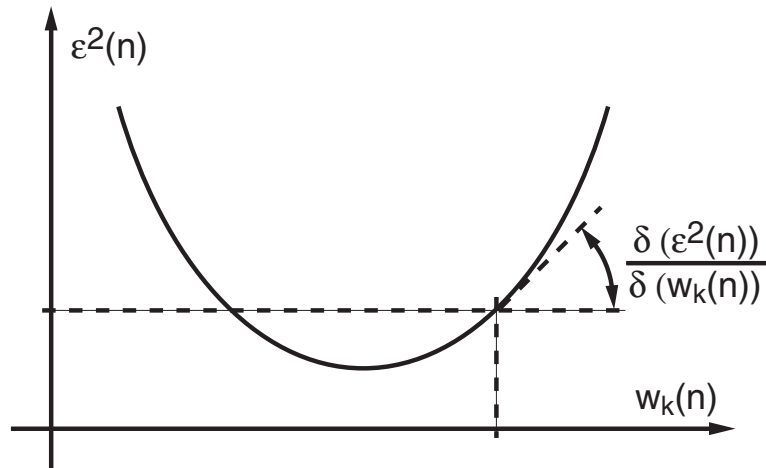


FIGURE 16.7.: Erreur quadratique $\varepsilon^2(n)$ en l'instant n et sa dérivée par rapport au coefficient $w_k(n)$

il vient :

$$\frac{\partial \varepsilon^2[n]}{\partial W} = 2\varepsilon[n] \frac{\partial \varepsilon[n]}{\partial W} = -2\varepsilon[n] X[n]$$

On en déduit que la recherche de l'optimum peut se faire avec l'algorithme récursif suivant

$$W[n] = W[n-1] + \gamma \varepsilon[n] X[n] \quad (16.61)$$

que l'on désigne sous le nom d'algorithme RLMS (*Recursive Least Mean Square*).

Les grandeurs dont on a besoin sont :

– le vecteur des p coefficients à l'instant $n-1$:

$$W[n-1] = [w_0[n-1], w_1[n-1], \dots, w_{p-1}[n-1]]^T$$

– les p dernières valeurs du signal d'entrée :

$$X[n] = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+1]]^T$$

– la valeur du signal de sortie $y[n]$ pour calculer l'écart à l'instant n

$$\varepsilon[n] = y[n] - \sum_{i=0}^{p-1} w_i x[n-i] \quad (16.62)$$

– le gain d'adaptation γ de l'algorithme récursif (généralement très inférieur à 1). La valeur du gain d'adaptation γ est difficile à fixer : si on la choisit trop faible, la convergence vers la valeur optimum est très lente ; si on la choisit trop forte, la convergence se fait en oscillant longuement autour de la valeur optimum ; enfin, si le gain d'adaptation est trop élevé, le processus d'optimisation diverge.

Les avantages de cet algorithme résident dans la simplicité à le déduire, à le programmer, et au peu de calculs à effectuer. Par contre, ses inconvénients sont la lente convergence des paramètres et le risque d'oscillations ou de divergence si le gain d'adaptation est trop grand. Ces inconvénients, associés au fait que les signaux sont généralement non stationnaires, ont nécessité la recherche d'une adaptation automatique du gain γ .

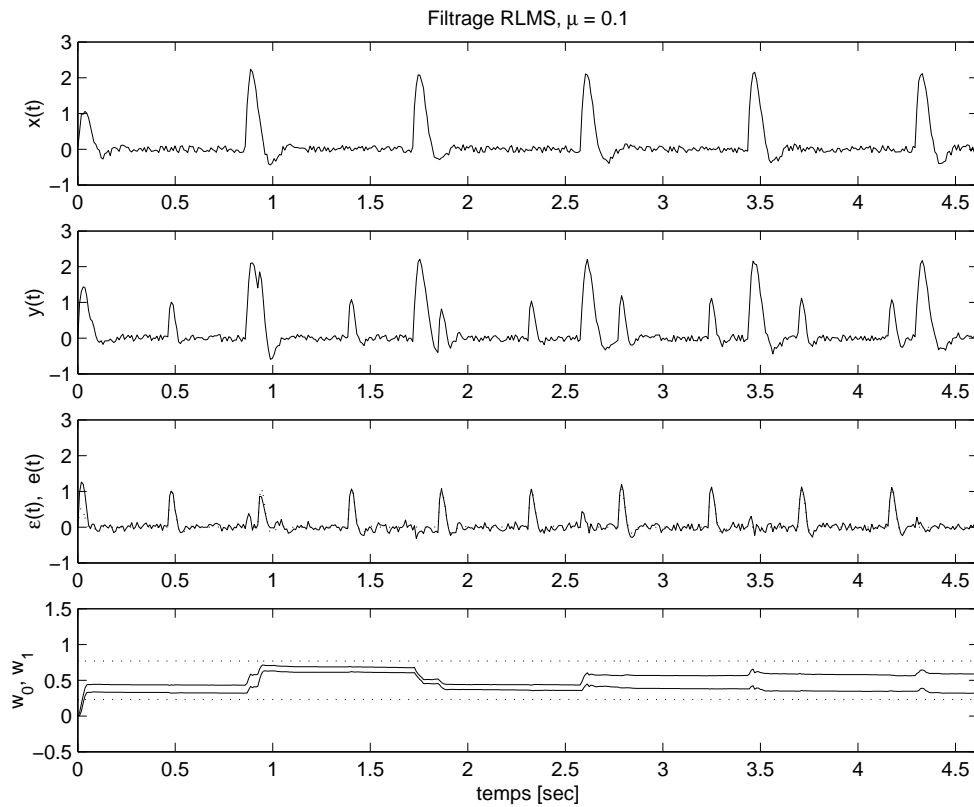


FIGURE 16.8.: Filtrage avec l'algorithme RLMS

16.5.2. Algorithme récursif normalisé (NLMS)

En 1975, Widrow et ses coauteurs ont montré qu'un gain d'adaptation stable compris entre 0 et 1 peut être utilisé si on le normalise par le nombre p de paramètres du vecteur W et par la puissance ou variance σ_x^2 du signal d'entrée $x[n]$.

Gain d'adaptation normalisé

Pour la plupart des situations pratiques, on choisit un gain initial $\gamma_0 \simeq 0.1$ qui, après normalisation par le nombre de paramètres et par la variance du signal d'entrée, donne un gain d'adaptation qui évolue en fonction de la puissance du signal d'entrée :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{p \cdot \sigma_x^2} \quad (16.63)$$

De manière à éviter que le gain n'augmente indéfiniment lorsque la puissance du signal de référence tend vers zéro, on peut corriger le dénominateur du gain en y ajoutant un terme constant $a \ll 1$:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{a + p \cdot \sigma_x^2} \quad (16.64)$$

L'algorithme s'écrit alors :

$$W[n] = W[(n-1)] + \frac{\gamma_0}{a + p \cdot \sigma_x^2} \varepsilon[n] X[n] \quad (16.65)$$

Comme cet algorithme utilise un gain normalisé par la puissance σ_x^2 du signal $x[n]$, il porte le nom d'algorithme NLMS (*Normalised Least Mean Square*).

Puissance moyenne du signal de référence

Dans le cas où le signal $x(n)$ n'est pas stationnaire, on doit évaluer sa puissance $P_x \equiv \sigma_x^2$ en tout instant :

$$P_x[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x^2[k]$$

Cette valeur moyenne peut également être évaluée à l'aide d'un filtre passe-bas en oubliant progressivement les anciennes valeurs.

Se souvenant qu'un filtre passe-bas d'ordre 1 et de gain statique unité, d'entrée $e[n]$ et de sortie $s[n]$ est décrit par sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (16.66)$$

ou, de manière équivalente, par son équation récursive

$$s[n] = (1-\lambda)e[n] + \lambda s[n-1] \quad (16.67)$$

le calcul de $P_x[n]$ se fait de la manière suivante :

$$P_x[n] = (1-\lambda)x^2[n] + \lambda P_x[n-1] \quad (16.68)$$

avec $\lambda = 0.90 \cdots 0.98$ suivant l'horizon de mémoire N désiré

$$N \simeq 3 K_c = \frac{3}{|\ln(\lambda)|}$$

On montre aisément qu'au-delà de $N = 3/|\ln(\lambda)|$, la contribution des anciennes valeurs est inférieure à 5%. On peut relever que l'horizon de mémoire N vaut 30 pour $\lambda = 0.90$ ou 150 lorsque $\lambda = 0.98$.

Résultats

Les résultats ainsi obtenus sont présentés à la figure 16.9. Ils illustrent à l'évidence la rapidité de la convergence et la qualité des résultats qui est pratiquement aussi bonne que celle obtenue avec le filtrage optimum de Wiener.

La figure 16.10 montre comment le gain change au cours du temps; on y voit nettement son augmentation lorsque la puissance du signal de référence est faible. Une partie du codage est présenté dans la figure 16.11.

16. INTRODUCTION AU FILTRAGE ADAPTATIF

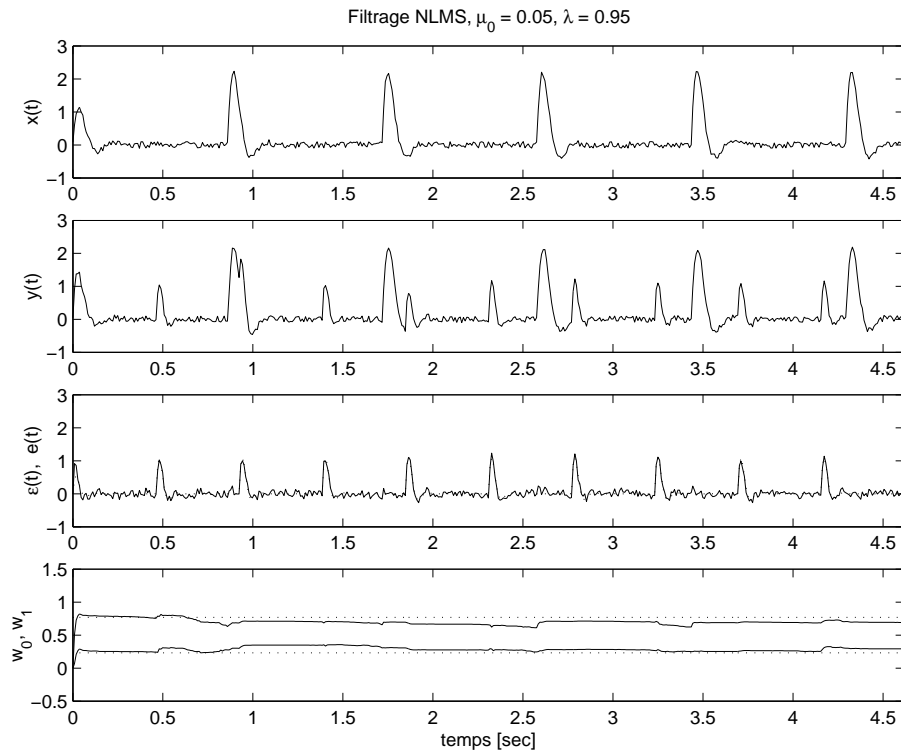


FIGURE 16.9.: Filtrage avec l'algorithme NLMS

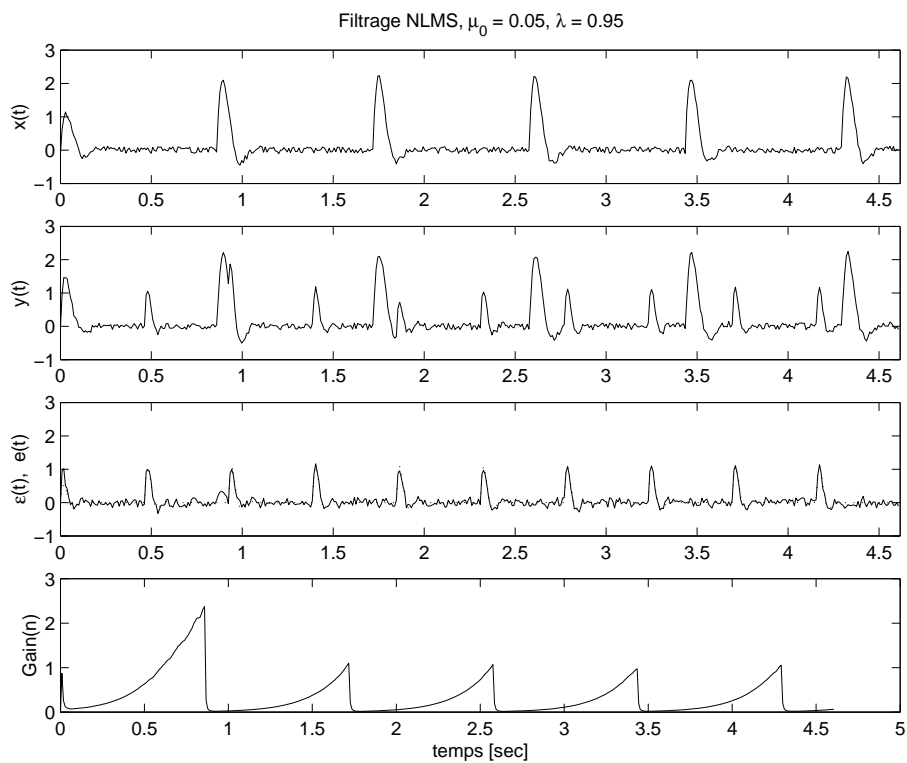


FIGURE 16.10.: Évolution du gain de l'algorithme NLMS

```

% constantes
p = 3; % modifier selon les besoins
gamma0 = 0.1;
lambda = 0.95;
% initialisation des calculs
Wn = zeros(p,1);
Pxx = 0;
a = 1e-3;
% boucle de calculs
for n = p-1:kmax-1
    % signaux a l'instant n
    xn = xt(n+1);
    yn = yt(n+1);
    % puissance moyenne de x(n)
    Pxx = (1-lambda)*xn^2 + lambda*Pxx;
    % calcul des paramètres W(n)
    Xn = xt(n+1:-1:n-p+2);
    en = yn - Xn'*Wn;
    Wn = Wn + gamma0/(a+p*Pxx) * en*Xn;
    % memorisation du signal recherche et des parametres
    ew(n+1) = en;
    wt(n+1,:) = Wn';
end;

```

FIGURE 16.11.: Exemple de codage d'un filtre NLMS

16.6. Exercices

RL 1

Considérant l'ensemble des notes n suivantes :

2.8	4.7	3.2	4.2	2.6	4.8	3.5	5.4	5.4	4.4
4.0	5.6	5.3	4.6	5.3	4.6	3.4	3.2	3.4	4.2

1. Calculez la note moyenne et sa déviation standard.
2. Comparez aux résultats obtenus avec les fonctions Matlab `mean`, `var` et `std`.
3. Calculez puis tracez à la main la répartition des notes telles que

$$n < 3, \quad 3 \leq n < 4, \quad 4 \leq n < 5, \quad 5 \leq n \leq 6$$

4. Commentez vos résultats.

RL 2

La mesure de la caractéristique statique d'un amplificateur a donné les résultats suivants :

U_{in} [mV]	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50
U_{out} [V]	-3.69	-3.38	-2.43	-1.68	-0.56	0.17	0.87	1.96	2.45	3.28	3.76

1. Tracez cette caractéristique ; qu'en pensez-vous ?
2. Admettant que l'amplificateur est linéaire, utilisez la régression linéaire (équations de la section 16.2.3) pour calculer à la main son gain et sa tension de décalage. Puis :
 - a) Comparez aux résultats fournis par `polyfit`.
 - b) Tracez sur un même graphe les points mesurés et la caractéristique linéaire de l'amplificateur avec une abscisse fine ($\Delta U_{in} = 1 \text{ mV}$).
 - c) Calculez la puissance des écarts entre le modèle et la mesure.
3. Considérant que l'amplificateur n'est pas parfaitement linéaire, utilisez la fonction `polyfit` pour calculer le polynôme d'ordre 3 (pourquoi 3 et pas 2 ou 4 ?) passant au mieux parmi ces points.
 - a) Y a-t-il un sens à donner le gain de l'amplificateur et sa tension de décalage ?
 - b) Tracez sur un même graphe les points mesurés et la caractéristique non linéaire de l'amplificateur avec une abscisse fine ($\Delta U_{in} = 1 \text{ mV}$).
 - c) Calculez la puissance des écarts entre le modèle et la mesure ?
4. Répétez le point 3 avec un polynôme d'ordre 9. Commentez la puissance des écarts et l'allure de ce polynôme par rapport aux modèles précédents.

Prb 1

On s'intéresse ici aux notions de base des statistiques et probabilités. Pour cela :

1. Générez les trois signaux suivants avec $N = 10'000$ et $n = 0 : N - 1$,

$$x_u(n) = \text{rand}(\text{size}(n)), \quad x_g(n) = 0.5 \text{randn}(\text{size}(n)), \quad x_s(n) = \sin(2\pi n/N)$$

2. Tracez ces signaux par rapport à n (`subplot(3,1,k)`); observez-les avec le zoom; commentez vos observations.
3. Quels résultats fournissent les fonctions `rand` et `randn` ?
4. Pouvez-vous donner une estimation des valeurs moyennes et variances des trois signaux ?
5. Pour chacun des 3 signaux, calculez leurs valeur moyenne, variance et écart-type; vérifiez l'équation (16.3); commentez.
6. Tracez et comparez les 3 histogrammes (`hist(xn,round(sqrt(N)))`).
7. Commentez ces résultats d'un point de vue statistique; en particulier, que pensez-vous de la probabilité d'apparition de certaines valeurs ?

Prb 2

Avec l'exercice précédent vous avez compris que l'histogramme permet de compter le nombre de fois n_k où une valeur x se situe dans la case k de largeur

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_k}, \quad \text{avec } N_k = \text{nombre de cases}$$

La probabilité de se trouver dans une case est donc égale au contenu de la case divisé par le nombre total de points N . On définit ainsi la fonction de probabilité discrète

$$p(k) \equiv p(k\Delta x \leq x < (k+1)\Delta x) = \frac{n_k}{N} \quad (16.69)$$

On peut également considérer la somme cumulée des valeurs de l'histogramme et normaliser son maximum à 1. On obtient alors la fonction de répartition des probabilités définie comme la probabilité que la valeur de x soit inférieure à une valeur donnée $X = K \Delta x$. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$P(K) \equiv p(-\infty < x \leq K \Delta x) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^K p(k) \quad (16.70)$$

Cette approche permet de calculer simplement la probabilité que la valeur de x se situe dans un domaine donné; on a en effet

$$P(K_1 \Delta X < x \leq K_2 \Delta X) = \sum_{k=K_1+1}^{K_2} p(k) = P(K_2) - P(K_1) \quad (16.71)$$

Dans le cas d'une variable continue, la fonction de probabilité devient une densité de probabilité définie comme suit

$$p(x) = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{n_k}{N \Delta x} \right) \quad (16.72)$$

et la fonction de répartition des probabilités s'écrit alors

$$P(x : x' < x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (16.73)$$

Afin de bien comprendre ce qui précède, je vous propose d'appliquer les points ci-après sur les 3 signaux suivants

- un signal aléatoire $x_u[n]$ à distribution uniforme compris entre -4 et +4;
- un signal aléatoire $x_g[n]$ à distribution gaussienne de variance unité;
- un signal sinusoïdal $x_s[n]$ d'amplitude 4 et de période N ;

où $N = 10'000$ et $n = 0 : N - 1$.

1. Représentez le signal avec
`subplot(3,1,1); plot(nn,xn)`.
2. Calculez sa valeur moyenne et sa variance; comparez avec les valeurs théoriques.
3. Calculez son histogramme avec
`[nk,xk] = hist(xn,sqrt(N))`.
4. Calculez et représentez la fonction de probabilité $p(k)$ avec
`subplot(3,1,2); plot(xk,pk)`.
5. Calculez et représentez la répartition des probabilités $P(K)$ avec
`PK = cumsum(pk); subplot(3,1,3); plot(xk,PK)`.
6. Calculez la probabilité de trouver une valeur de x comprise entre -1 et +1 (la fonction `find` facilite ce calcul).
7. Analysez et commentez vos graphes et résultats.

Prb 3

Appliquez ce que vous venez de voir à des signaux réels (sons et images). Plus précisément,

1. Chargez le fichier sons : `xt = load('colibri.txt')`; normalisez sa valeur maximum à 1 : `xt = xt/max(abs(xt))`;
2. Tracez son graphe et écoutez-le avec `wavplay(xt,8000)`;
3. Calculez sa valeur moyenne, sa puissance et sa variance.
4. Tracez son histogramme. Quel est le modèle de distribution qui vous paraît approprié pour décrire le signal ?
5. Ajustez les modèles choisis sur la courbe de probabilité réelle. Commentez.
6. Chargez le fichier image : `img = imread('lena256.jpg')`; visualisez son contenu et transformez la matrice image en un vecteur : `img_vecteur = double(img(:))`;
7. Répétez les points 1 à 5 ci-dessus.

Corr 1

Dans le but de vous familiariser avec les résultats de la corrélation, appliquez la fonction Matlab de corrélation `rx = xcorr(y,x,L,'unbiased')` à chacun des 3 signaux suivants

$$x_c[n] = \sin(2\pi n/N), \quad x_q[n] = \text{square}(2\pi n/N), \quad x_g[n] = \text{randn}(\text{size}(n))$$

où $n = 0 : 1000$ et $N = 50$. Pour ce faire :

1. calculez puis tracez les 3 signaux dans une fenêtre ;
2. calculez puis tracez les 3 fonctions d'autocorrélation dans une nouvelle fenêtre ;
3. quelle est l'utilité du paramètre L ?
4. vous souvenant que $r_{xx}[0] = P_x$, que doit valoir le maximum de chaque autocorrélation ?
5. calculez et tracez l'intercorrélation entre $x_c[n]$ et $x_q[n]$ (prenez garde à l'ordre des signaux `rcq = xcorr(xq,xc,L,'unbiased')`).

WH 1

Considérant un filtre MA causal décrit par ses coefficients $w[0 \dots 2] = [3, 2, 1]$,

1. dessinez le schéma fonctionnel de ce filtre en prenant $x[n]$ et $y[n]$ comme signaux d'entrée et de sortie ;
2. montrez que, si on lui applique le signal $x(n) = [+1, -1, +1, -1, +1]$, la sortie vaudra $y[n] = [+3, -1, +2, -2, +2]$;
3. pour faire ce calcul, quelle modification implicite avez-vous appliqué à $x[n]$?
4. calculez $y[n]$ avec Matlab.

WH 2

Ayant appliqué le signal $x[n] = [+1, +1, -1, +1, -1, 0]$ à un système MA décrit par l'équation

$$y[n] = w_0 x[n] + w_1 x[n-1]$$

on a obtenu en sortie le signal $y[n] = [+2, +3, -1, +1, -1, -1]$. Utilisez le filtrage de Wiener pour trouver les paramètres w_0, w_1 sans Matlab. Pour ce faire :

1. Calculez à la main les fonctions de corrélation $r_{xx}([k])$ et $r_{xy}[k]$ pour k compris entre -5 et $+5$.
2. Quelles sont les valeurs de corrélation dont vous avez besoin pour résoudre ce problème ?
3. Écrivez les vecteurs et matrices r_{xx}, r_{xy}, R_{xx} nécessaires pour le filtrage de Wiener.
4. Résolvez le système $R_{xx} W = r_{xy}$.
5. A-t-on besoin de 5 couples de valeurs (x, y) pour trouver w_0 et w_1 ? Justifiez et vérifiez votre réponse.
6. Quel est l'avantage d'avoir un grand nombre de valeurs (x, y) ?

WH 3

Résolvez le problème précédent avec l'aide de Matlab. Pour ce faire, utilisez

1. la fonction $\text{rxy} = \text{xcorr}(y, x, p-1)$ où p est le nombre de paramètres (prenez garde à l'ordre des vecteurs x et y);
2. la fonction $\text{Rxx} = \text{toeplitz}(rxx)$ pour remplir la matrice de corrélation R_{xx} .

WH 4

Dans ce qui suit on souhaite extraire un signal inconnu $s(n)$ fortement perturbé par le réseau électrique de fréquence 50 Hz. Pour ce faire, on a mesuré simultanément le signal du réseau $x(n)$ et le signal bruité $y(n)$ en les échantillonnant à la fréquence f_e de 10 kHz. Pour résoudre ce problème,

1. chargez les signaux contenus dans le fichier `xy50hz.txt`:

```
signaux = load('xy50hz.txt');
xn = signaux(:,1);
yn = signaux(:,2);
N = length(xn);
nn = 0:Te:(N-1)*Te;
```
2. tracez $x(n)$ et $y(n)$;
3. dessinez le schéma de Wiener; où se trouve le signal $s[n]$?
4. recherchez $s[n]$ en appliquant l'algorithme de Wiener-Hopf avec 2 paramètres;
5. augmentez le nombre de paramètres p ; observez leurs valeurs et la puissance de $s[n]$; concluez;
6. calculez le rapport signal sur bruit S_{eff}/Y_{eff} .

LMS 1

Il est possible d'évaluer en temps réel la puissance moyenne d'un signal en "oubliant" progressivement les valeurs anciennes. Ceci peut se faire de la manière suivante :

$$P_x[n] = (1 - \lambda) x^2[n] + \lambda P_x[n - 1]$$

1. Montrez que cet algorithme est l'équivalent d'un filtre passe-bas d'ordre 1. Pour cela :
 - a) dessinez son schéma fonctionnel;
 - b) calculez sa fonction de transfert;
 - c) que vaut l'instant caractéristique et l'horizon de mémoire à 5%?
2. Imaginez (sans l'aide de Matlab!) un signal $x(t)$ composé d'une sinusoïde d'amplitude $A_1 = 1 V$, de fréquence $f_0 = 1000 Hz$ et de durée $t_{max} = 0.1 sec$ suivi de la même sinusoïde d'amplitude $A_2 = 2 V$. Comment évolue la puissance de ce signal? Que vaut-elle?
3. Générez le signal $x[n]$; quelle fréquence d'échantillonnage prenez-vous?
4. Calculez sa puissance moyenne avec l'algorithme ci-dessus en prenant $\lambda = 0.95$ et $\lambda = 0.99$; quel est l'horizon de mémoire à 5% correspondant à ces deux valeurs?
5. Tracez $P_x[n]$; concluez.

LMS 2

Dans ce problème, on souhaite diminuer le bruit environnant lors d'une conversation téléphonique en utilisant un deuxième microphone placé sur le côté extérieur du téléphone. Le microphone de base capte le message entaché du bruit environnant, alors que le deuxième capte seulement le bruit. Grâce à l'algorithme LMS, il est possible d'améliorer sensiblement la qualité du message.

Pour le vérifier :

1. Dessinez le schéma de Wiener correspondant à ce problème et précisez quels sont les signaux en présence.
2. Le fichier `bjrbruit.dat` constitué de trois colonnes contient trois signaux enregistrés à la fréquence $f_e = 8\text{ kHz}$, à savoir, le bruit (microphone extérieur = $x[n]$), le message perturbé par le bruit (microphone-bouche = $y[n]$) et, dans un but de comparaison, le message non bruité. De ce fichier, extrayez les deux premiers signaux ; tracez-les et écoutez-les avec la fonction `soundsc(signal, fe)`.
3. Appliquez l'algorithme NLMS sur les deux premiers signaux pour diverses longueurs p du vecteur W .
4. Pour $p = 5$ et $p = 20$ par exemple, tracez les valeurs asymptotiques des composantes de $W(n \rightarrow \infty)$. Qu'en pensez-vous ?
5. Tracez le signal fourni par NLMS et l'évolution des paramètres $W[n]$.
6. Observez les spectrogrammes des trois signaux (`specgram(signal, 128, fe)`) ; commentez vos observations.
7. Écoutez le signal extrait ; qu'en pensez-vous ?
8. Le temps de calcul sur un PC 500 MHz est prohibitif (environ quinze fois la durée du message). Sachant qu'en un cycle d'horloge, un DSP réalise une multiplication et une addition, pensez-vous qu'il soit possible de faire ces calculs en temps réel avec un DSP dont le temps de cycle est de 20 ns ? Justifiez votre réponse.

Bibliographie

- [1] B. Widrow, S.D. Stearns : *Adaptive Signal Processing Algorithms*, Prentice Hall, 1985.
- [2] S.D. Stearns, R.A. David : *Signal Processing Algorithms in Matlab*, Prentice Hall, 1996.
- [3] E.C. Ifeachor, Q.W. Jervis : *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Addison Wesley, 1993.
- [4] S. Haykin : *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1991.

Sixième partie .

Annexes

17. Formulaire Signaux et systèmes

17.1. Systèmes analogiques

Produit de convolution pour des systèmes causaux

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

Transformation de Laplace

$$\epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \exp(-at) \leftrightarrow \frac{1}{s + a}$$

$$\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$x(t \rightarrow 0) = s X(s)|_{s \rightarrow \infty} \qquad x(t \rightarrow \infty) = s X(s)|_{s \rightarrow 0}$$

Formes canoniques de Bode et de Laplace

$$1 + \frac{s}{\omega_1} \qquad 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2$$

$$s + \omega_1 \qquad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \qquad \zeta \equiv \frac{1}{2Q_0}$$

Stabilité et instants caractéristiques

$$\text{stabilité} \Rightarrow \operatorname{Re}(p_k) < 0$$

$$\tau = \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_k)|}, \quad T_p = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}(p_k)|}, \quad t_{trans} \simeq 5\tau, \quad N_{osc} = \frac{t_{trans}}{T_p} \simeq \left| \frac{\operatorname{Im}(p_k)}{\operatorname{Re}(p_k)} \right|$$

Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

$$Y(s) = X(s) G(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$D(s) = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p \quad \text{si } \zeta < 1$$

$$t_{5\%} \simeq 3\tau \quad \text{et} \quad \zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Systèmes contre-réactionnés

$$G_{bf}(s) \equiv G_w(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

17.2. Signaux analogiques

Valeurs efficaces des signaux carrés, sinusoïdaux et triangulaires d'amplitude A

$$X_{car,eff} = A = \frac{A}{\sqrt{1}}, \quad X_{sin,eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad X_{tri,eff} = \frac{A}{\sqrt{3}}, \quad \text{avec } X_{dc} = 0$$

Signaux périodiques développés en séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad \text{avec} \quad X(jk) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 = X(j0) \\ A_k = 2 |X(jk)| \\ \alpha_k = \angle X(jk) \end{cases}$$

SIR centrée d'amplitude A , de période T et de largeur Δt

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}(k f_0 \Delta t)$$

SIT centrée d'amplitude A , de période T et de largeur $2\Delta t$

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}^2(k f_0 \Delta t)$$

SIE d'amplitude A , de période T et de constante de temps τ

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \frac{1 - \exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right)}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \simeq A \frac{\tau}{T} \frac{1}{1 + j2k\pi f_0 \tau} \quad \text{si } \tau \ll T$$

Quelques propriétés des séries de Fourier

puissance :
$$P \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = P_{dc} + P_{ac}$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

décalage :
$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk)$$

modulation :
$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(j(kf_0 \mp f_p))$$

rotation Oy :
$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X^*(jk)$$

Signaux non périodiques (transformation de Fourier)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \Leftrightarrow X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

convolution :
$$x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow H(jf) \cdot X(jf), \quad h(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow H(jf) \otimes X(jf)$$

énergie :
$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \text{ ou } [\text{V}^2/\text{Hz}]$$

valeurs à l'origine :
$$x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df, \quad X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

Impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt

$$x(t) = A \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right) \Leftrightarrow X(jf) = A\Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A\Delta t \text{sinc}(f \Delta t)$$

Filtre passe-bas idéal : $H(jf) = 1$ si $-\Delta f < f < +\Delta f$

$$H(jf) = \text{rect} \left(\frac{f}{2\Delta f} \right) \Leftrightarrow h(t) = 2\Delta f \frac{\sin(2\pi \Delta f t)}{2\pi \Delta f t} = 2\Delta f \text{sinc}(2\Delta f t)$$

17.3. Échantillonnage des signaux**Signaux échantillonnés**

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \Leftrightarrow X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e))$$

17. Formulaire Signaux et systèmes

recouvrement spectral : $f_{app} = |m f_e - f| < \frac{f_e}{2}, \quad m > 1$

théorème de Shannon : $f_e > 2 f_{max}, \quad$ pratiquement : $f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max}$

filtre anti-recouvrement (le plus souvent de type Butterworth d'ordre $m = 8$) :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}}$$

Bruit de quantification d'un convertisseur n bits

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}}, \quad Q_{eff} = \frac{Q}{\sqrt{12}}, \quad SNR \equiv \frac{X_{eff}}{Q_{eff}}$$

non linéarité = perte du bit LSB (de moindre poids)

$$SNR_{max} [\text{dB}] \approx 6 n_{bits} - 6 \quad (\text{y compris la perte du bit LSB})$$

17.4. Signaux et systèmes numériques

Transformation en z (systèmes causaux)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}, \quad z = \text{décalage avant}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

$$y[n=0] = Y(z)|_{z \rightarrow \infty}, \quad y[n \rightarrow \infty] = (z-1)Y(z)|_{z=1}$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(n \Omega_0)$	$\frac{\sin \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \alpha \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \sin(n \Omega_0)$	$\frac{\alpha \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

Produit de convolution (systèmes causaux RIF de longueur N)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

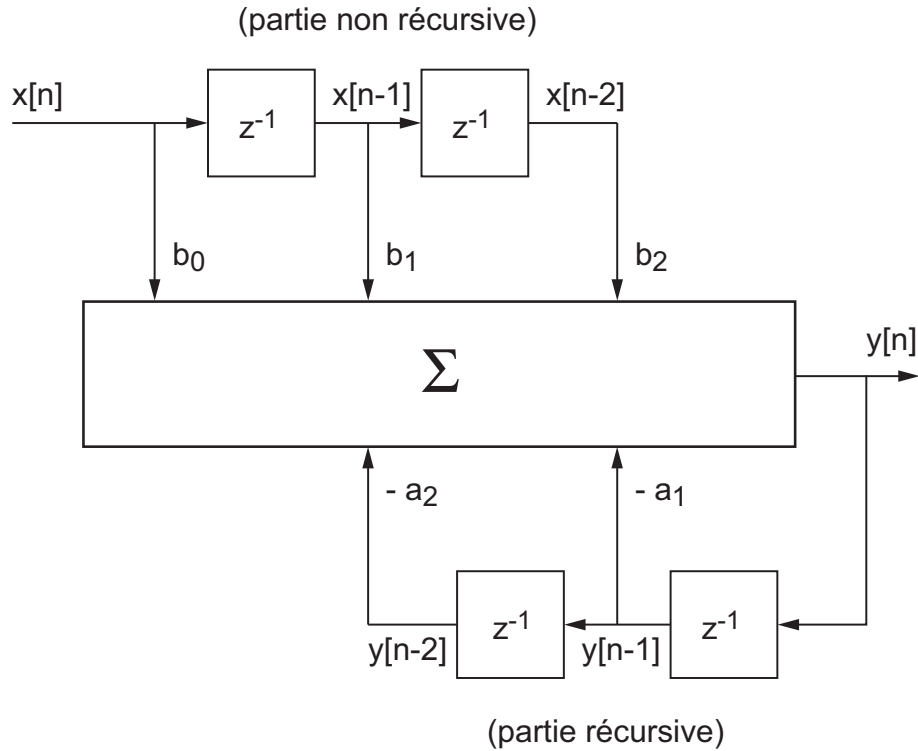
$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2} + \dots$$

Équations aux différences (systèmes causaux RII d'ordre N)

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots$$

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots}$$

Schéma fonctionnel (ordre 2)



Stabilité et instants caractéristiques (ordre 2)

$$\begin{aligned} \text{p\^otes de } H(z) &\Rightarrow D(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \\ \text{d'o\^u } p_{1,2} &= a \pm jb = R \exp(\pm j\Omega) \\ \text{avec } R &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Omega = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \text{stabilité } &\Rightarrow |p_k| = R < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{|\ln(R)|} & K_{tr} &\simeq 5 K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \\ K_p &= \frac{2\pi}{\Omega} & N_{osc} &= \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5}{2\pi} \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \end{aligned}$$

Fonctions de transfert et réponses fréquentielles (ordre 2)

$$H(j\Omega) = H(z)|_{z=e^{+j\Omega}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}} = \frac{b_0 e^{+j2\Omega} + b_1 e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1 e^{+j\Omega} + a_2}$$

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow z = +1 \Rightarrow H(f = 0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{4} &\Leftrightarrow \Omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = +j \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{4}\right) = \frac{-b_0 + j b_1 + b_2}{-1 + j a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{2} &\Leftrightarrow \Omega = \pi \Leftrightarrow z = -1 \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{2}\right) = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \end{aligned}$$

17.5. Analyse spectrale numérique

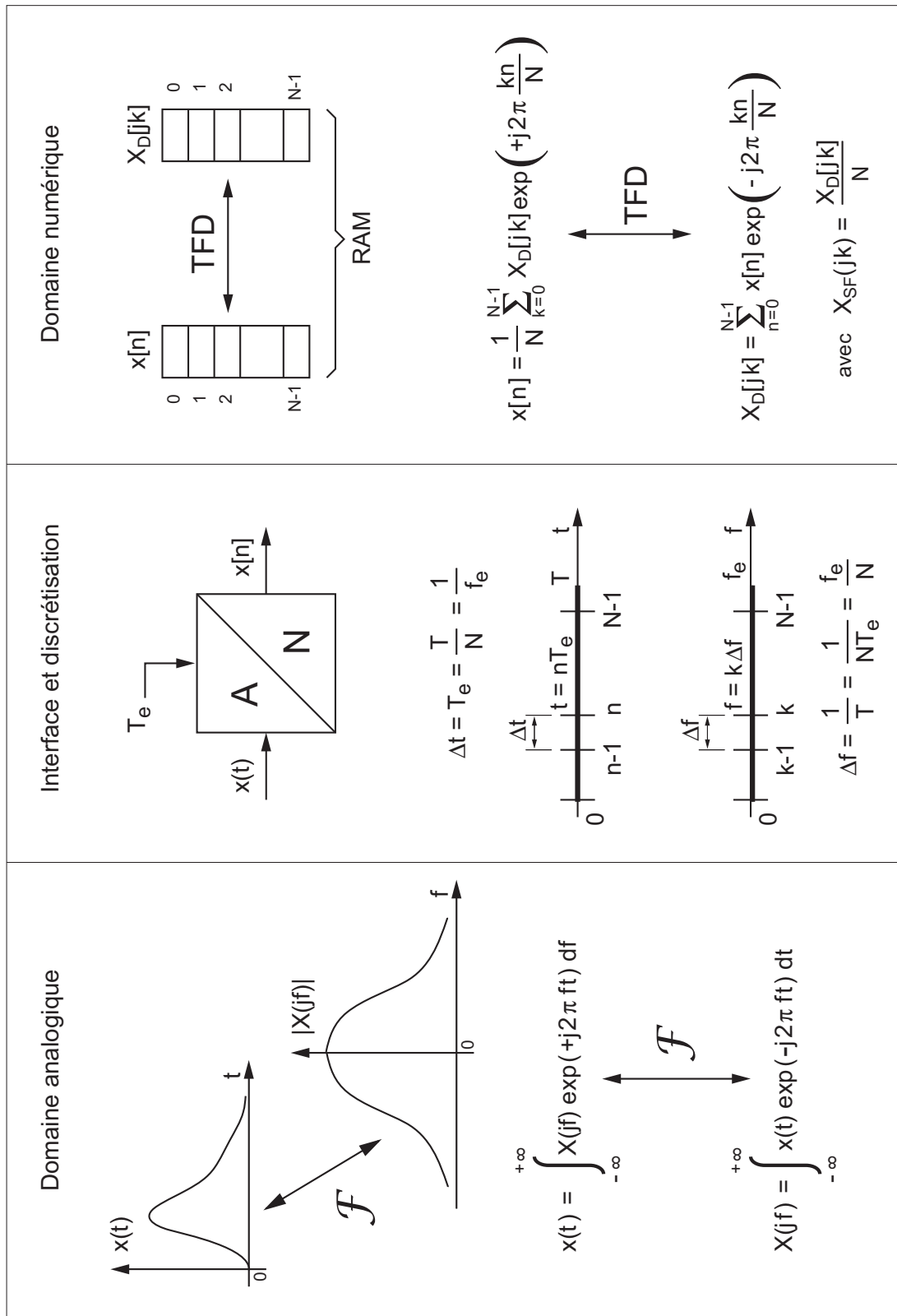


FIGURE 17.1.: Analyse spectrale numérique